

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ
С ОСТРЫМ КОНУСОМ**

Ю. М. ЛИПНИЦКИЙ, А. В. ПАНАСЕНКО

(Москва)

Работа посвящена численному исследованию нестационарного осесимметричного течения, возникающего при взаимодействии ударной волны с неподвижным острым конусом. Решение получено в автомоделных координатах для режимов, при которых в спутном потоке газа возникает присоединенный к вершине конуса стационарный скачок уплотнения. Определена область существования указанных режимов течения и с помощью метода установления рассчитаны газодинамические функции в возмущенной области. Основное внимание уделено изучению перехода от регулярного отражения к маховскому, рассмотрению особенностей двойного маховского отражения и сопоставлению результатов для осесимметричного и плоского случаев. Распределения давлений вдоль поверхности конуса приведены в виде, обеспечивающем получение зависимостей, справедливых в широком диапазоне изменения интенсивностей падающей ударной волны и при различных значениях показателя адиабаты газа.

1. Определяющими параметрами задачи являются: число Маха набегающей ударной волны M ($M \geq M^* > 1$, при $M = M^*$ возникает присоединенный к вершине конуса стационарный скачок уплотнения); угол полураствора конуса θ , и показатель адиабаты газа $\gamma = C_p/C_v$. Свойства решения в значительной степени зависят от характера взаимодействия падающей ударной волны с поверхностью конуса и от режима течения в окрестности его вершины.

На фиг. 1 для различных значений γ в плоскости M_1, θ , построены: кривые 1, ограничивающие слева область, где возможно регулярное отражение (по таблицам [1]); кривые 2 и 3, отделяющие справа область изменения параметров, в которой реализуется режим течения для конуса и клина с присоединенным скачком уплотнения. Пунктиром нанесено предельное значение M_1^* числа Маха M_1 спутного потока за падающей ударной волной

$$M_1 = (M^2 - 1) [(\gamma M^2 - 1/2)(\gamma - 1) (1 + 1/2 M^2 (\gamma - 1))]^{-1/2},$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M_1 = M_1^* = \sqrt{2} [\gamma(\gamma - 1)]^{-1/2}$$

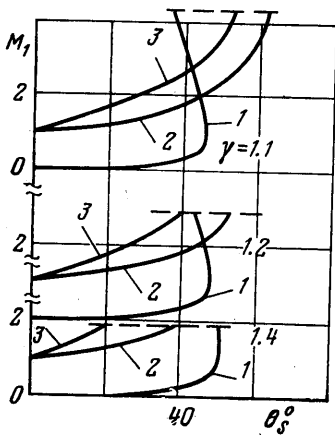
Как видно из рассмотрения фиг. 1, возможны четыре режима течения: 1 — отраженная ударная волна присоединена к вершине конуса при регулярном характере взаимодействия падающей ударной волны с его поверхностью; 2 — отраженная ударная волна присоединена к вершине при нерегулярном характере взаимодействия; 3 — отраженная ударная волна является отошедшей от вершины конуса при регулярном характере взаимодействия с его поверхностью; 4 — отраженная ударная волна является отошедшей при нерегулярном характере взаимодействия.

Следует отметить, что около конуса и клина возникают схожие типы течения, имеющие, однако, разную протяженность в плоскости M_1, θ .

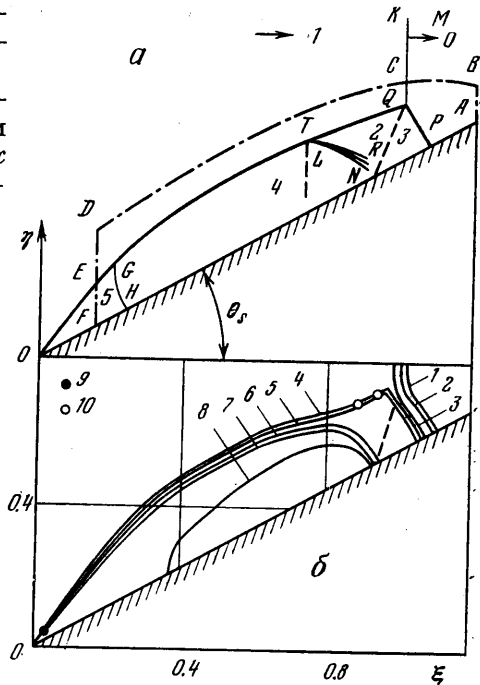
В частности, первый режим течения для клина наступает при меньших значениях γ , нежели для конуса, и имеет более узкую область существования. В этой связи наибольшего отличия в результатах исследования осесимметричного и плоского [2] автомодельных течений газа следует ожидать там, где при одних и тех же γ , θ_s , M течения принадлежат к разным типам.

2. Постановку задачи дадим на примере второго режима течения, как наиболее распространенного и более сложного для расчета, поскольку в этом случае помимо падающей и отраженной ударных волн KQ ; QEO (фиг. 2, а) возникают преломленная ударная волна QP , контактный разрыв QR и внутренняя ударная волна TL . Правильность такой схематизации течения подтверждает полученная в расчете картина изобар для $M=5$, $\theta_s=30^\circ$, $\gamma=1.4$ (фиг. 2, б). Возникающие в потоке газа ударные волны определяются по характерному сгущению изобар.

Решение получим в цилиндрической системе координат с началом в вершине конуса. Продольную ось x направим по линии симметрии. В ав-



Фиг. 1



Фиг. 2

томодельных координатах $\xi=x/tD$, $\eta=r/tD$ уравнения газовой динамики представим в виде

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega_1 + \frac{\partial}{\partial \eta} \Omega_2 + X = 0$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} M\rho \\ M^2 + p\rho \\ MN \\ M(E+p) \end{vmatrix}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} N\rho \\ MN \\ N^2 + p\rho \\ N(E+p) \end{vmatrix},$$

$$X = \frac{1}{\eta\rho} \begin{vmatrix} 3\eta\rho^2 + N\eta \\ M(4\eta\rho + N) \\ N(4\eta\rho + N) \\ E_1 \end{vmatrix}$$

$$M = \rho(u - \xi), \quad N = \rho(v - \eta), \quad E = p/(\gamma - 1) + (M^2 + N^2)/2\rho$$

$$E_i = (E + p)(3\eta\rho + N) + (M^2 + N^2)\eta$$

Здесь x, r — цилиндрические координаты; t — время; $D = Ma_0$ — скорость падающей на конус ударной волны; $\rho = \rho^*/\rho_0$ — плотность газа; $u = u^*/D$, $v = v^*/D$ — скорости газа по осям координат x, r соответственно; $a = a^*/D$ — скорость звука; $p = p^*/\rho_0 D^2$ — давление в газе; индекс 0 относится к невозмущенным параметрам газа перед ударной волной.

Можно показать, что система дифференциальных уравнений (2.1) относится к смешанному эллиптико-гиперболическому типу и является неудобной для непосредственного численного интегрирования. Поэтому при переходе от x, r, t к автомодельным переменным ξ, η сохраним в дифференциальных уравнениях t и применим хорошо себя зарекомендовавший метод установления решения по гиперболической переменной $\tau = \ln t$ со «сквозным расчетом» разрывов газодинамических функций, т. е. без их выделения в поле течения [2]. При этом в систему уравнений (2.1) добавляется выражение $\partial f / \partial \tau$, где $f' = |\rho M N E|$.

Граничные условия ставятся естественным образом. На контуре ABC (фиг. 2) задаются параметры невозмущенного потока ($f = f_0$), на CDE — параметры за падающей ударной волной ($f = f_1$), на EF — параметры известного стационарного обтекания ($f = f_s$). На поверхности тела FA задается условие равенства нулю нормальной составляющей скорости газа.

Поскольку применяется метод установления решения, то начальное распределение газодинамических функций во внутренних точках расчетного поля достаточно произвольно. В настоящих расчетах во всей области за ударной волной KCQ и ее продолжением вплоть до поверхности тела задавались параметры $f = f_1$, перед ударной волной — параметры $f = f_0$.

В отличие от [2] для отслеживания геометрии внешних ударных волн введем преобразование независимых переменных

$$(2.2) \quad \xi' = \xi, \quad \eta' = \frac{\eta - \xi \operatorname{tg} \theta_*}{\eta_1(\xi) - \xi \operatorname{tg} \theta_*}, \quad \tau' = \tau$$

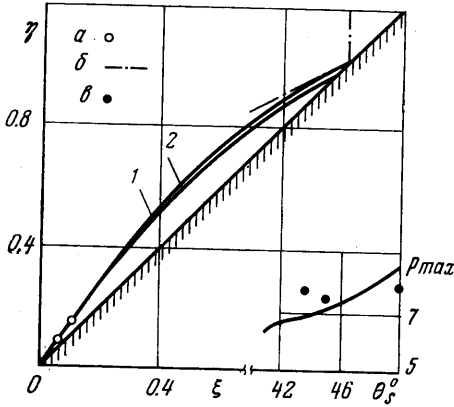
где $\eta_1(\xi)$ — задаваемая верхняя граница разностной сетки (DCB , фиг. 2). При этом в окончательных формулах для ускорения процесса установления параметров газа во всем поле течения произведем замену временного оператора $(\eta_1(\xi) - \xi \operatorname{tg} \theta_*)(\partial / \partial \tau')$ на $(\partial / \partial \tau')$, что возможно ввиду автомодельности задачи. В результате обеспечивается равномерное установление решения в расчетной области по итерационной переменной τ' . Интегрирование полученной таким образом системы дифференциальных уравнений осуществим с помощью явной 9-точечной разностной схемы второго порядка точности [3-4] с оператором сглаживания, аналогичным [5].

Заметим, что решение задачи методом установления в переменных ξ, η, τ (в отличие от x, r, t) позволяет достаточно хорошо проработать внутреннюю структуру течения. Имеющиеся расчеты показывают¹, что при таком же количестве узлов разностной сетки в переменных x, y, t можно получить качественное расхождение с [2] по давлению на участке NP (фиг. 2). Это связано с тем, что проработка движущейся в пространстве сложной внутренней структуры ударных волн и контактных разрывов в переменных x, y, t требует увеличения числа узлов разностной сетки (что не всегда возможно) в отличие от используемого в данной работе подхода. Сравнение же результатов [2] с имеющимися эксперименталь-

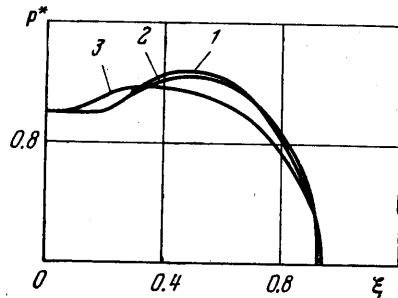
¹ Буланов В. В. Численный метод расчета нестационарных двумерных течений с ударными волнами. Канд. дис. М., МФТИ, 1977.

ными данными [6] свидетельствует о достаточно высокой точности решения в переменных ξ , η , τ .

3. При расчете течений первого типа возмущенная область расположена между конусом и отраженной ударной волной, присоединенной к нему в его вершине и в точке встречи с его поверхностью. Это обстоятельство дает возможность за счет соответствующего выбора $\eta_1(\xi)$ построить разностные сетки, которые при минимальном количестве узлов в расчетной области позволяют получить решение хорошего качества.



Фиг. 3



Фиг. 4

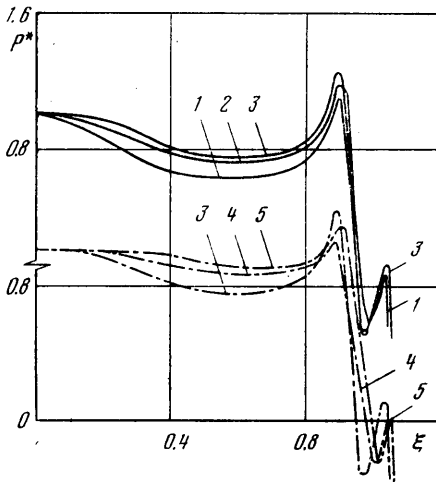
На фиг. 3 для случая $M=20$, $\theta_s=45^\circ$ и $\gamma=1.2$ представлены изобары (кривая 1 — $p=1.27$, 2 — $p=5.55$), позволяющие судить о положении и форме отраженной ударной волны. Точками *a* показан стационарный скачок уплотнения, взятый из решения [7]. Линиями *b* изображены падающая ударная волна и направление отраженного ударного фронта, рассчитанное по теории регулярного отражения [1]. Следует отметить хорошее соответствие между численным и аналитическим решениями. В частности, для $\theta_s=45-50^\circ$ угол отражения ω_2 по геометрии изобар определяется соответственно величинами $\omega_2=15-21^\circ$ и $\omega_2=10-13^\circ$. Значения же ω_2 по теории регулярного отражения составляют для $\theta_s=45^\circ - \omega_2=20.17^\circ$ и для $\theta_s=50^\circ - \omega_2=13.16^\circ$.

Расчеты с регулярным отражением ударной волны проводились при $M=20$, $\gamma=1.2$ и $\theta_s \sim \theta_{s*}$ (при $\theta_s \geq \theta_{s*}$ возможно регулярное отражение по [1], когда имеет место режим взаимодействия с сильным изменением газодинамических функций в окрестности точки падения). Характер поведения p в этой области аналогичен случаю взаимодействия ударной волны с клином, а максимальные значения давления на поверхности конуса p_{\max} при $\theta_s \geq \theta_{s*}$ хорошо соответствуют теории регулярного отражения.

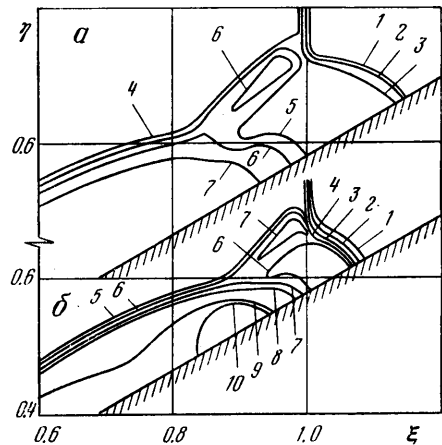
На фиг. 3 в правом нижнем углу приведена расчетная зависимость $p_{\max}(\theta_s)$. Там же точками *b* обозначены значения давления p_{\max} по [1]. Представленные на фиг. 4 распределения функции давления $P^* = (p - p_3) / (p_5 - p_3)$ (p_5 — давление на поверхности конуса за присоединенным к его вершине скачком уплотнения, $p_3 = p_{\max}$ — взятое из расчета давление за отраженной ударной волной) для 1 — $\theta_s=43^\circ$, 2 — $=45^\circ$, 3 — $=50^\circ$ близки между собой.

При уменьшении θ_s реализуется второй тип течения (фиг. 1), который характеризуется возникновением внутренней ударной волны и связанного с этим двойного маховского отражения. Для иллюстрации удовлетворительного качества получения общей картины взаимодействия ударной волны с конусом на фиг. 2, б представлены изобары для случая $M=5$, $\theta_s=30^\circ$, $\gamma=1.4$. Точкой *g* нанесено положение стационарного присоединен-

ного к вершине конуса скачка уплотнения [7], а точками 10 и пунктиром показано соответственно положение отраженной ударной волны и контактного разрыва по элементарной теории маховского отражения, в которой ударные волны предполагаются прямолинейными, а преломленная ударная волна — перпендикулярной поверхности конуса [4]. Видно, что элементарная теория маховского отражения удовлетворительно соответствует численному решению, которое обладает хорошим качеством. В окрестности пересечения контактного разрыва, исходящего из первой тройной точки с поверхностью конуса образуется еще одна ударная волна, вызы-



Фиг. 5



Фиг. 6

вающая дополнительное повышение давления (двойное маховское отражение). Номерам изобар 1–8 соответствуют следующие значения давления: 0.3296; 0.432; 0.732; 1.032; 1.132; 1.332; 1.436; 1.636.

На фиг. 5 приведено распределение функции давления по поверхности конуса P^* для $\theta_s = 30^\circ$. Сплошные линии 1–3 соответствуют $\gamma = 1.4$ и следующим числам M : 5, 10, 20, а штрихпунктирные линии 3–5 построены для $M = 20$ и следующих значений γ : 1.4, 1.3, 1.2. Давления за преломленной ударной волной удовлетворительно совпадают со значениями, полученными по элементарной теории маховского отражения, которые при построении кривых 1–3 выбраны в качестве p_3 . При построении кривых 4, 5 в качестве p_3 выбраны расчетные значения давления ($4 - p_3 = 1.34$, $5 - p_3 = 1.375$).

Следует отметить, что на фиг. 5 в районе $\xi = 1$ имеет место незначительная осцилляция решения, обусловленная свойствами разностной схемы и количеством узлов по ξ и η . На используемых разностных сетках такой ход кривых $p(\xi)$ практически неизбежен. Поэтому для получения значения p_3 из численного расчета необходимо привлечение анализа поля изобар, что позволяет достаточно надежно определить давление p_3 . Так, например, для $M = 5$, $\theta_s = 30^\circ$ и $\gamma = 1.4$ значение давления p_3 , полученное из численного расчета с привлечением анализа поля изобар, — 1.28, а из элементарной теории маховского отражения следует $p_3 = 1.308$. Разница между этими значениями не превышает 3%.

По мере уменьшения θ , при фиксированных M и γ вторая внутренняя ударная волна (TN , фиг. 2, а) переходит в волну сжатия, а двойное маховское отражение — в простое маховское отражение. Распределение $p(\xi)$ по поверхности конуса при этом слабо отличается от давления p_3 , за

исключением непосредственной окрестности $\xi=1$, в которой и осуществляется переход к уровню давления за преломленной ударной волной. В частности, такой ход кривых $p(\xi)$ наблюдается для $\theta_s=15$ и 10° , при $\gamma=1.2$, $M=20$, что иллюстрируется данными, приводимыми ниже:

θ_s°	ξ	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	1.0	1.05
10	p	1.288	1.3	1.308	1.312	1.32	1.325	1.312	1.275	1.208	0.875	1.01
15	p	1.675	1.65	1.625	1.612	1.597	1.575	1.562	1.55	1.545	0.8375	1.088

Для всех проведенных расчетов характерно наличие второго подъема давления в районе пересечения поверхности конуса с контактным разрывом, исходящим из первой тройной точки (изобары схожи с приведенными на фиг. 2, б). При этом кривые для различных чисел M и одинаковых θ_s хорошо согласуются между собой в координатах ξ , P^* . Поэтому для определения распределения давления по поверхности конуса (клина) для первого или второго типов течения за основу можно взять отмеченный факт слабой зависимости $P^*(\xi)$ от M и γ (воспользовавшись, например, кривой $P^*(\xi)$ для $\gamma=1.4$, $M=10$ до $\xi \approx 0.9$; при $\xi > 0.9 - p = p_s$, при $\xi \gtrsim 1.14 - p = p_0$).

Кроме того, для всех рассчитанных вариантов максимальный уровень давления в возмущенной области оказался близок к давлению за стационарным скачком уплотнения, присоединенным к вершине конуса. Отмеченное обстоятельство является, по всей видимости, общим свойством течений первого и второго типа.

При сравнении результатов настоящих исследований с известными и вновь полученными по изложенному алгоритму расчетами взаимодействия ударной волны с клином отмечено, что для одинаковых M , θ_s и γ при совпадении типов течения имеют место отличия, связанные с тем, что около клина отход отраженной ударной волны больше и преломленная волна изгибается, в то время как в случае конуса она практически прямолинейна. Сказанное иллюстрирует фигура 6, где представлены изобары для клина (а) и конуса (б). Номера изобар для клина 1-7 соответствуют следующим значениям давления: 0.2; 0.35; 0.752; 0.952; 1.302; 1.855; 3.125. В случае конуса номерам изобар 1-10 соответствуют значения давления: 0.186; 0.37; 0.737; 0.922; 1.015; 1.107; 1.475; 1.842; 3.125; 3.325. При этом функции давления $P^*(\xi)$ на поверхности клина и конуса за внутренней ударной волной близки между собой:

	ξ	0.6	0.7	0.8	0.85	0.9	1.0	1.05	1.25
Конус	P^*	0.9	0.88	0.92	0.99	1.13	-0.2	0.01	-
Клин	P^*	0.75	0.74	0.78	0.88	0.89	-0.07	-0.33	0.01

За p_s здесь взяты расчетные значения давления: для клина $-p_s=1.55$, для конуса $-p_s=1.375$.

В тех случаях, когда режимы течения для конуса и клина различны, наблюдаются большие отличия в характере распределения давления. В качестве примера были рассмотрены течения, возникающие при взаимодействии ударной волны с клином [2] и конусом при $\gamma=1.4$, $M=3$, $\theta_s=20^\circ$. Результаты по распределению давления вдоль поверхности тел представлены ниже:

	ξ	0	0.141	0.235	0.329	0.423	0.517	0.752	0.846	0.939	0.987	1.06
Клин	p	2.18	1.5	1.42	1.38	1.34	1.31	1.28	1.27	1.15	1.15	1.15
Конус	p	1.275	1.21	1.16	1.13	1.11	1.1	1.11	1.14	1.04	1.04	0.0793

Поступила 29 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Г. М., Карчевский Л. В. Отраженные ударные волны. М., «Машиностроение», 1973.
2. Липницкий Ю. М., Ляхов В. Н. Численное решение задачи дифракции ударной волны на клине. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.

3. Каширский А. В., Коровин Ю. В., Чудов Л. А. Явный разностный метод для расчета двумерных нестационарных задач о движении продуктов детонации. В сб. Вычисл. методы и программирование, вып. 19. М., Изд-во Моск. ун-та, 1972.
 4. Балакин В. Б., Буланов В. В. Численное решение задачи о взаимодействии ударной волны с цилиндром в сверхзвуковом потоке. Инж.-физ. ж., 1971, т. 21, № 6.
 5. Ляхов В. Н. Сглаживание и искусственная вязкость при расчетах двумерных нестационарных течений с разрывами. В сб. Числ. методы мех. сплошной среды, т. 5, № 3. Новосибирск, 1974.
 6. Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М., «Наука», 1977.
 7. Бачманова Н. С., Лапыгин В. И., Липницкий Ю. М. Исследование сверхзвукового обтекания круговых конусов на больших углах атаки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6.
-