**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1980**

УДК 538.4

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВИЖУЩИХСЯ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

С. А. ЕГОРУШКИН, А. Г. ЦЫПКИН

(Москва)

В работе исследован вопрос о стабилизации поверхности раздела движущихся намагничивающихся жидкостей при помощи внешнего магнитного поля круговой поляризации $H=\{H_0 \cos \omega t,\ H_0 \sin \omega t,\ 0\}$. Жидкости предполагаются идеальными, несжимаемыми, непроводящими и электрически нейтральными. Выведено уравнение движения возмущенной поверхности раздела жидкостей. С использованием критерия Борга получены достаточные условия устойчивости малых возмущений поверхности раздела, связывающие значения амплитуды H_0 и частоты ω внешнего магнитного поля с характерными параметрами задачи и волновым вектором k. Исследована зависимость H_0 и ω от модуля волнового вектора. Проведено сравнение полученных результатов с результатами работы [1].

Вопрос о стабилизации неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей впервые возник в связи с проблемой «подвески» плазмы в магнитном поле. Возникающая при этом неустойчивость Релея – Тейлора может быть стабилизирована при помощи переменного магнитного поля [2]. В случае намагничивающихся жидкостей вопрос о стабилизации неустойчивости Релея – Тейлора внешним магнитным полем был решен в работе [1]. В данной работе результаты [1] обобщены на случай неустойчивости типа Кельвина – Гельмгольца, связанной с относительным движением жидкостей.

Рассмотрим задачу о стабилизации поверхности раздела двух однородных идеальных несжимаемых жидкостей, находящихся в потенциальном поле сил тяжести. Жидкости предполагаются электрически нейтральными, непроводящими, с различными магнитными проницаемостями μ_i ($i=1, 2$). Система уравнений, описывающая поведение жидкостей в электромагнитном поле, может быть записана в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_i=0, \qquad \rho_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt}=-\nabla P_i+\rho_i \mathbf{g}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_i=\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E}_i=-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t} \tag{1}$$

$$\mathbf{B}_i=\mu_i \mathbf{H}_i, \quad \operatorname{div} \mathbf{E}_i=0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_i=0$$

Здесь $\mathbf{V}_i$ — скорость, ρ_i — плотность, $\rho_i \mathbf{g}$ — сила тяжести, P_i — полное давление в i-й жидкости.

В силу того что плотности жидкостей считаются постоянными, в уравнениях движения отсутствуют объемные пондеромоторные силы. В предположении, что μ_i не зависит от плотности, т. е. $\partial\mu_i/\partial\rho=0$, полное давление в жидкости сводится к чисто гидродинамическому давлению. Заметим также, что уравнения гидромеханики системы (1) в случае потенциальных движений, существование которых предполагается, имеют интеграл Коши — Лагранжа.

Пусть в декартовой системе координат XYZ жидкости занимают области пространства D_1: $(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,\ 0<z<l)$ и D_2: $(-\infty<$

$<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$, $-l<z<0$), а области D_3: ($-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<<+\infty$, $l<z<L_1$) и D_4: ($-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$, $-L_2<z<-l$) заполнены твердым веществом с магнитными проницаемостями, соответственно равными магнитным проницаемостям жидкостей в областях D_1, D_2. Области D_3 и D_4 ограничены бесконечно проводящими стенками $z=L_1$, $z=-L_2$.

Будем полагать, что в невозмущенном состоянии скорость относительного движения жидкостей постоянна и равна $\mathbf{V}=(v_1v_20)$. При этом всегда можно считать, что скорость первой жидкости равна $\mathbf{V}$, а вторая жидкость покоится.

Внешнее магнитное поле будем задавать на бесконечно-проводящей стенке $z=L_1$. Ограничиваясь в дальнейшем заданием однородного по пространству магнитного поля, полагаем, что

$$H_{1x}(xyL_1t)=A_x(t),\ H_{1y}(xyL_1t)=A_y(t),\ H_{1z}(L_1t)=0$$

в силу бесконечной проводимости стенки $z=L_1$.

Найдем ограничения, которые надо наложить на функции $A_x(t)$ и $A_y(t)$ для того, чтобы задаваемое ими в областях D_1-D_4 электромагнитное поле удовлетворяло граничным условиям на бесконечно-проводящих стенках $z=L_1$, $z=-L_2$ и на невозмущенной поверхности раздела жидкостей $z=0$.

Будем искать решение уравнений Максвелла, зависящее только от z, t полагая, что в областях D_1-D_4

$$H_{1z}(zt)=H_{2z}(zt)\equiv 0,\ E_{1z}(zt)=E_{2z}(zt)\equiv 0$$

Тогда уравнения и граничные условия для поля приведутся к виду:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_{ix}}{\partial t}=-\frac{\partial H_{iy}}{\partial z},\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial E_{iy}}{\partial t}=\frac{\partial H_{ix}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_{ix}}{\partial z}=-\frac{\mu_i}{c}\frac{\partial H_{iy}}{\partial t},\qquad \frac{\partial E_{iy}}{\partial z}=\frac{\mu_i}{c}\frac{\partial H_{ix}}{\partial t}$$

(2)

$$z=L_1,\ H_{1x}=A_x(t),\ H_{1y}=A_y(t),\ E_{1x}=E_{1y}=0$$

$$z=0,\ H_{1x}=H_{2x},\ H_{1y}=H_{2y},\ E_{1x}=E_{2x},\ E_{1y}=E_{2y}$$

$$z=-L_2,\ E_{2x}=E_{2y}=0$$

Система (2) описывает поведение электромагнитнго поля в невозмущенном состоянии. Условия существования решения (2) накладывают определенные ограничения на функции $A_x(t)$ и $A_y(t)$.

Действительно, решая, например, первую пару уравнений Максвелла в областях D_1 и D_3 получим

$$E_{1x}=\frac{\sqrt{\mu_1}}{2}\left[A_y\left(t+(L_1-z)\frac{\sqrt{\mu_1}}{c}\right)-A_y\left(t-(L_1-z)\frac{\sqrt{\mu_1}}{c}\right)\right]$$

(3)

$$H_{1y}=\frac{1}{2}\left[A_y\left(t+(L_1-z)\frac{\sqrt{\mu_1}}{c}\right)+A_y\left(t-(L_1-z)\frac{\sqrt{\mu_1}}{c}\right)\right]$$

Продолжая по непрерывности функции E_{1x} и H_{1y} в области D_2, D_4 и выбирая L_1 и L_2 так, чтобы $L_1\sqrt{\mu_1}=L_2\sqrt{\mu_2}$, из условия $E_{2y}(-L_2t)=0$ найдем

$$A_y\left(t+\left(L_1\frac{\sqrt{\mu_1}}{c}+L_2\frac{\sqrt{\mu_2}}{c}\right)\right)=A_y\left(t-\left(L_1\frac{\sqrt{\mu_1}}{c}+L_2\frac{\sqrt{\mu_2}}{c}\right)\right)$$

Поэтому $A_y(t)$ — периодическая функция с периодом

(4) $$T=4L_1\sqrt{\mu_1}/Nc,\quad N=1,\ 2,\ldots$$

Аналогичные выводы верны и для функции $A_x(t)$, поэтому можно в дальнейшем положить, что

(5) $$A_x(t)=H_0\cos\omega t,\quad A_y(t)=H_0\sin\omega t,\quad \omega=N_0c\pi/2L_1\sqrt{\mu},\quad N_0=1,\ 2,\ldots$$

Далее понадобятся значения функций H_{1x} и H_{1y} в точке $z=0$. Полагая в соотношении (4) $N=4N_0$, получим из (3) и (5): что

(6) $$H_{1y}(0,t)=H_0\sin\omega t,\quad H_{1x}(0,t)=H_0\cos\omega t$$

Рассмотрим теперь малые возмущения поверхности раздела двух жидкостей. Возникающая при этом неустойчивость, типа неустойчивости Кельвина — Гельмгольца, может быть стабилизирована внешним магнитным полем.

Пусть уравнение возмущенной поверхности раздела имеет вид $z-\psi(yxt)=0$, вектор нормали к возмущенной поверхности $\mathbf{n}=(-\partial\psi/\partial x-$ $-\partial\psi/\partial y-1)$, φ_i — потенциал возмущений скоростей i-й жидкости, h_i — возмущения магнитного поля. Линеаризованная система уравнений для возмущенного движения и граничные условия на твердых стенках запишутся в виде

(7) $$\Delta\varphi_i=0,\ \operatorname{rot} h_i=0,\ \operatorname{div} h_i=0,\ i=1,2$$

(8) $$z=l,\ \partial\varphi_1/\partial z=0,\ z=L_1,\ h_{1z}=0$$
$$z=-l,\ \partial\varphi_2/\partial z=0,\ z=-L_2,\ h_{2z}=0$$

Граничные условия на поверхности раздела жидкостей (после снесения их на невозмущенную поверхность $z=0$) имеют вид

(9) $$(\mu_1-\mu_2)\left(H_{1x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+H_{1y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=\mu_1h_{1z}-\mu_2h_{2z}$$
$$h_{1x}=h_{2x},\quad h_{1y}=h_{2y}$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-v_1\frac{\partial\psi}{\partial x}-v_2\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}$$

Уравнения возмущенного движения жидкостей в областях D_1 и D_2 имеют интегралы Коши — Лагранжа

$$\rho_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}+\rho_i(\mathbf{V}_i,\nabla\varphi_i)+\rho_igz+p_i'=0,\qquad i=1,2$$

где p_i' — возмущение давления в i-й жидкости.

Поэтому на поверхности раздела жидкостей $z=\psi(xyt)$ имеет место соотношение

(10) $$\rho_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+g\psi+v_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+v_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)-\rho_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+g\psi\right)=p_2'-p_1'$$

С другой стороны, как показано в [3], из условия непрерывности потока импульса через поверхность раздела жидкостей следует, что при $z=$ $=\psi(xyt)$ должно выполняться соотношение

(11) $$(P_2-P_1)\mathbf{n}=\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2+\rho_1\mathbf{V}_1V_{n1}-\rho_2\mathbf{V}_2V_{n2}$$
$$\mathbf{R}=\frac{1}{4\pi}\left[(\mathbf{E}E_n+\mathbf{H}B_n)-\frac{n}{2}(E^2+\mathbf{HB})\right]$$

Здесь $\mathbf{R}$ — поверхностная плотность распределения внешних электромагнитных сил, $\mathbf{n}=(-\partial\psi/\partial x-\partial\psi/\partial y-1)$ — вектор нормали в возмущенной поверхности раздела жидкостей, P_i — полное давление в i-й жидкости.

Используя теперь условия на поверхности разрыва для электромагнитного поля $H_{1x}=H_{2x}$, $H_{1y}=H_{2y}$, $E_{1x}=E_{2x}$, $E_{1y}=E_{2y}$, $B_{1n}=B_{2n}$, $E_{1n}=E_{2n}$ для возмущений давления p_1' и p_2' получим

$$p_2'-p_1'=\frac{1}{4\pi}(\mu_1-\mu_2)\,(A_x h_{1x}(0t)+A_y h_{1y}(0t)) \tag{12}$$

Подставляя соотношение (12) в уравнение (10), окончательно найдем

$$\rho_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+g\psi+v_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+v_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)-\rho_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+g\psi\right)=$$
$$=\frac{1}{4\pi}(\mu_1-\mu_2)\,(A_x h_{1x}+A_y h_{1y}) \tag{13}$$

Применив к (7)—(9) преобразование Фурье F по переменным x, y и решая (7) с использованием (8) и (9), получим

$$(\mu_1-\mu_2)\,(A_x F h_{1x}+A_y F h_{1y})=\frac{F\psi(\mu_1-\mu_2)^2(A_x m+A_y n)^2}{4\pi k(\mu_1\operatorname{th}kL_1+\mu_2\operatorname{th}kL_2)}$$

$$\left[\frac{\partial F\varphi_1}{\partial t}-i(mv_1+nv_2)F\varphi_1\right]=$$
$$=\frac{1}{k\operatorname{th}kl}\left[\frac{\partial^2 F\psi}{\partial t^2}-2i\frac{\partial F\psi}{\partial t}(mv_1+nv_2)-(mv_1+nv_2)^2 F\psi\right]$$

$$\frac{\partial F\varphi_2}{\partial t}=\frac{1}{k\operatorname{th}kl}\frac{\partial^2 F\psi}{\partial t^2},\qquad k^2=m^2+n^2$$

$$Fg(mnzt)\equiv\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(xyzt)\,e^{-imx-iny}\,dx\,dy$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (13), записанное для фурье-образов, получим уравнение для функции $F\psi=F\psi(mnt)$, которое заменой $\Psi=F\psi\exp[i\rho_1(mv_1+nv_2)/(\rho_1+\rho_2)]$ может быть приведено к виду

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2}+\frac{\Psi}{\rho_1+\rho_2}\left[\frac{(\mu_1-\mu_2)^2C^2(t)\operatorname{th}kl}{4\pi(\mu_1\operatorname{th}kL_1+\mu_2\operatorname{th}kL_2)}-\right.$$
$$\left.-g(\rho_1-\rho_2)k\operatorname{th}kl-\rho W^2\right]=0 \tag{14}$$

$$C^2(t)=[mA_x(t)+nA_y(t)]^2,\quad W^2=(mv_1+nv_2)^2,\quad \rho=\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$$

Теперь вопрос о стабилизации внешним магнитным полем возмущений поверхности раздела жидкостей свелся к отысканию величин H_0 и ω для функций $A_x(t)$ и $A_y(t)$, обеспечивающих устойчивость нулевого решения уравнения (14) при всех m и n.

Согласно условию (6), уравнение (14) является уравнением Матье и может быть приведено к каноническому виду

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2}+\Psi\,(p+q\cos 2\omega_0 t)=0$$

$$q=\frac{(\mu_1-\mu_2)^2k^2H_0^2\,\mathrm{th}\,kl}{8\pi(\rho_1+\rho_2)(\mu_1\,\mathrm{th}\,kL_1+\mu_2\,\mathrm{th}\,kL_2)}, \tag{15}$$

$$p=q-g(\rho_1-\rho_2)k\,\mathrm{th}\,kl-k^2(v_1^2+v_2^2)\sin^2\alpha$$

$$\omega_0 t=\omega t-\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\frac{m}{n},\qquad \alpha=\mathrm{arctg}\frac{v_2}{v_1}+\mathrm{arctg}\frac{m}{n}$$

Достаточные условия устойчивости решений уравнения Матье дает, например, критерий Борга [4]:

$$\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}(p+q\cos 2\omega_0 t)\,dt\geqslant 0,\quad T_1\int_0^{T_1}|p+q\cos 2\omega_0 t|\,dt\leqslant 4,\quad T_1=\frac{\pi}{\omega_0}. \tag{16}$$

Разрешая эти соотношения относительно H_0^2 и ω_0^2, найдем значения амплитуды H_0 и частоты ω_0 изменения внешнего магнитного поля, обеспечивающие устойчивость поверхности раздела двух жидкостей

$$H_0^2\geqslant 8\pi(\mu_1\,\mathrm{th}\,kL_1+\mu_2\,\mathrm{th}\,kL_2)\,\frac{g(\rho_1-\rho_2)k\,\mathrm{th}\,kl+\rho k^2(v_1^2+v_2^2)\sin^2\alpha}{k^2(\mu_1-\mu_2)^2\,\mathrm{th}\,kl} \tag{17}$$

$$\rho=\frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)},\quad \omega_0^2\geqslant\frac{1}{16}[g(\rho_1-\rho_2)k\,\mathrm{th}\,kl+\rho k^2(v_1^2+v_2^2)\sin^2\alpha]$$

Найденное таким образом переменное магнитное поле гасит все возмущения, соответствующие любым волновым числам k.

Как следует из условий (16), коротковолновые возмущения (k — велико) требуют для своего гашения быстропеременное поле ($\omega_0^2\sim k^2$) небольшой интенсивности ($H_0^2\sim\rho(v_1^2+v_2^2)$). Отметим для сравнения, что в случае отсутствия относительного движения интенсивность необходимого для гашения возмущений магнитного поля стремится к нулю ($H_0^2\sim 1/k$), а частота растет пропорционально корню квадратному из k: ($\omega_0^2\sim k$).

Длинноволновые же возмущения (k — мало) гасятся слабо зависящим от времени полем ($\omega_0^2\sim k^2$), интенсивность которого H_0^2 пропорциональна L/l. В этом случае присутствие относительного движения не влияет на порядок роста по k величин H_0 и ω_0.

Из вышесказанного следует, что относительное движение жидкости затрудняет стабилизацию поверхности раздела. Тем не менее стабилизация возможна при любых допустимых значениях волнового вектора k.

Поступила 5 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бучин В. А., Цыпкин А. Г.* О неустойчивости Рэлея – Тейлора поляризующихся и намагничивающихся жидкостей в переменном электромагнитном поле. Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 5.
2. *Ладиков Ю. П.* Удержание жидкого металла в вакууме магнитным полем круговой поляризации при наличии проводящего кожуха. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
4. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1964.