

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ  
ПРИ НИЗКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

В. Я. ЛЕВИН, В. Е. НИГОДЮК, У. Г. ПИРУМОВ,  
О. И. ФИРСОВ, С. А. ШУСТОВ

(Москва, Куйбышев)

В различных областях науки и техники широко используются сопла Лавалья, течения в которых характеризуются низкими числами Рейнольдса. В связи с этим возникает необходимость определения как локальных параметров потока в сопле — давления  $p$ , температуры  $T$ , числа Маха  $M$  и т. д., так и интегральных характеристик сопла — коэффициента полноты удельного импульса в пустоте  $\varphi$ , коэффициента расхода  $\mu_c$ , коэффициента полноты тягового комплекса  $\xi$  с учетом влияния вязкости.

В работе [1] для определения параметров потока в гиперзвуковом сопле использовался численный метод расчета течения вязкого газа в приближении узкого канала [2], однако определение таких интегральных характеристик потока, как  $\varphi$ ,  $\mu_c$  и  $\xi$  не проводилось, а расчет локальных параметров потока велся без учета скольжения скорости и скачка температуры на стенке сопла.

Использование для расчетного определения интегральных характеристик маломерных сопел модели течения в приближении пограничного слоя не привело к удовлетворительным результатам [3], в связи с чем эти характеристики до настоящего времени определяются в основном экспериментально [4, 5].

В настоящей работе метод [2] использован для численного исследования как локальных, так и интегральных параметров течения вязкого газа в сопле Лавалья.

Результаты расчета удовлетворительно согласуются как с результатами проведенного в работе экспериментального исследования, так и с экспериментальными данными других авторов.

1. Приближение узкого канала предполагает, что радиальная компонента скорости мала в сравнении с продольной и что продольные градиенты скорости и температуры малы в сравнении с поперечными. Уравнения Навье — Стокса в этом приближении имеют вид [2]

$$(1.1) \quad P \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta^j W}{\Theta} \right) + \sigma_w \eta^j \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{PU}{\Theta} \right) + (1+j) \sigma_w' \frac{PU \eta^j}{\Theta} = 0$$

$$(1.2) \quad \frac{P}{\Theta} \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{W}{\sigma_w} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\text{Re} \eta^j \sigma_w^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^j \Theta^\circ \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)$$

$$(1.3) \quad \frac{P}{\Theta} \left( U \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{W}{\sigma_w} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) = \frac{\gamma-1}{\gamma} U \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\text{Re} \eta^j \sigma_w^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta^j \Theta^\circ}{\text{Pr}} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) + \frac{2\Theta^\circ}{\text{Re} \sigma_w^2} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2$$

$$(1.4) \quad P = D\Theta, \quad \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0$$

Здесь и далее  $j=0$  соответствует случаю плоского течения газа,  $j=1$  — случаю осесимметричного течения.

В качестве граничных условий на стенке для продольной скорости бралось граничное условие скольжения, а для температуры — условие

отсутствия теплового потока

$$(1.5) \quad U|_{\eta=1} = -\frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi\gamma}{\gamma-1} \operatorname{Re} P \sigma_w} \left( \Theta|_{\eta=1} \right)^{\omega+0.5} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{\eta=1}$$

$$(1.6) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\Theta}{\operatorname{Pr}} + U^2 \right)_{\eta=1} = 0$$

Кроме того, считались равными нулю преобразованная поперечная скорость  $W$  на стенке сопла и на оси потока, а также производные  $\partial U/\partial \eta$  и  $\partial \Theta/\partial \eta$  на оси потока. Необходимые для решения начальные условия задавались вверх по потоку от минимального сечения сопла. Их получение было связано с определением заранее неизвестного расхода, что наряду с неизвестным распределением давления вдоль оси сопла является одной из особенностей данной задачи.

Уравнения (1.1)–(1.6) записаны в безразмерном виде для прямоугольной области  $(x, \eta)$ , которая получается преобразованием исходной цилиндрической, для  $j=1$ , или декартовой, для  $j=0$ , системы координат  $z, r$ . Безразмерные величины определяются следующим образом:

$$P = \frac{p}{p_0}, \quad D = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \Theta = \frac{h}{h_0}, \quad U = \frac{u}{\sqrt{2h_0}}$$

$$W = \frac{v - u\eta\sigma_w'}{\sqrt{2h_0}}, \quad \operatorname{Re} = \frac{\rho_0 \sqrt{2h_0} r^*}{\mu_0}, \quad \operatorname{Pr} = \frac{\mu_0 c_p}{\lambda_0}$$

$$x = \frac{z}{r^*}, \quad \eta = \frac{\sigma}{\sigma_w}, \quad \sigma = \frac{r}{r^*}, \quad \sigma_w' = \frac{d\sigma_w}{dx}$$

Здесь и в системе (1.1)–(1.6) использованы следующие обозначения:  $u$  – продольная компонента скорости;  $v$  – поперечная компонента скорости;  $\omega$  – показатель степени в зависимости динамического коэффициента вязкости  $\mu$  от энтальпии  $h$ ;  $\rho$  – плотность;  $r$  – радиус сопла;  $\gamma$  – отношение удельных теплоемкостей  $c_p$  и  $c_v$ ;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\operatorname{Re}$  – число Рейнольдса;  $\operatorname{Pr}$  – число Прандтля;  $\alpha$  – коэффициент аккомодации для скорости;  $\psi$  – угол наклона стенки сопла к оси. Индекс 0 относится к параметрам в форкамере сопла, индекс \* – к параметрам в минимальном сечении сопла,  $w$  – к параметрам на стенке сопла.

2. Для численного решения системы уравнений (1.1)–(1.6) использовалась неявная 6-точечная симметричная разностная схема Крэнка – Никольсона. Область течения покрывалась разностной сеткой, равномерной по  $\eta$  и сгущающейся по  $x$  в районе минимального сечения сопла. Как во внутренних, так и в граничных точках производные аппроксимировались со вторым порядком точности.

В решении существует особая точка типа седла там, где поток становится в интегральном смысле сверхзвуковым и выполняется условие

$$(2.1) \quad \int_0^1 \frac{1-M^2}{M^2} \eta^j d\eta = 0, \quad M^2 = \frac{2U^2}{(\gamma-1)\Theta}$$

Для определения расхода и для прохождения особой точки применялся метод пристрелки, описанный в [2]. При этом использовалось уравнение для трубки тока, разрешенное относительно градиента давления

$$(2.2) \quad \frac{dP}{dx} = \left\{ \gamma P \sigma_w' + \frac{2\gamma}{(\gamma-1) \operatorname{Re} \sigma_w} \int_0^1 \frac{1}{M^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^j \Theta^\omega \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) - \right. \right.$$

$$-\frac{U}{\Theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta^j \Theta^{\omega}}{\text{Pr}} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) + 2\eta^j \Theta^{\omega} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\eta \left\{ \sigma_w \int_0^1 \frac{1-M^2}{M^2} \eta^j d\eta \right\}^{-1}$$

правая часть которого в особой точке представляет собой неопределенность вида 0/0.

Система разностных уравнений движения и энергии может быть решена на каждом шаге по  $x$  методом скалярной прогонки, если задан градиент давления, который считается постоянным на длине шага  $h_x$ . Заметим, что заданный градиент давления  $P' = dP/dx$  определяет и давление на новом  $(n+1)$ -м шаге

$$(2.3) \quad P^{n+1} = P^n + P' h_x$$

Для того чтобы правильно выбрать градиент давления, нужно использовать некоторое дополнительное к системе (1.1)–(1.6) условие. В районе особой точки таким условием для определения градиента давления служит условие разрешения неопределенности правой части уравнения (2.2), в остальной части сопла – условие сохранения расхода:

$$(2.4) \quad A = \text{const}, \quad A = P \sigma_w \int_0^1 \frac{U \eta^j}{\Theta} d\eta$$

Методика определения градиента давления при условии сохранения расхода заключается в следующем. Будем считать процедуру решения системы уравнений (1.1)–(1.6), (2.3) и второго соотношения (2.4) «черным ящиком». Подавая на вход «черного ящика» различные значения градиента давления и снимая с выхода значения безразмерного расхода  $A$ , можно получить зависимость  $A = f(P')$ .

В координатах  $(P', A)$  искомый градиент давления определяется абсциссой точки пересечения прямой  $A = \text{const}$  и кривой  $A = f(P')$ . Чтобы найти координаты точки пересечения, используется так называемый метод секущих. Для каждого последующего приближения зависимость  $A = f(P')$  заменяется уравнением прямой, проходящей через точки, соответствующие двум предыдущим приближениям. В первых двух приближениях используются величины градиента давления, близкие к величине градиента давления на предыдущем шаге.

При счете в районе особой точки на вход «черного ящика» подается по-прежнему значение градиента давления, а с выхода снимаются значения числителя и знаменателя правой части уравнения (2.2). Решение строится так, чтобы их отношение оставалось равным  $\text{const}/\sigma_w$ .

Контроль правильности решения осуществлялся с помощью нескольких интегральных проверок, для которых использовались уравнения сохранения массы, количества движения и энергии в интегральной форме.

3. Для проведения экспериментального исследования сопел использовалась установка, представляющая собой вакуумную барокамеру, в которой на ножевых призмах подвешено тягоизмерительное устройство с чувствительностью  $10^{-5}$  н на 1 мм шкалы. Система вакуумирования обеспечивала безотрывное течение в соплах на установившемся режиме при геометрической степени расширения сопла  $F \leq 100$ , где  $F = (r_w/r_*)^2$ .

Давление торможения на входе в сопло изменялось в диапазоне от  $10^3$  до  $5 \cdot 10^5$  н/м<sup>2</sup> и измерялось в зависимости от его величины либо образцовым манометром класса 0.25, либо ртутным, либо масляным пьезометром.

Измерение расхода через сопло в диапазоне от 0.0005 до 5 Г/с осуществлялось с помощью расходомерных диафрагм «четверть круга», протарированных двумя независимыми методами – весовым и объемным.

Погрешность определения коэффициента  $\mu_c$  и коэффициента полноты тягового комплекса  $\xi$  не превышала 1.5%, коэффициента полноты удельного импульса  $\phi$  – 2.5%.

4. Численные расчеты проводились при показателе адиабаты  $\gamma = 1.4$  для конфигурации сопел, представленной на фиг. 1. Как в расчетах, так и в эксперименте исследовался случай осесимметричного течения газа. Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 1–3. Угол  $\alpha_1$  брался равным  $20^\circ$ , угол  $\alpha_2$  –  $22^\circ$ , относительный радиус скругления трансзвуко-

вой части сопла  $R/r_*$  брался равным 0.05. Максимальная относительная длина сопла  $x$  составляла 120, ей соответствовала геометрическая степень расширения сверхзвуковой части сопла, равная 600. В расчетах принималось  $\alpha=1$ ,  $\omega=0.9$ ,  $\text{Pr}=0.75$ .

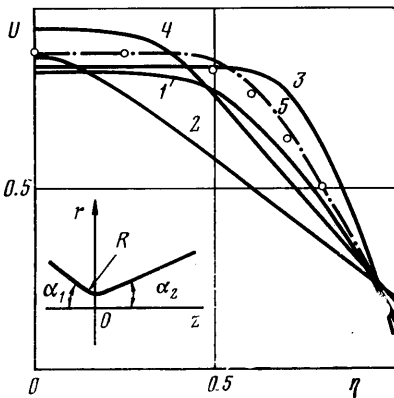
На фиг. 1 и фиг. 2 показано распределение соответственно безразмерной скорости и безразмерной температуры в двух поперечных сечениях сверхзвуковой части сопла —  $x=5$  (кривые 1 и 3) и  $x=35$  (кривые 2 и 4) при числах  $\text{Re}=400$  (кривые 1 и 2) и 1250 (кривые 3 и 4).

Результаты расчетов показали, что по мере снижения  $\text{Re}$  и роста  $x$  ядро потока уменьшается или совсем исчезает. При этом скорость потока в ядре и в большей части сопла по мере уменьшения  $\text{Re}$  падает, а в непосредственной близости к стенке растет (фиг. 1).

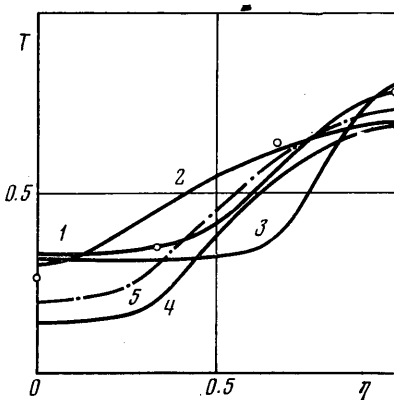
Температура же на оси, напротив, несколько возрастает, а у стенки уменьшается (фиг. 2). Этот факт объясняется, по-видимому, увеличением тепловой энергии потока, обусловленным вязкой диссипацией.

На фиг. 3 показан характер изменения безразмерной скорости и безразмерной температуры на оси потока для той же конфигурации сопла, что и на фиг. 1 и 2. Сплошным кривым соответствуют числа Рейнольдса, равные 400, а штриховым — 1250.

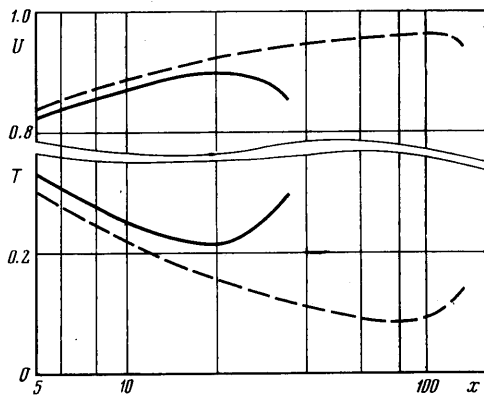
Видно, что температура на оси достигает минимального значения и далее плавно возрастает. Скорость достигает



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

максимума несколько ниже по потоку и затем уменьшается. Заметим, что давление вдоль сопла при этом продолжает уменьшаться. В работе [6] на основе экспериментального исследования течений разреженного газа в сравнительно коротких соплах был сделан вывод, что течения при малых числах Рейнольдса могут принадлежать к одному из двух типов: либо температура на оси падает, либо достигает минимума и затем растет.

Результаты данной работы указывают на то, что, по-видимому, все эти течения принадлежат к одному типу и отличаются друг от друга тем, что

в случае больших чисел Рейнольдса влияние вязких сил нарастает медленнее и качественное изменение структуры потока, в данном случае повышение температуры на оси, происходит ниже по течению.

Зная локальные параметры  $u$ ,  $p$  и  $\rho$ , можно определить расход через сопло и удельный импульс сопла в пустоте, а затем определить коэффициенты  $\varphi$ ,  $\mu_c$  и  $\xi$  по следующим соотношениям

$$m = 2\pi \int_0^{r_w} \rho u r^j dr, \quad I = \frac{R_{\Pi}}{m}$$

$$R_{\Pi} = 2^{1-j} \pi^j p r_*^{1+j} \sigma_w^{1+j} \left( 1 + \frac{2\gamma(1+j)}{\gamma-1} \int_0^1 \frac{U^2}{\Theta} \eta^j d\eta \right)$$

$$\varphi = \frac{I}{I_i}, \quad \mu_c = \frac{m}{m_i}, \quad \xi = \frac{R_{\Pi}}{R_{\Pi_i}} = \varphi \mu_c$$

Здесь  $R_{\Pi}$  — тяга сопла в пустоте.

Идеальные значения удельного импульса сопла в пустоте  $I_i$ , тяги в пустоте  $R_{\Pi_i}$  и расхода  $m_i$  определялись по известным соотношениям [7].

Расчеты показали, что на величину коэффициента расхода основное влияние при данном показателе адиабаты  $\gamma$  оказывают число  $Re$  и форма трансзвуковой части сопла, характеризуемая отношением  $R/r_*$ .

Расчетная зависимость коэффициента расхода от числа Рейнольдса при различных значениях параметра  $R/r_*$  приведена на фиг. 4, на которой кривая 1 соответствует  $R/r_* = 10$ , а кривая 2 —  $R/r_* = 0.5$ .

На величину коэффициентов  $\varphi$  и  $\xi$  оказывают влияние также угол  $\alpha_2$  и геометрическая степень расширения сопла  $F$ . На фиг. 5 показана расчетная зависимость коэффициентов  $\varphi$  (кривая 1) и  $\xi$  (кривая 2) от числа  $Re$  при  $R/r_* = 10$ ,  $\alpha_2 = 20^\circ$ ,  $F = 100$ .

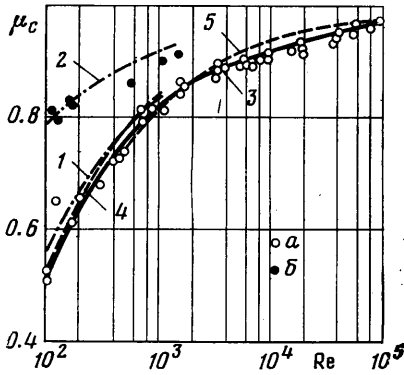
Эти результаты показывают значительный рост влияния вязкости на интегральные характеристики сопел по мере уменьшения числа  $Re$ . Так, потери удельного импульса при  $Re = 10^2$  составляют около 40%, в то время как для аналогичных условий течения в соплах при числах  $Re$  порядка  $10^6$  потери, обусловленные вязкостью, обычно не превышают 1% [8].

5. Рассмотрим результаты проведенного в работе экспериментального исследования и сравним эти результаты, а также экспериментальные результаты других авторов с численным расчетом.

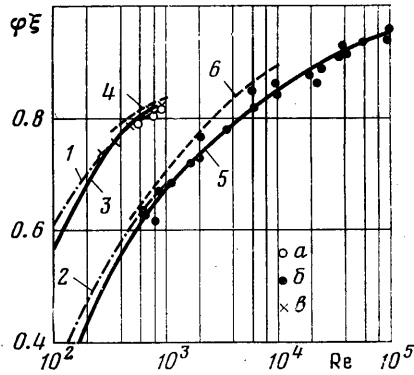
Сравнение экспериментальных результатов, связанных с определением локальных параметров потока в сопле, с численным расчетом показано на фиг. 1 и 2. На фиг. 1 точками показаны результаты экспериментального определения продольной скорости потока в поперечном сечении сверхзвуковой части сопла для  $x = 11.1$  при  $\alpha_2 = 22^\circ$ ,  $R/r_* = 13.4$ ;  $Re = 1000$  [9], а на фиг. 2 результаты определения температуры потока для  $x = 18.7$ ,  $\alpha_2 = 20^\circ$ ;  $R/r_* = 0.5$ ;  $Re = 590$  [9].

Штрихпунктирными линиями (кривые 5) показаны результаты численного расчета для тех же условий, в которых проводился эксперимент. Сравнение показывает весьма хорошее согласование экспериментальных и расчетных результатов.

Для экспериментального исследования интегральных характеристик течения использовались малоразмерные сопла с диаметром минимального сечения от 0.5 до 3 мм с различной формой дозвуковой и трансзвуковой части сопла.



Фиг. 4



Фиг. 5

В качестве рабочего тела использовался очищенный и осушенный воздух с температурой  $T_0$  около  $300^\circ\text{К}$ . Коэффициент расхода экспериментально определялся в диапазоне чисел Рейнольдса от  $10^2$  до  $10^5$ .

Зависимость, полученная осреднением экспериментальных результатов, с погрешностью, не превышающей 0.5%, может быть представлена в следующем виде:

$$(5.1) \quad \mu_c = C \left( \frac{R}{r_*} \right) \left[ 1 - \left( \frac{R+0.1r_*}{r_*} \right)^{0.21} \frac{2.20}{\text{Re}_1^n} g(\gamma) \right]$$

$$g(\gamma) = 0.97 + 0.86\gamma$$

$$n = \begin{cases} 0.5 & \text{при } 1.15 \cdot 10^4 \leq \text{Re}_1 \leq 10^5 \\ 0.764 \text{Re}_1^{-0.0456} & \text{при } 10^2 \leq \text{Re}_1 \leq 1.15 \cdot 10^4 \end{cases}$$

$$\text{Re}_1 = 2 \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \text{Re}$$

Множитель  $C(R/r_*)$  характеризует уменьшение расхода из-за криволинейности поверхности перехода через скорость звука и может быть определен, например, по зависимости, приведенной в работе [8].

Экспериментальные результаты, связанные с определением коэффициента расхода для сопел с  $R/r_* = 10$ , приведены на фиг. 4 (точки *a*), там же показана аппроксимирующая кривая 3, а также зависимости, предложенные в работах [4] (кривая 4) и [10] (кривая 5) и пересчитанные для условий эксперимента данной работы. Как зависимость [4], так и [10] получены теоретически и модифицированы на основании экспериментов, приведенных в диапазоне чисел Рейнольдса:  $60 \leq \text{Re} \leq 10^3$  и  $5 \cdot 10^2 \leq \text{Re} \leq 5 \cdot 10^5$  соответственно. В работе [4] предлагается на основании экспериментальных данных [11] экстраполировать полученную зависимость вплоть до чисел  $\text{Re} = 2 \cdot 10^5$ , однако эти данные, приведенные в [4], имеют разброс по коэффициенту расхода до 12% и в диапазоне  $4 \cdot 10^2 \leq \text{Re} \leq 10^4$  в среднем лежат на 3–4% ниже аппроксимирующей кривой.

Формула (5.1) является модификацией зависимости [4] и отличается от нее численным коэффициентом и переменным показателем степени  $n$  при  $\text{Re}_1 \leq 1.15 \cdot 10^4$ , отражающим влияние скольжения скорости на величину коэффициента расхода.

Сравнение показывает удовлетворительное согласование результатов данной работы с результатами [4] в диапазоне чисел Рейнольдса от  $10^2$  до  $10^3$  и с результатами работы [10] в диапазоне  $5 \cdot 10^2 \leq \text{Re} \leq 10^5$ . Макси-

мальное расхождение результатов в указанных диапазонах составляет около 2%.

Приведенное на фиг. 4 сравнение результатов численного расчета и экспериментальных значений коэффициента расхода в диапазоне чисел  $Re$  от  $10^2$  до  $10^3$  для  $R/r_* = 10$  (кривая 1 — расчет, точки  $a$  — экспериментальные данные настоящей работы) и  $R/r_* = 0.5$  (кривая 2 — расчет, точки  $b$  — экспериментальные данные [6]) также говорит об их удовлетворительном согласовании. Экспериментальное определение коэффициентов  $\varphi$  и  $\xi$  проводилось в диапазоне чисел  $Re$  от  $6 \cdot 10^2$  до  $10^5$ . Полученные результаты аппроксимируются следующими зависимостями:

$$(5.2) \quad \varphi = 1 - F^{0.075} \frac{4.97}{Re_1^k}$$

$$(5.3) \quad \xi = \left( 1 - F^{0.075} \frac{4.97}{Re_1^k} \right) \left\{ C \left( \frac{R}{r_*} \right) \left[ 1 - \left( \frac{R + 0.1r_*}{r_*} \right)^{0.21} \frac{2.20}{Re_1^n} g(\gamma) \right] \right\}$$

$$k = \begin{cases} 0.5 & \text{при } 3 \cdot 10^3 \leq Re_1 < 10^5 \\ -0.0812 \lg Re_1 + 0.782 & \text{при } Re_1 \leq 3 \cdot 10^3 \end{cases}$$

На фиг. 5 показано сравнение результатов экспериментального определения коэффициента  $\varphi$  с численным расчетом (кривая 1) в диапазоне чисел  $Re$  от  $10^2$  до  $10^3$ . Точкам  $a$  на этом рисунке соответствуют результаты продувок сопл, для которых  $R/r_* = 10$ ,  $\alpha_2 = 15^\circ$ ,  $F = 100$ , а точкам  $b$  — результаты работы [3], относящиеся к продувкам сопл азотом, имеющим температуру  $1033^\circ K$  ( $\alpha_2 = 20^\circ$ ,  $F = 100$ ). Кривая 3 на этой фигуре соответствует аппроксимирующей зависимости (5.2) при  $F = 100$ , а кривая 4 — аппроксимирующей зависимости [5]

$$(5.4) \quad \varphi = 0.56 Re_2^{0.0627}, \quad Re_2 = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(\gamma - 1)} Re_1$$

Экспериментальные результаты, относящиеся к определению коэффициента  $\xi$ , показаны точками  $b$  на фиг. 5 ( $R/r_* = 10$ ,  $F = 100$ ,  $\alpha_2 = 15^\circ$ ); сплошной линией 5 показан результат расчета по аппроксимирующей зависимости (5.3). Там же приведено сравнение результатов численного расчета коэффициента  $\xi$  (кривая 2) с этими экспериментальными данными, а также показан результат расчета по аппроксимирующей зависимости работы [5] (кривая 6).

Результаты численного расчета коэффициентов  $\varphi$  и  $\xi$  удовлетворительно согласуются с результатами проведенного эксперимента, а также с экспериментальными данными работы [3].

Аппроксимирующие же зависимости для коэффициентов  $\varphi$  и  $\xi$  работы [5] дают несколько более высокие значения этих коэффициентов в исследованном диапазоне чисел Рейнольдса.

Поступила 15 XII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Велуцкий В. Н., Мучная М. И. Расчет вязкого течения в гиперзвуковом сопле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 4.
2. Rae W. J. Some numerical results on viscous low-density nozzle flows in the slender-channel approximation. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 5. (Рус. перев.: Рей. Некоторые результаты численных расчетов вязких течений разреженного газа в соплах в приближении узкого канала. Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 5.)

3. Murch C. K., Broadwell J. E., Silver A. H., Marcisz T. J. Low-thrust nozzle performance. AIAA Paper, 1968, No 91. (Рус. перев.: Характеристики сопел для двигателей малой тяги. Вопросы ракетной техники, 1968, № 11.)
4. Kuluva N. M., Hosack G. A. Supersonic nozzle discharge coefficients at low Reynolds numbers. AIAA journal, 1971, vol. 9, No. 9. (Рус. перев.: Кулува, Хосэж. Коэффициент расхода сверхзвукового сопла при малых числах Рейнольдса. Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 9.)
5. Бугенко В. А., Рылов Ю. П., Чиков В. П. Экспериментальное исследование характеристик малоразмерных сопел. Изв. АН СССР, МЖТ, 1976, № 6.
6. Rothe D. E. Elektron-beam studies of viscous flow in supersonic nozzles. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 5. (Рус. перев.: Розе. Исследование вязких потоков в сверхзвуковых соплах с помощью электронного пучка. Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 5.)
7. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. М., «Наука», 1969.
8. Особенности однофазного течения в сопле. В кн.: Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания, т. 1. М., АН СССР, ВИНТИ, 1971.
9. Евсеев Г. А. Экспериментальное исследование течения разреженного газа. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.
10. Tang S. P., Fenn J. B. Experimental determination of the discharge coefficients for critical flow through an axisymmetric nozzle. AIAA Journal, 1978, vol. 16, No. 1. (Рус. перев.: Тан С. П., Фенн Дж. Б. Экспериментальное определение коэффициента расхода осесимметричного сверхзвукового сопла. Ракетная техника и космонавтика, 1978, т. 16, № 1.)
11. Smetana F. O. Convergent-divergent nozzle discharge characteristics in the transition regime between free molecule and continuum flow. ASME Paper, 1963, No. 63-WA-94.