

ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. В. КИРЮШИН, ЧЫОНГ ЗА БИНЬ

(Москва)

Исследуется форма свободной поверхности тяжелой намагничивающейся жидкости во внешнем магнитном поле. Феноменологические модели, описывающие такие среды, изложены в работах [1-5]; все они совпадают, если намагничивающуюся среду можно рассматривать как однокомпонентную и однофазную. В рамках этих моделей широко исследовалась гидростатика намагничивающейся жидкости во внешнем магнитном поле. Найдено вариационным методом уравнение формы свободной поверхности [6-8], определен профиль бесконечной свободной поверхности жидкости, когда внешнее магнитное поле определяется вертикальным проводником с током [8-10], вертикальной полосой с током, плоским горизонтальным витком с током, квадрупольной магнитной линзой [10], численно получена конфигурация невисокой капли намагничивающейся жидкости [6].

В данной работе найдена форма свободной поверхности однородной тяжелой намагничивающейся жидкости во внешнем магнитном поле одного прямолинейного горизонтального проводника с током и двух параллельных прямолинейных проводников, лежащих на поверхности жидкости в отсутствие тока. Также рассмотрен случай, когда внешнее магнитное поле определяется постоянным магнитом, размерами которого можно пренебречь, и одним магнитным полюсом постоянного магнита (другой полюс удален и его магнитным полем пренебрегается). Магнитная восприимчивость жидкости предполагается малой. Показывается, что если медленно (квазистатично) увеличивать силу тока в проводнике или медленно подносить магнит к поверхности, то жидкость будет сначала монотонно подниматься, а затем, при некоторой критической силе тока или критическом значении расстояния, произойдет резкий подъем жидкости с прилипанием к проводнику или магниту. При уменьшении силы тока в проводнике или при медленном отводе постоянного магнита часть жидкости отрывается. Найден максимальный объем жидкости, который может удерживать проводник с током или постоянный магнит. Обнаружено, что в случае, когда магнитное поле задается двумя параллельными проводниками с током, возможно образование внутри жидкости цилиндрической полости, заполненной воздухом.

Рассмотрена задача о равновесии слоистой среды, состоящей из двух слоев намагничивающихся жидкостей с разной плотностью и магнитной проницаемостью. в магнитном поле вертикального проводника с током. Найдена форма всех контактных поверхностей.

1. Найдем уравнение свободной поверхности тяжелой слабомагничивающейся жидкости во внешнем магнитном поле. Уравнение равновесия жидкости имеет вид [1-4]

$$(1.1) \quad -\nabla p + \frac{1}{8\pi} \nabla \left[H^2 \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{H^2}{8\pi} \nabla \mu + \rho g = 0$$

Здесь H — напряженность магнитного поля, g — ускорение силы тяжести; гидростатическое давление p и магнитная проницаемость μ являются функциями плотности ρ и температуры T среды. На поверхности раздела жидкость — воздух имеем соотношение [5], которое является следствием непрерывности нормальной составляющей напряжения

$$(1.2) \quad p - p_a = \frac{\rho H^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T - \frac{\mu - 1}{4\pi} (\mu H_n^2 + H_\tau^2)$$

Здесь H_n , H_t — нормальная и тангенциальная составляющие вектора магнитного поля к поверхности раздела, p_a — атмосферное давление. Выберем декартову систему координат (x, y, z) так, что ось z направлена вертикально вверх. Будем предполагать, что среда несжимаема и равновесие изотермично. Тогда уравнение (1.1) интегрируется. Учитывая проинтегрированное уравнение, из соотношения (1.2) получим выражение для координаты z точки поверхности

$$(1.3) \quad \rho g z = \frac{\mu-1}{8\pi} (\mu H_n^2 + H_t^2) + C, \quad C = \text{const}$$

Предполагая, что жидкость намагничивается слабо, $\mu-1 \ll 1$, и оставляя в (1.3) члены первого порядка малости по $\mu-1$, найдем

$$(1.4) \quad \rho g z = \frac{(\mu-1)H^2}{8\pi} + C$$

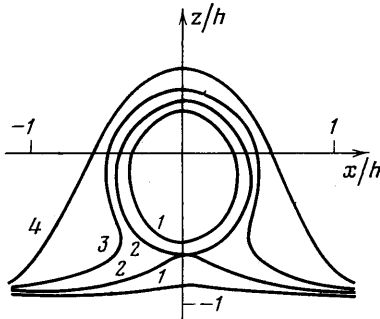
Изменением внешнего магнитного поля в намагничивающейся жидкости в этом приближении можно пренебречь. Постоянная интегрирования C определяется через заданный объем жидкости, а в случае бесконечного объема — через высоту жидкости на бесконечности.

2. Предположим, что внешнее магнитное поле создается прямолинейным проводником с током, расположенным параллельно поверхности жидкости на расстоянии h от нее в отсутствие тока. Направим ось x декартовой системы координат перпендикулярно проводнику, ось y — вдоль проводника, так что точки проводника имеют координаты $x=z=0$.

Магнитное поле проводника с током силы I определяется по формуле

$$(2.1) \quad H = \frac{2I}{cr}, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

Здесь c — скорость света в вакууме. Подставляя (2.1) в (1.4), получаем уравнение свободной поверхности жидкости, которое в безразмерной форме имеет вид



Фиг. 1

$$(2.2) \quad z' = \frac{1}{r'^2} - \alpha$$

$$(2.3) \quad z' = \frac{z}{\delta}, \quad r' = \frac{r}{\delta},$$

$$\delta^3 = \frac{(\mu-1)I^2}{2\pi c^2 \rho g}, \quad \alpha = -\frac{C}{\rho g \delta}$$

Параметром, определяющим вид формы поверхности, служит величина α . На бесконечной свободной поверхности $\alpha = h/\delta$; если есть замкнутая поверхность, образованная жидкостью, прилипшей к проводнику, то на ней постоянная α вы-

ражается через объем прилипшей жидкости, приходящейся на единицу длины проводника. На фиг. 1 изображена форма поверхности в плоскости $y = \text{const}$, отвечающая уравнению (2.2) при различных значениях α . При $\alpha^3 > 27/4$ поверхность состоит из двух частей: бесконечной поверхности с выпуклостью под проводником и замкнутой поверхности, окружающей проводник (кривые 1 на фиг. 1). При $\alpha^3 = 27/4$ поверхности смыкаются на высоте $h/3$ (кривая 2), при $27/4 \geq \alpha^3 \geq 27/8$ поверхность жидкости имеет

характерную зигзагообразную форму с узким перешейком под проводником (кривая 3), а при $\alpha^3 < 27/8$ такой перешеек исчезает (кривая 4).

Из полученных результатов следует, что если медленно (квазистатично) увеличивать силу тока в проводнике от нулевого значения или медленно подносить проводник к свободной поверхности, то высота жидкости под проводником будет сначала монотонно увеличиваться до значения $h/3$, а затем произойдет резкий подъем жидкости до высоты $4h/3$ с прилипанием к проводнику. При дальнейшем увеличении силы тока будет снова наблюдаться монотонное увеличение высоты подъема жидкости. Если же медленно уменьшать силу тока в проводнике от достаточно большого значения $\alpha^3 < 27/8$ или медленно уносить проводник от поверхности, то высота подъема жидкости будет монотонно изменяться; при силе тока, соответствующей значению $\alpha^3 = 27/8$, начнет образовываться перешеек под проводником и при силе тока, соответствующей значению $\alpha^3 = 27/4$, жидкость разорвется на высоте $h/3$.

Заметим, что если проводник находится под поверхностью жидкости при отсутствии тока, $h \geq 0$, то изменение формы поверхности будет непрерывно при любом изменении α .

Замкнутые поверхности, существующие при $\alpha^3 > 27/4$ (кривая 1 на фиг. 1), определяют равновесие жидкости, прилипшей к проводнику. Постоянная α на этих поверхностях выражается через безразмерный объем $V' = V/\delta^3$, приходящийся на единицу длины проводника, соотношением

$$(2.4) \quad V' = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{z+\alpha} - z^2} dz$$

Здесь a и b — минимальная и максимальная координаты z точки поверхности. Эти величины определяются через α соотношениями, вытекающими из (2.2)

$$(2.5) \quad b - \frac{1}{b^2} = -\alpha, \quad b > 0, \quad a = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4b^3}}{2b^2}$$

Максимальный объем V'_{\max} , который может удерживать единица длины проводника при заданной силе тока, определяется значением $\alpha^3 = 27/4$

$$(2.6) \quad V'_{\max} = \int_{-\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{2}} \sqrt{\frac{2}{2z + 3\sqrt[3]{2}} - z^2} dz$$

3. Пусть на поверхности намагничивающейся жидкости лежат (в отсутствие тока) два прямолинейных параллельных проводника на расстоянии $2l$ друг от друга. По этим проводникам пропускается ток, одинаковый по величине J и направленный в одну сторону. Уравнение формы свободной поверхности определяется из соотношений (1.4), (2.1) и имеет вид

$$(3.1) \quad \rho g z = \frac{2(\mu-1)J^2(z^2+x^2)}{\pi c^2[z^2+(x-l)^2][z^2+(x+l)^2]} + C$$

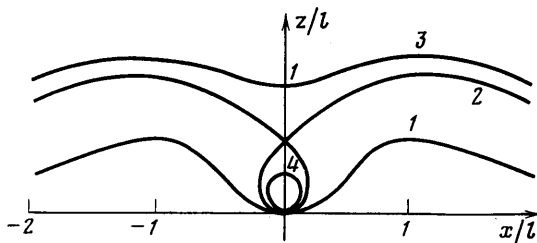
Здесь декартова система координат выбрана так, что ось x перпендикулярна проводникам, ось y параллельна проводникам и лежит на одинаковом расстоянии l от них.

Вид формы свободной поверхности определяется безразмерными параметрами

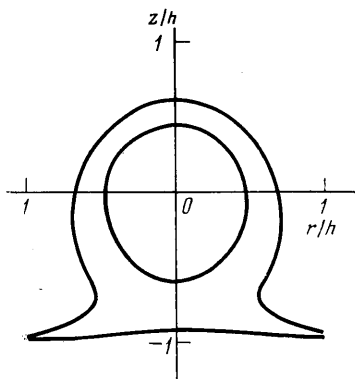
$$\beta = (\mu-1)J^2/\pi c^2 \rho g l^3 \quad \text{и} \quad C' = C/\rho g l$$

На бесконечной свободной поверхности из условия $z=0$ при $x=\infty$ следует $C'=0$.

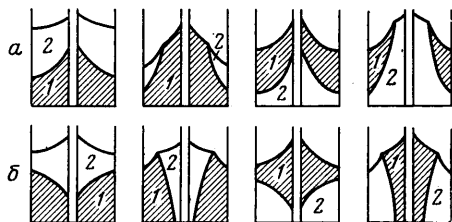
На фиг. 2 изображена форма поверхности жидкости в плоскости $y=\text{const}$, отвечающая уравнению (3.1) при $C'=0$ и различных значениях параметра β . Если сила тока мала, $\beta < 8\sqrt[3]{3}/9$, то свободная поверхность



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

единственна и имеет два «горбика», возвышающихся над проводниками (кривая 1). При $\beta = 8\sqrt[3]{3}/9$ эти два горбика соединяются своими вершинами так, что кривая имеет точку самокасания (кривая 2). При $\beta > 8\sqrt[3]{3}/9$ свободная поверхность состоит из двух ветвей: бесконечной свободной поверхности, поднимающейся над обоими проводниками (кривая 3), и поверхности цилиндрической трубки, заполненной воздухом (кривая 4). Это объясняется тем, что магнитное поле между проводниками относительно мало и, в частности, в начале координат равно нулю. Из полученных результатов следует, что при медленном увеличении силы тока в проводниках в намагничивающейся жидкости образуется цилиндрическая трубка с воздухом. Заметим, что на поверхности этой цилиндрической поверхности, вообще говоря, постоянная C' не равна нулю; она выражается через давление воздуха в трубе p_b ($C = p_a - p_b$) или через площадь поперечного сечения.

Если ток в проводниках направлен в разные стороны, то можно показать, что свободная поверхность жидкости всегда будет состоять из одной ветви.

4. Пусть около поверхности намагничивающейся жидкости находится постоянный магнит (или виток с током), размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием h от него до поверхности жидкости. Магнитное поле определяется магнитным моментом M магнита. Рассмотрим случай, когда магнитный момент направлен перпендикулярно поверхности жидкости. Уравнение свободной поверхности (2.1) в этом случае

имеет вид

$$(4.1) \quad \rho g z = \frac{(\mu-1)M^2}{8\pi} \left\{ \frac{1}{(r^2+z^2)^3} + \frac{3z^2}{(r^2+z^2)^4} \right\} + C$$

Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — полярный радиус, ось z проходит через постоянный магнит. Исследование формы поверхности, определяемой этим уравнением, аналогично исследованию, проведенному в п. 2. При этом определяющим безразмерным параметром служит величина $\beta = (\mu-1)/8\pi\rho g h^7$. Если $\beta < 6^6/4 \cdot 7^6$, то свободная поверхность состоит из двух ветвей, а при $\beta > 6^6/4 \cdot 7^6$ — из одной. Форма поверхности, соответствующая этим двум случаям, изображена на фиг. 3. Поведение свободной поверхности намагничивающейся жидкости при квазистатическом изменении силы тока в витке или медленном отводе магнита от поверхности происходит аналогично случаю прямолинейного проводника, рассмотренному в п. 2.

Пусть теперь постоянный магнит имеет, напротив, очень большие размеры и представляет собой длинный узкий стержень. Рассмотрим свободную поверхность жидкости в магнитном поле одного полюса этого магнита, принимаемого за точечный; второй полюс будем считать удаленным и его магнитным полем пренебрегаем. Уравнение формы свободной поверхности имеет вид

$$(4.2) \quad \rho g z = \frac{(\mu-1)m^2}{8\pi(r^2+z^2)} + C$$

Здесь m — величина магнитного заряда, h — расстояние от полюса до невозмущенной поверхности. Параметром, определяющим вид формы поверхности, является величина $\beta = (\mu-1)m^2/8\pi\rho g h^5$. Точно так же, как в рассмотренных выше случаях, свободная поверхность состоит из двух ветвей, если $\beta < 4^4/5^5$, а при $\beta > 4^4/5^5$ — из одной. Форма поверхности в этих двух случаях в вертикальной плоскости, проходящей через магнитный полюс, аналогична вариантам, изображенным на фиг. 3.

Максимальный объем жидкости, который может удержать точечный магнит V_1 или точечный полюс V_2 , определяется формулами

$$(4.3) \quad V_1 = V_1' \left[\frac{7^7(\mu-1)M^2}{2 \cdot 6^6 \pi \rho g} \right]^{3/7}, \quad V_2 = V_2' \left[\frac{5^5(\mu-1)m^2}{2^{11} \pi \rho g} \right]^{3/5}$$

$$V_i' = \pi \int_{a_i}^{b_i} r_i^2 dz, \quad i=1, 2$$

Введенные здесь функции $r_i(z)$ и величины a_i, b_i определяются из неявных уравнений

$$(4.4) \quad z = \frac{6^6}{4 \cdot 7^7} \left[\frac{1}{(r_1^2+z^2)^3} - \frac{3z^2}{(r_1^2+z^2)^4} \right] - 1$$

$$z = \frac{4^4}{5^5(r_2^2+z^2)^2}, \quad r_i(a_i) = r_i(b_i) = 0$$

Отметим, что две последние задачи имеют аналогию в электростатике. Если заменить в формулах μ на ϵ — диэлектрическую проницаемость среды, то получим решения задач о форме свободной поверхности поляризующейся жидкости в электрическом поле диполя с дипольным моментом M или заряда величины m .

5. Рассмотрим равновесие среды, состоящей из двух слоев намагничивающейся жидкости с различными плотностями и магнитными проницаемостями в магнитном поле вертикального проводника с током. Форма свободной поверхности однородной намагничивающейся жидкости в магнитном поле вертикального проводника с током найдена в [9]. Индексом 1 обозначим величины, относящиеся к слою жидкости с большей магнитной проницаемостью, индексом 2 — к другому слою жидкости. Из уравнения

равновесия (1.1) и соотношений на поверхности разрыва (1.2) получим уравнение контактной поверхности и уравнение свободной поверхности слоя i

$$(\rho_1 - \rho_2)gz = \frac{(\mu_1 - \mu_2)I^2}{2\pi c^2 r^2} + C_0$$

(5.1)

$$\rho_i gz = \frac{(\mu_i - 1)I^2}{2\pi c^2 r^2} + C_i$$

Здесь r — расстояние от точки поверхности до проводника, z — высота поверхности. Постоянные C_1, C_2 определяются из условия заданного уровня слоя на бесконечности (если объем, занимаемый средой, бесконечен) или из заданных объемов слоев жидкости, находящихся в сосуде конечного размера. Отметим, что найденное решение (5.1) в отличие от решений, приведенных в п. 2—4, справедливо и при отсутствии условия малости магнитной восприимчивости, так как можно показать, что из-за осевой симметрии задачи магнитное поле проводника не искажается намагничивающейся жидкостью и в каждой точке контактной поверхности касательно к ней.

На фиг. 4 изображены различные возможные варианты формы свободной и контактной поверхностей при разном выборе постоянных C_1, C_2 и разном отношении плотностей: $\rho_1 > \rho_2$ (а), $\rho_1 < \rho_2$ (б). Если плотности слоев одинаковы, но магнитные проницаемости различны, то контактная поверхность имеет цилиндрическую форму с осью — проводником.

Авторы благодарят В. В. Гогосова и В. А. Налетову за полезное обсуждение и интерес к работе.

Поступила 5 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1976.
2. Гогосов В. В., Васильева Н. Л., Тактаров Н. Г., Шапошникова Г. А. Уравнения гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся многокомпонентных и многофазных сред. Разрывные решения. Исследование разрывных решений со скачком магнитной проницаемости. М., Изд-во МГУ, 1975.
3. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А. Гидродинамика дисперсных систем, взаимодействующих с электромагнитным полем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.
4. Neuringer J. L., Rosensweig R. E. Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 12.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
6. Шашин В. М., Шуванов Н. И. Равновесные формы свободной поверхности жидкости в гравитационном и магнитном полях с учетом сил поверхностного натяжения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
7. Тарапов И. Е. Некоторые вопросы гидростатики намагничивающихся и поляризующихся сред. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.
8. Борисов И. Д. О равновесных формах поверхности намагничивающейся жидкости. Магнитная гидродинамика, 1976, № 4.
9. Krueger D. A., Jones T. B. Hydrostatic profile of ferrofluid around a vertical current-carrying wire. Phys. Fluids, 1974, vol. 17, No. 10.
10. Берковский Б. М., Орлов Л. П. К исследованию формы свободной поверхности и аналога пинч-эффекта в намагничивающихся жидкостях. Магнитная гидродинамика, 1973, № 4.