

**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА**
№ 4 • 1980

УДК 533.6.011-2

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОГО ТРАНСЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА
ЧЕРЕЗ РЕШЕТКУ ОБЪЕДИНЕННЫМ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ И УСТАНОВЛЕНИЯ**

А. Б. БОГОД, Б. И. КУРМАНОВ, Г. Л. ПОДВИДЗ

(Москва)

В расчетах двумерного, безотрывного установившегося течения невязкой сжимаемой жидкости через решетки турбомашин в основном используются два численных метода. Для дозвукового обтекания профиля используется метод интегральных уравнений [1]. Он обладает повышенной точностью расчета в области входной кромки вследствие сгущения на ней расчетных точек и для несжимаемой жидкости требует относительно малого времени счета на ЭВМ по сравнению с другими методами.

Для любых скоростей успешно используется метод установления [2]. Применение конечно-разностной схемы сквозного счета позволяет проводить расчеты без явного выделения особенностей (скачков) в потоке. Скачки уплотнения при этом получаются как узкие области (несколько ячеек разностной сетки) с большими градиентами параметров. В существующем варианте метода [3] расчетная сетка строится вручную, что связано с большими затратами времени и требует значительного опыта такой работы.

Представляется целесообразным объединение этих методов: метод интегральных уравнений используется для задания начального поля течения и автоматизированного построения разностной сетки, на которой далее ведется расчет методом установления. Разностная сетка в большей части потока строится по эквипотенциалам и линиям тока течения несжимаемой жидкости. Это обеспечивает форму ячеек, близкую к ортогональной, что сокращает время счета и повышает точность результатов в методе установления.

1. Выбор расчетной сетки является важным элементом при расчетах двумерных задач обтекания решеток. К общим требованиям, налагаемым на координатные сетки по условиям устойчивости и точности счета, относятся: сгущение сеток в области больших градиентов и особенностей течения (входная кромка профиля), наибольшая близость координатных линий к ортогональным, плавное изменение расстояний между узлами соседних ячеек, представление границ области расчета координатными линиями (контура профиля включается в координатные линии) [2]. Полезно также учитывать конкретные особенности задачи и использовать априорную информацию о свойствах решения.

Сетки могут быть различных видов. Геометрические сетки образуются: прямоугольными ячейками, где контур профиля не является координатной линией [4]; ортогональными ячейками [2, 3], косоугольными ячейками [1].

Гидродинамические сетки связаны с параметрами течения. Они могут быть получены из течения несжимаемой жидкости как ортогональные линии уровня для различных аналитических функций.

Комплексный потенциал течения $\Phi = \phi - i\psi$ образует сетку, состоящую из линий равного потенциала скорости и линий тока [5]

$$(1.1) \quad \phi(x, y) = \text{const}, \quad \psi(x, y) = \text{const}$$

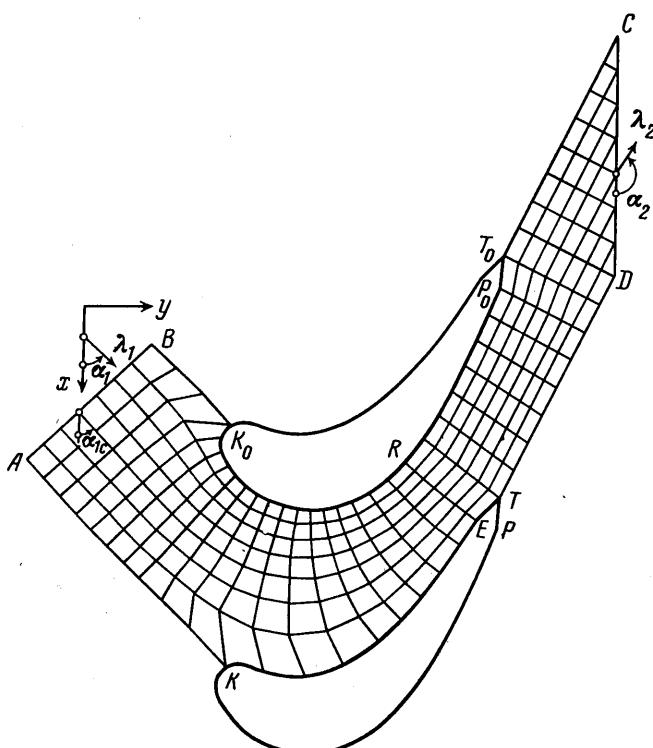
Здесь контур профиля является линией сетки. Сетка (1.1) наиболее распространена.

Комплексно-сопряженная скорость течения $\bar{c} = c_x - i c_y$ образует сетку, состоящую из линий равных проекций скорости

$$(1.2) \quad c_x(x, y) = \text{const}, \quad c_y(x, y) = \text{const}$$

Логарифм комплексно-сопряженной скорости течения $\ln \bar{c} = \ln c - i\alpha$ образует сетку, состоящую из изотах и изоклин [5]

$$(1.3) \quad \ln c(x, y) = \text{const}, \quad \alpha(x, y) = \text{const}$$



Фиг. 1

В сетках (1.2), (1.3) контур профиля в общем случае не является координатной линией.

При построении координатных сеток в решетках профилей используются различные методы. Область решетки конформно отображается на каноническую область (прямоугольник, круг) с ортогональной сеткой [6, 7]. Обратным преобразованием строится ортогональная сетка в области решетки, которая может иметь сложную форму. В работе [2] рассматривается конформное отображение области течения на прямоугольник, которое сводится к вариационной задаче для нахождения ортогональных координатных линий.

2. Для построения сетки и начального приближения используется расчет обтекания плоской решетки стационарным безвихревым потоком невязкой несжимаемой жидкости, описываемым уравнениями неразрывности

сти и отсутствия вихрей

$$(2.1) \quad \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} = 0$$

Задача ставится, строго говоря, в бесконечной полосе $ABCD$, включающей один межлопаточный канал (фиг. 1). Ширина полосы в направлении фронта решетки равна шагу t , входное AB и выходное CD сечения приближенно задаются на конечном расстоянии от решетки (порядка шага решетки). В прямой задаче требуется выполнение граничных условий: в сечении AB задан вектор скорости набегающего потока несжимаемой жидкости (совпадающий с направлением координатных линий сетки) c_1 , α_{1c} ; на границах AK , TD и BK_0 , T_0C выполняется условие периодичности течения; контур профиля при безотрывном обтекании является граничной линией тока; на выходной кромке в точках E и P скачкообразного изменения кривизны контура используется условие равенства скоростей $|c_E| = |c_P|$.

Скорость течения относится к критической скорости a_* перед решеткой.

$$c' = \frac{c}{a_*} = c \left(\frac{2k}{k+1} RT_1 \right)^{-1/2}$$

Далее верхний индекс ' над безразмерной скоростью опущен.

Система уравнений (2.1) сводится к линейному интегральному уравнению относительно безразмерной скорости $c(s)$ течения на контуре профиля L_0 [1, 5]

$$(2.2) \quad c(s) \int_{L_0} K(s, \sigma) d\sigma + \int_{L_0} [c(\sigma) - c(s)] K(s, \sigma) d\sigma + \text{const} = c_{1x} y(s) - c_{1y} x(s)$$

$$(2.3) \quad K(s, \sigma) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch} \frac{2\pi}{t} (y - \eta) - \cos \frac{2\pi}{t} (x - \xi) \right] - \frac{y(s)}{t}$$

Здесь $x(s)$, $y(s)$ — координаты контура профиля L_0 , $\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$ — переменные интегрирования. Проекции скорости за решеткой определяются в виде

$$c_{2x} = c_{1x} - \Gamma/t, \quad c_{2y} = c_{1y}, \quad \Gamma = \int_{L_0} c(\sigma) d\sigma$$

Проекции скорости в точках области $ABCD$, не принадлежащих контуру профиля L_0 , определяются квадратурой по контуру L_0 [1]

$$(2.4) \quad c_x(x, y) = \frac{1}{2} (c_{1x} + c_{2x}) - \frac{1}{2t} \int_{L_0} c(\sigma) \frac{\operatorname{sh}[2\pi(y-\eta)/t] d\sigma}{\operatorname{ch}[2\pi(y-\eta)/t] - \cos[2\pi(x-\xi)/t]}$$

$$(2.5) \quad c_y(x, y) = \frac{1}{2} (c_{1y} + c_{2y}) + \frac{1}{2t} \int_{L_0} c(\sigma) \frac{\sin[2\pi(x-\xi)/t] d\sigma}{\operatorname{ch}[2\pi(y-\eta)/t] - \cos[2\pi(x-\xi)/t]}$$

С использованием формулы Симпсона уравнение (2.2) сводится к системе линейных алгебраических уравнений в расчетных точках контура

и совместно с граничным условием $|c_E| = |c_P|$ решается матричным методом.

В результате решения интегрального уравнения (1.2) течения несжимаемой жидкости получается распределение скорости $c(s)$ на контуре профиля и положение передней критической точки K (фиг. 1). В сечениях $y=\text{const}$ внутри межлопаточного канала вычисляется функция тока

$$\psi(x, y) = \int c_y(x, y) dx$$

Линии тока (линии расчетной сетки) проводятся через точки $x(y)$ с одинаковыми величинами функций тока $\psi(x, y) = \text{const}$, изменяющимися между линиями на постоянную величину $\Delta\psi$. В области $KABK_0$ перед решеткой линии тока $x=x(y)$ строятся интегрированием их дифференциальных уравнений. Первый шаг интегрирования от критических точек K, K_0 производится по нормали к контуру профиля.

В области ABK_0REK проводятся ортогонали к линиям тока. Выходная кромка заостряется.

В области $ERCD$ строится геометрическая сетка. Криволинейная сетка, построенная в области $ABCD$, близка к ортогональной (1.1), за исключением нескольких ячеек в окрестностях входной и выходной кромок, и используется для дальнейшего расчета течения газа в решетке методом установления.

Для начального приближения в центрах ячеек по формулам (2.4), (2.5) определяются проекции скорости течения c_x, c_y . С использованием интеграла Бернулли вдоль линий тока и уравнения изэнтропического процесса в центрах ячеек определяются безразмерные давление и плотность.

3. В методе установления рассматривается обтекание плоской решетки профилей потоком невязкого нетеплопроводного газа. Система уравнений неразрывности, движения и энергии в форме интегральных законов сохранения имеет вид

$$(3.1) \quad \frac{d}{dt} \iint_{\omega} a dx dy + \int_{\gamma} (b dy - c dx) = 0$$

$$a = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \lambda_x \\ \rho \lambda_y \\ \rho (2e + \lambda^2) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \rho \lambda_x \\ p + \rho \lambda_x^2 \\ \rho \lambda_x \lambda_y \\ \rho (2i + \lambda^2) \lambda_x \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \rho \lambda_y \\ \rho \lambda_x \lambda_y \\ p + \rho \lambda_y^2 \\ \rho (2i + \lambda^2) \lambda_y \end{pmatrix}$$

$$e = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho}, \quad i = e + \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}$$

Здесь ω — произвольная элементарная площадка (ячейка сетки) в плоскости x, y ; γ — неподвижная граница ячейки. Коэффициенты a, b и c содержат безразмерные плотность, давление, внутреннюю энергию и энталпию соответственно:

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_*}, \quad p' = \frac{p}{\rho_* a_*^2}, \quad e' = \frac{e}{a_*^2}, \quad i' = \frac{i}{a_*^2}$$

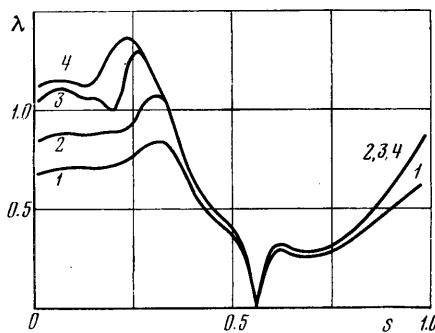
время отнесено к t/a_* , линейные размеры — к шагу решетки t ; ρ_* , a_* — критические плотность, скорость течения. В системе уравнений (3.1) и ниже верхний индекс над относительными параметрами опущен.

В прямой задаче на границах области $ABCD$ задаются следующие условия. В сечении AB перед решеткой заданы полная энталпия и энтро-

ния

$$i_1^* = i_1 + \frac{\lambda_1^2}{2}, \quad s_1 = \left(\frac{p}{\rho^k} \right)_1$$

и угол набегающего потока газа с фронтом решетки α_1 . На контуре профиля KET , $K_0P_0T_0$ выдерживается условие непротекания. В сечении CD за решеткой задается постоянное по фронту решетки статическое давление p_2 . На границах BK_0 и AK , а также на TD и T_0C выполняется условие периодичности течения. Для этого к границам AK , BK_0 и TD , T_0C присое-



Фиг. 2

диняются дополнительные ячейки и параметры газа в них переносятся вдоль фронта решетки из внутренних ячеек расчетной области на расстояние шага t . Для принятой заостренной выходной кромки условие $|c_E| = |c_P|$ не используется. Однако [3] в процессе установления автоматически вырабатывается решение, с достаточной точностью удовлетворяющее этому условию и согласующееся с экспериментальными данными.

Нестационарная система уравнений (3.1) численно интегрируется по времени с использованием явной конечно-разностной схемы первого порядка точности [2]. Потоки массы, количества движения и энергии через все границы ячеек определяются из задачи распада произвольного одномерного разрыва. Интегрирование системы (3.1) по времени осуществляется до тех пор, пока параметры течения в области $ABCD$ в пределах заданной точности перестают зависеть от времени (установление решения). Особенности метода и постановки задачи подробно описаны в работе [3].

4. В качестве примера было рассчитано течение в решетке турбины (фиг. 3) при нулевом угле атаки набегающего потока для различных значений приведенной скорости газа за решеткой $\lambda_2 = 0.68, 0.85, 1.04, 1.13$.

Режим течения в решетке при счете методом установления определяется двумя параметрами: углом потока газа перед решеткой α_1 и давлением за решеткой p_2 , соответствующим приведенной скорости λ_2 . При этом величина безразмерной скорости течения несжимаемой жидкости c_1 перед решеткой в методе интегрального уравнения (2.2) может быть определена (из условия равенства расходов перед и за решеткой) как для несжимаемой жидкости, так и для сжимаемого газа. В первом случае

$$(4.1) \quad c_1 = \lambda_2 \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_{1c}}$$

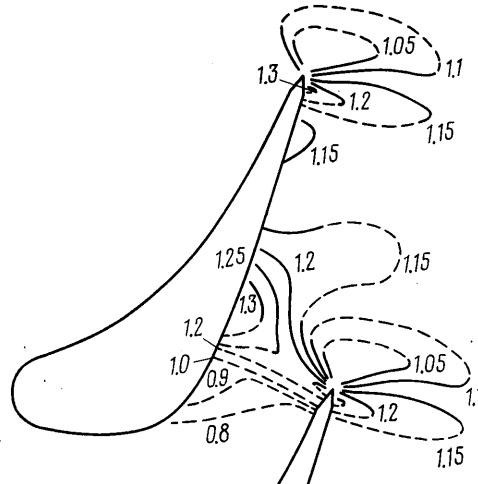
и скорость течения несжимаемой жидкости в начальном приближении будет совпадать с приведенной скоростью газа за решеткой $c_2 = \lambda_2$. Во втором случае

$$(4.2) \quad q(c_1) = q(\lambda_2) \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_{1c}}$$

где $q(\lambda) = \rho c / (\rho_* a_*)$ — приведенная плотность тока, и скорость течения несжимаемой жидкости в начальном приближении будет совпадать с приведенной скоростью газа перед решеткой $c_1 = \lambda_1$.

Как показали расчеты, в первом случае обеспечивается более быстрый выход решения на стационарный режим. Поэтому начальное приближение и расчетная решетка строились соответственно для значений безразмерной скорости c_1 по формуле (4.1).

Вследствие линейности задачи о течении несжимаемой жидкости расчетная сетка для всех значений c_1 при $\alpha_{ic} = \text{const}$ одинаковая. Входное AB и выходное CD се-



Фиг. 3

чения располагались на расстоянии порядка 0.6 шага решетки. Сетка содержала 16×67 узлов.

Автоматическое построение сетки и начального приближения требует на ЭВМ типа БЭСМ-6 порядка 5 мин.

На фиг. 2 представлено расчетное распределение приведенной скорости λ по контуру профиля для четырех режимов течения. Уже при $\lambda_2 = 0.85$ (кривая 2) звуковая линия пересекает межлопаточный канал и при дальнейшем увеличении λ_2 изменение скорости обтекания происходит только в косом срезе решетки. При увеличении λ_2 до 1.04 и 1.13 (кривые 3, 4) косой скачок уплотнения, падающий на выпуклую сторону профиля от выходной кромки соседнего профиля, перемещается к выходной кромке. В принципе возможное изменение координаты передней критической точки К при изменении λ_2 в проведенных расчетах для данной сетки в области входной кромки обнаружено не было. Ниже приведены максимальные относительные погрешности в вычислении энтропии s и полной энталпии i^* для ячеек сетки, находящихся в ядре потока и относительные погрешности в выполнении интегрального закона сохранения расхода G для контура $ABCD$:

λ_2	0.68	0.85	1.04	1.13
$\Delta s, \%$	1.2	1.9	2.6	3.2
$\Delta i^*, \%$	0.3	0.4	0.37	0.45
$\Delta G, \%$	0.8	0.7	0.7	0.7

Точность выполнения интегрального закона сохранения практически не зависит от режима течения. Погрешность в вычислении энтропии Δs отражает «вязкостные» члены в уравнениях движения, возникающие при аппроксимации исходной системы уравнений, и возрастание энтропии в скачках уплотнения. Она возрастает с повышением λ_2 .

Погрешности Δs , Δi^* возрастают в ячейках, примыкающих к контуру профиля, особенно в области входной и выходной кромок. Погрешность в вычислении угла выхода потока из решетки в сечении CD $\Delta\alpha_2$ не превосходила 0.5° .

На фиг. 3 представлены изолинии $\lambda(x, y) = \text{const}$ при $\lambda_2 = 1.13$. Сплошные линии соответствуют торможению потока, штриховые — его разгону. Видно положение кромочных скачков, а также степень их «размазывания».

Общее время счета определяется временем установления. При выборе c_1 по формуле (4.1) время счета не зависит от λ_2 и связано в основном с густотой сетки.

В проведенных расчетах оно составляло примерно 60 мин на БЭСМ-6 при точности установления по приведенной скорости $\Delta\lambda=0.005$.

Авторы признательны А. Н. Крайко за предложение темы работы и постоянное к ней внимание и Г. Ю. Степанову за внимание и советы.

Поступила 19 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Курманов Б. И., Подвидз Г. Л., Степанов Г. Ю. Расчет двумерного течения газа в решетках турбомашин методом интегральных уравнений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 4.
2. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., «Наука», 1976.
3. Богод А. Б., Грановский А. В., Иванов М. Я. Численное исследование некоторых особенностей трансзвуковых течений в плоских турбинных решетках. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 2.
4. Жуковский М. И. Аэродинамический расчет потока в осевых турбомашинах. Л., «Машиностроение», 1967.
5. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
6. Ives D. C., Liutermoz J. F. Analysis of transonic cascade flow using conformal mapping and relaxation techniques. AIAA Journal, 1977, vol. 15. No. 5.
7. Фрит. Течение вязкой жидкости через решетку толстых изогнутых профилей, ч. 1, 2. Энергетические машины и установки. Тр. amer. об-ва инж.-мех. Сер. А, 1973, т. 95, № 3.