

**ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО
СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ
ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКА**

И. В. СТУРОВА

(Новосибирск)

Теоретически исследуется развитие линейных внутренних волн в экспоненциально стратифицированном потоке идеальной несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска. Волны генерируются произвольно движущимся точечным источником массы. Полученное решение используется для исследования трех частных случаев движения: равномерного движения под углом к горизонту; нестационарного движения в течение конечного промежутка времени; равномерного движения по круговому пути. Метод решения этой задачи аналогичен [1], где изучена генерация акустических волн.

1. Рассмотрим безграничную несжимаемую устойчиво стратифицированную жидкость, находящуюся в поле силы тяжести. В невозмущенном состоянии жидкость покоится, и распределение ее плотности имеет вид $\rho_0(y) = \rho_s e^{-\varepsilon y}$ ($\varepsilon = \text{const} > 0$), где ось y направлена вертикально вверх, т. е. против действия вектора ускорения силы тяжести. Распространяющиеся в такой жидкости при наличии источника массы трехмерные внутренние волны бесконечно малой амплитуды и длиной много меньше $1/\varepsilon$ в пренебрежении вязкостью и диффузией описываются следующей системой уравнений, граничных и начальных условий [2, 3]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = m(t) \delta(X - Y(t)) \\ (1.1) \quad & \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial y} - g \rho_0 \\ & \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{d \rho_0}{d y} = 0 \end{aligned}$$

$$u, v, w, p, \rho \rightarrow 0 \quad (x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty), \quad u = v = w = p = \rho = 0 \quad (t = 0)$$

Здесь u, v, w, p, ρ — возмущения компонент вектора скорости в направлении осей x, y, z , давления и плотности, вызванные наличием источника в первоначально невозмущенной жидкости, t — время, $m(t)$ — интенсивность источника ($m(t) = 0$ при $t \leq 0$), g — ускорение силы тяжести, δ — дельта-функция Дирака, $X = (x, y, z)$, $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$, $X = Y(t)$ — траектория движения источника.

Уравнения (1.1) можно свести к одному уравнению для функции v , которое при использовании приближения Буссинеска [2] (в уравнениях импульса отличие плотности от некоторого постоянного значения ρ_s учитывается только в члене, описывающем плавучесть, в инерционных же

членах действительная плотность заменяется значением ρ_*) имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta v + N^2 \Delta_2 v = \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial y} m(t) \delta(\mathbf{X} - \mathbf{Y}(t))$$

$$v \rightarrow 0 \quad (x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty), \quad v = \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (t=0)$$

где Δ и Δ_2 соответственно трехмерный и двумерный (по x и z) операторы Лапласа, $N = \sqrt{g\epsilon}$ — частота Брента — Вайссала, которая является постоянной в данной задаче.

Применяя преобразование Фурье

$$f(y, \mu, \nu, \omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^\infty e^{-i\mu x} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-i\nu z} v(x, y, z, t) dz$$

при $\text{Im } \omega > 0$ и вещественных μ и ν , получим для v обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(1.2) \quad f'' - k^2(1 - N^2/\omega^2)f = h(y, \mu, \nu, \omega)$$

$$v \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \pm\infty), \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2$$

$$h(y, \mu, \nu, \omega) = \int_0^\infty m(t) \exp[i(\omega t - \mu y_1(t) - \nu y_3(t))] \frac{\partial}{\partial y} \delta(y - y_2(t)) dt$$

Вводя функцию Грина G , решение уравнения (1.2) запишем в виде

$$(1.3) \quad f = \int_{-\infty}^\infty G(y, \xi) h(\xi, \mu, \nu, \omega) d\xi$$

$$G(y, \xi) = -\frac{1}{2M} \exp(-|y - \xi|M), \quad M = k \sqrt{1 - \frac{N^2}{\omega^2}}$$

Очевидно, что для определения волновых движений при выполнении обратных преобразований Фурье будут важны лишь значения $|\omega| < N$, при которых величина M является мнимой. Для функции G в области I ($0 \leq \omega < N$) и в области II ($-N < \omega < 0$) соответственно имеем

$$G = \pm \frac{i\omega}{2k\gamma} \exp\left(\mp \frac{ik\gamma}{\omega} |y - \xi|\right), \quad \gamma = \sqrt{N^2 - \omega^2}$$

Используя (1.3), получим

$$f_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty m(\tau) \sigma \exp\left[i\left(\omega\tau - \mu y_1(\tau) - \nu y_3(\tau) - k\gamma \frac{\xi}{\omega}\right)\right] d\tau$$

$$\sigma = \text{sign}(y - y_2(\tau)), \quad \xi = |y - y_2(\tau)|$$

Выполним обратные преобразования Фурье

$$(1.4) \quad v_1 = \frac{1}{16\pi^3} \int_{-\infty}^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty d\nu \int_0^N d\omega \int_0^\infty d\tau m(\tau) \sigma \times$$

$$\times \exp\left[i\left(\omega\tau - \mu y_1(\tau) - \nu y_3(\tau) - \omega t + \mu x + \nu z - \frac{k\gamma\xi}{\omega}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{16\pi^3} \int_0^\infty d\tau m(\tau) \sigma \int_0^\infty k dk \int_0^{2\pi} \exp[ikr \sin(\theta + \varphi)] d\theta \times \\ \times \int_0^N d\omega \exp\left\{i\left[\omega(\tau - t) - \frac{k\gamma\xi}{\omega}\right]\right\}$$

$$\mu = k \sin \theta, \quad \nu = k \cos \theta, \quad x = y_1(\tau) + r \cos \varphi, \quad z = y_3(\tau) + r \sin \varphi$$

Известно, что для функции Бесселя первого рода нулевого порядка справедливы соотношения

$$I_0(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \sin(\theta + \varphi)} d\theta$$

$$I_0(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos(kr - \pi/4) \quad (r \rightarrow \infty)$$

Подставляя эти соотношения в (1.4) и учитывая (как будет показано ниже), что основной вклад дает слагаемое с множителем e^{ikr} , получим

$$(1.5) \quad v_1 = \frac{e^{-i\pi/4}}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{r}} m(\tau) \sigma \int_0^\infty \sqrt{k} dk \int_0^N d\omega \times \\ \times \exp\left\{i\left[\omega(\tau - t) + kr - \frac{k\gamma\xi}{\omega}\right]\right\} = \\ = \frac{Ne^{-i\pi/4}}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{r}} m(\tau) \sigma \int_0^\infty \sqrt{k} dk \int_0^{\pi/2} d\beta \cos \beta \exp[iX(\beta, k)]$$

$$X(\beta, k) = N(\tau - t) \sin \beta + k(r - \xi \operatorname{ctg} \beta)$$

Здесь произведена замена $\omega = N \sin \beta$. Двойной интеграл по β и k в (1.5) при $r \rightarrow \infty$ можно вычислить, используя метод стационарной фазы. Стационарные точки определяются из системы уравнений $\partial X / \partial \beta = \partial X / \partial k = 0$, существуют только при $\tau < t$ и равны $\beta_0 = \operatorname{arctg}(\xi/r)$, $k_0 = N\xi r(t - \tau)/q^{3/2}$, где $q = \xi^2 + r^2$. Возвращаясь к интегралу в (1.5), легко видеть, что в отброшенном слагаемом функция $X(\beta, k) = N(\tau - t) \sin \beta - k(r + \xi \operatorname{ctg} \beta)$ не имеет стационарных точек в области интегрирования. Следовательно, асимптотическое выражение для функции v_1 при $r \rightarrow \infty$ имеет вид

$$v_1 = \frac{N^{3/2} e^{-i\pi/4}}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \int_0^t r \sigma \sqrt{t - \tau} \xi^{1/2} q^{-3/4} m(\tau) \exp[-iN(t - \tau)\xi q^{-1/2}] d\tau$$

Аналогичное выражение можно получить и для v_2 , и полное решение $v = v_1 + v_2$ имеет вид

$$v = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{3/2} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\pi/4} \int_0^t r \sigma \sqrt{t - \tau} \xi^{1/2} q^{-3/4} m(\tau) \exp[-iN(t - \tau)\xi q^{-1/2}] d\tau \right\}$$

Функция $\eta(x, y, z, t)$, определяющая вертикальные смещения жидкой частицы, удовлетворяет линеаризованному условию $\partial \eta / \partial t = v$ и равна

$$(1.6) \quad \eta = \frac{\sqrt{N}}{(2\pi)^{3/2}} \operatorname{Im} \left\{ e^{-i\pi/4} \int_0^t r \sigma \sqrt{t - \tau} \xi^{1/2} q^{-1/4} \times \right.$$

$$\times m(\tau) \exp[-iN(t-\tau)\xi q^{-1/2}] d\tau \Big\}$$

Полученное решение используется ниже для исследования внутренних волн, вызванных удлиненным осесимметричным овоидом Ранкина, обтекание которого (аналогично однородной жидкости) можно имитировать системой источник — сток одинаковой интенсивности m , разнесенной на расстояние $2a$. Радиус миделева сечения R , удлинение тела d и скорость основного потока U однозначно определяют величины m и a [4].

2. Рассмотрим стационарную задачу о равномерном движении источника интенсивности m со скоростью U под углом α к горизонту. Предполагается, что источник начинает действовать в момент времени $t=0$ и при $t>0$ его интенсивность постоянна. Решение стационарной задачи рассматривается как предел такой нестационарной задачи при $t \rightarrow \infty$.

В неподвижной системе координат траектория источника, движущегося в плоскости xy , задается соотношениями

$$y_1(t) = -Ut \cos \alpha, \quad y_2(t) = Ut \sin \alpha, \quad y_3(t) = 0$$

Перейдем в движущуюся систему координат x_1, y_1, z , связанную с источником, и направим ось x_1 вдоль направления основного потока так, что $x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha + Ut$, $y_1 = x \sin \alpha + y \cos \alpha$. Введем безразмерные переменные

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (x_*, y_*, z_*) &= N/U (x_1, y_1, z) \\ (t_*, \tau_*) &= N(t, \tau), \quad m_* = m/UR^2, \quad \eta_* = \eta U/NR^2 \end{aligned}$$

Для вертикальных смещений из (1.6) получим

$$(2.2) \quad \eta_* = \frac{m_*}{(2\pi)^{1/2}} \operatorname{Im} \left\{ e^{-i\pi/4} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sgn} \xi \sigma \sqrt{p|\xi|}}{(\xi^2 + \sigma^2)^{3/4}} e^{iX(p)} dp \right\}$$

$$\xi = y_* \cos \alpha - (x_* - p) \sin \alpha$$

$$\sigma = \{z_*^2 + [(x_* - p) \cos \alpha + y_* \sin \alpha]^2\}^{1/2}$$

$$X(p) = -p|\xi|/(\xi^2 + \sigma^2)^{1/2}, \quad p = t_* - \tau_*$$

Используя метод стационарной фазы для оценки интеграла (2.2), окончательно получим

$$\begin{aligned} \eta_* &= \frac{m_*}{2\pi} \sum_{n=1}^3 \operatorname{Im} \left\{ \frac{\operatorname{sgn} \xi_n \sigma_n \sqrt{p_n |\xi_n|}}{(\xi_n^2 + \sigma_n^2)^{1/4} \sqrt{|X_n''|}} \times \right. \\ &\left. \times \exp \left[i \left(X_n + \frac{\pi}{4} (\operatorname{sgn} X_n'' - 1) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

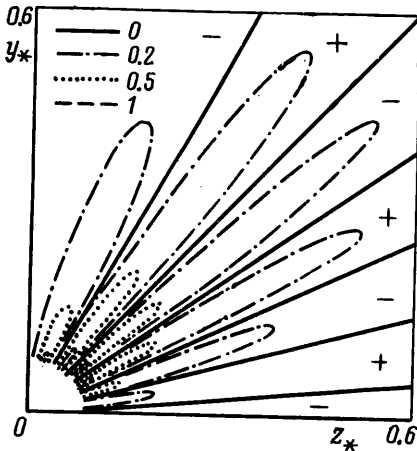
где p_n — невырожденные стационарные точки функции $X(p)$, $\xi_n = \xi(p_n)$, $\sigma_n = \sigma(p_n)$, $X_n'' = X''(p_n)$. Для определения стационарных точек при $\alpha > 0$ следует найти вещественные положительные корни кубического уравнения.

$$(2.3) \quad \begin{aligned} p^3 - 3p^2 x_* + p[2(x_*^2 + y_*^2 + z_*^2) + \\ + x_*(x_* - y_* \operatorname{ctg} \alpha)] - (x_*^2 + y_*^2 + z_*^2)(x_* - y_* \operatorname{ctg} \alpha) = 0 \end{aligned}$$

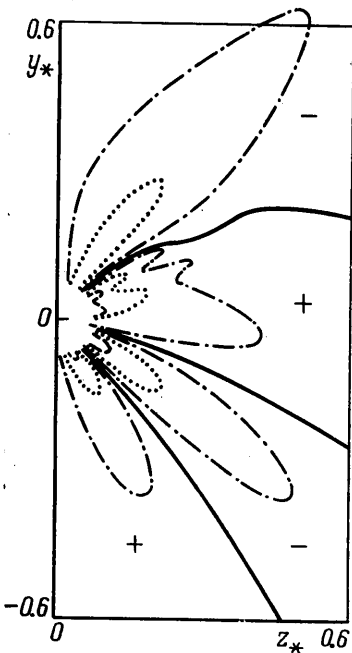
При $\alpha = 0$ (горизонтальное движение источника) имеется лишь одна стационарная точка $p_1 = (x_*^2 + y_*^2 + z_*^2)/x_*$ и решение в этом случае аналогично [3].

В том случае, когда p_n является вырожденной стационарной точкой (что соответствует кратному действительному корню (2.3)), можно использовать метод, предложенный в [5].

Поведение внутренних волн, генерируемых при данном движении системой источник — сток (линия, соединяющая их, совпадает с направлением движения), показано на фиг. 1–3, где представлены изолинии функции $\eta_r(x_*, y_*, z_*) = \eta_*(x_* + a_*, y_*, z_*) - \eta_*(x_* - a_*, y_*, z_*)$ при $x_* = 20$ для удлинения тела $d = 10$ ($m_* = 3.16$, $a_* = a/R = 9.49$), $N/UR = 0.03$ и различных значениях угла $\alpha = 0, 45, 90^\circ$. При горизонтальном движении тела волновой след является антисимметричным относительно плоскости $y = 0$, при стро-



Фиг. 1

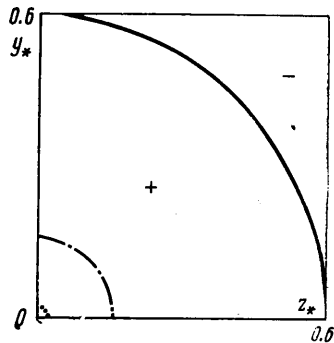


Фиг. 2

го вертикальному движению — осесимметричным. Размеры волнового следа максимальны при углах наклона $\alpha \approx 30-45^\circ$ и резко уменьшаются при дальнейшем увеличении α .

Данная задача рассматривалась в [6–9], однако теоретические решения ограничивались лишь определением фазовых поверхностей. В [9] определены поверхности постоянной фазы в случае вертикального движения сферы, совпадающие с экспериментом [7] и результатами данной работы (фиг. 3). В [8] теоретически и экспериментально получены фазовые конфигурации плоских внутренних волн, генерируемых круглым цилиндром, в трехмерном случае уравнение фазовых поверхностей приведено в [9].

Интересно отметить, что в отличие от горизонтального и вертикального движения (при котором также уравнение (2.3) имеет всегда лишь один поло-



Фиг. 3

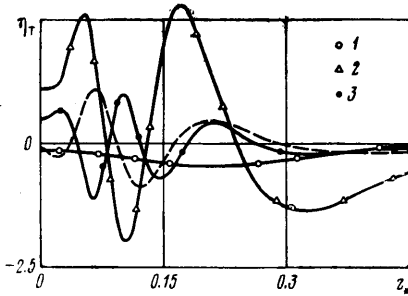
жительный вещественный корень) при движении под углом к горизонту в полупространстве $x_* > 0$ пересечение областей $y_* > x_* \operatorname{tg} \alpha$ и $Q(x_*, y_*, z_*) >$

>0 , где

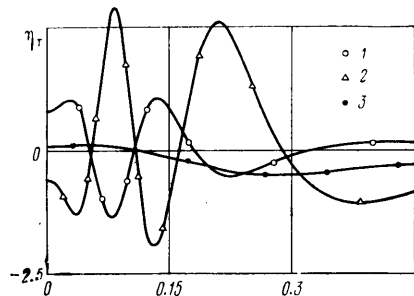
$$Q = (b/3)^3 + (c/2)^2, \quad b = 2(y_*^2 + z_*^2) - x_* y_* \operatorname{ctg} \alpha, \quad c = \\ = (y_*^2 + z_*^2) (x_* + y_* \operatorname{ctg} \alpha)$$

есть зона «тени», т. е. такая область, в которой отсутствуют волновые движения, так как уравнение (2.3) не имеет положительных корней. Численное сравнение с [8] показывает, что эти области совпадают с теми зонами, которые находятся выше складки (сгиба) фазовых поверхностей.

3. Исследуем задачу о горизонтальном движении источника переменной интенсивности $m(t) = M\dot{V}(t)$ ($M = \text{const}$) со скоростью $v(t) = -UV(t)$,



Фиг. 4



Фиг. 5

где $V(t) = 0$, $t < 0$, $t > t_3$; $V(t) = t/t_1$, $0 \leq t \leq t_1$; $V(t) = 1$, $t_1 < t \leq t_2$; $V(t) = (t_3 - t)/(t_3 - t_2)$, $t_2 < t \leq t_3$. В неподвижной системе координат траектория движения такого источника вдоль оси x определяется следующим образом:

$$y_1(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau, \quad y_2(t) = y_3(t) = 0$$

Перейдем в движущуюся систему координат x_1, y, z , связанную с источником, так что $x_1 = x - y_1(t)$, и введем безразмерные переменные аналогично (2.1). Для вертикальных смещений из (1.6) получим

$$(3.1) \quad \eta_* = -\operatorname{sgn}(y_*) \frac{\sqrt{|y_*|}}{4\pi^{3/2}} \int_0^{t_*} \frac{\sigma m_*(\tau_*) \sqrt{t_* - \tau_*}}{(\sigma^2 + y_*^2)^{3/4}} (\sin X + \cos X) d\tau_*$$

$$\sigma = [z_*^2 + (x_* + \zeta)^2]^{1/2}, \quad \zeta = y_{1*}(t_*) - y_{1*}(\tau_*)$$

$$X = (t_* - \tau_*) |y_*| / (\sigma^2 + y_*^2)^{1/2}$$

Для исследования внутренних волн, возникающих при таком движении системы источник — сток (по-прежнему линия, соединяющая их, совпадает с направлением движения), было проведено численное интегрирование (3.1). На фиг. 4 изображена функция

$$\eta_z(x_*, y_*, z_*, t_*) = \eta_*(x_* + a_*, y_*, z_*, t_*) - \eta_*(x_* - a_*, y_*, z_*, t_*)$$

при $x_* = 15$, $y_* = 0.1$ в моменты времени $t_* = 17, 17.5, 30$ (кривые 1—3) для значений $t_{1*} = 5$, $t_{2*} = 20$, $t_{3*} = 25$, $d = 10$, $NR/U = 0.03$. Для сравнения пунктирной линией показаны результаты для стационарного движения со скоростью U . Следует отметить, что для тех же значений x_* и y_* при $t_* < 17$ амплитуда волн пренебрежимо мала. Резкое возрастание амплитуды происходит при $17 < t_* < 20$, затем она медленно убывает и после остановки тела остается практически постоянной. Частота колебаний внутренних волн со временем увеличивается. Качественно фазовая картина волн совпадает

с экспериментальными результатами [10], где представлены ширен-фотографии внутренних волн, возникающих при мгновенном разгоне и остановке цилиндра.

Сравнивая амплитуды внутренних волн при стационарном и нестационарном горизонтальном движении, можно заметить, что в последнем случае они больше, так как вносятся дополнительные импульсы разгона и торможения.

На фиг. 5 представлена функция $\eta_r(x, y, z, t)$ при $y_* = 0.1$ в момент времени $t_* = 20$ при различных значениях $x_* = 16, 17.5, 18$ (кривые 1—3) при тех же значениях исходных параметров, что и на фиг. 4. Видно, что волновой след имеет ограниченное распространение по оси x и в основном сосредоточен в той области значений x (в неподвижной системе координат), которую к данному моменту времени прошло тело, причем максимальные возмущения возникают на границе этой области при $x=0$, при $x>0$ возмущения резко убывают.

4. Рассмотрим нестационарную задачу о движении источника интенсивности m с постоянной угловой скоростью ω по круговому пути радиуса P в горизонтальной плоскости. Предполагается, что источник начинает действовать в момент времени $t=0$ и при $t>0$ его интенсивность постоянна. В неподвижной системе координат траектория источника, движущегося в плоскости xz по окружности с центром в начале координат, задается соотношениями

$$y_1(t) = P \cos \omega t, \quad y_2(t) = 0, \quad y_3(t) = P \sin \omega t$$

Перейдем в движущуюся цилиндрическую систему координат r_1, φ, y , связанную с источником, так что начало координат совпадает с центром круга и источник находится на луче $\varphi=0$. Следовательно,

$$r_1 = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = (z \cos \omega t - x \sin \omega t) / (x \cos \omega t + z \sin \omega t)$$

В безразмерных переменных для вертикальных смещений из (1.6) получим

$$(4.1) \quad \eta_*(r_*, y_*, \varphi, t_*) =$$

$$= -m_* \operatorname{sgn}(y_*) \sqrt{|y_*|} \left(\frac{\gamma}{2\pi} \right)^{3/2} \int_0^{t_*} \frac{\sigma \sqrt{p}}{(\sigma^2 + y_*^2)^{1/4}} \sin \left(X + \frac{\pi}{4} \right) dp$$

$$\sigma = [r_*^2 + \gamma^2 - 2\gamma r_* \cos(p + \varphi)]^{1/2}, \quad X = \gamma p |y_*| / (\sigma^2 + y_*^2)^{1/2}, \quad p = t_* - \tau_*$$

$$(r_*, y_*) = \gamma / P (r_1, y), \quad (t_*, \tau_*) = \omega (t, \tau)$$

$$\eta_* = \eta P / \gamma R^2, \quad \gamma = N / \omega, \quad m_* = m / \omega P R^2$$

При $t \rightarrow \infty$ интеграл в (4.1) расходится и, следовательно, в данной линейной постановке для точечного источника в экспоненциально стратифицированной жидкости, в отличие от однородной жидкости со свободной поверхностью [11], не существует стационарного решения для данной задачи.

Полученные в данной работе решения для безграничной жидкости можно использовать для определения волновых движений в жидкости, содержащей плоские границы, применяя метод отражения аналогично [12].

Автор выражает благодарность В. В. Сазонову за помощь в вычислениях.

Поступила 16 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Wolfe P., Lewis R. M. Progressing waves radiated from a moving point source in an inhomogeneous medium. J. Different. Equations, 1966, vol. 2, No. 3.
2. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М., «Мир», 1977.
3. Miles J. W. Internal waves generated by a horizontally moving source. Geophys. Fluid Dynamics, 1971, vol. 2, No. 1.

4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., Физматгиз, 1963.
 5. Черкесов Л. В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев, «Наукова думка», 1976.
 6. Lighthill M. J. On waves generated in dispersive systems by travelling forcing effects, with applications to the dynamics of rotating fluids. *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 27, pt. 4.
 7. Mowbray D. E. The use of schlieren and shadowgraph techniques in the study of flow patterns in density stratified liquids. *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 27, pt. 3.
 8. Stevenson T. N. Some two-dimensional internal waves in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 33, pt. 4.
 9. Некрасов В. Н., Чашечкин Ю. Д. О фазовых характеристиках внутренних волн. Тр. ВНИИ физ.-техн. и радиотехн. измерений, 1976, вып. 28 (58).
 10. Stevenson T. N. The phase configuration of internal waves around a body moving in a density stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 1973, vol. 60, pt. 4.
 11. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М., «Наука», 1977.
 12. Стурова И. В. Внутренние волны, генерируемые локальными возмущениями в линейно-стратифицированной жидкости конечной глубины. ПМТФ, 1978, № 3.
-