МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1980

УДК 532.546

К ТЕОРИИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

В. М. ЕНТОВ

(Москва)

Интерес к изучению неравновесных эффектов при движении неоднородных жидкостей в пористой среде связан с тем, что они могут иметь большое значение как для понимания физики течения в пористых средах, так и для приложений – в первую очередь для задач разработки нефтяных и газовых месторождений. Цель данной работы состоит в теоретическом анализе некоторых аспектов неравновесности, связанной с длительностью процессов установления капиллярного равновесия, и их возможных следствий.

1. «Классическое» описание движения двух несмешивающихся жидкостей дается уравнениями двухфазной фильтрации (например, [1–3])

$$\mathbf{u}_i=-\mu_i^{-1}kf_i(s)\operatorname{grad}p_i,\qquad p_2-p_1=p_c(s)$$
$$\operatorname{div}(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=0,\qquad \partial(ms)/\partial t+\operatorname{div}\mathbf{u}_1=0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}_i$ – скорости фильтрации фаз, p_i – фазовые давления, s – насыщенность порового пространства первой фазой; p_c – порождаемая капиллярными силами разность давлений между фазами («капиллярное давление»).

Систему (1.1) можно получить из двух предположений:

а) Распределение фаз в поровом пространстве элемента пористой среды диктуется условиями термодинамического равновесия и вполне определяется насыщенностью.

б) При заданном распределении фаз движение их происходит без взаимодействия.

Общеизвестно, что первое допущение, вообще говоря, неверно. Имеется множество состояний капиллярного равновесия в элементе пористой среды, каждое из которых характеризуется своим «микрораспределением» фаз, и им, при неизменном значении s, отвечают разные значения фазовых проницаемостей и капиллярного давления. Поэтому обычно говорят о функциях f_i, p_c при пропитке (постепенном насыщении образца более смачивающей фазой) и дренировании (постепенном вытеснении более смачивающей). Фактически, однако, дело обстоит еще сложнее, поскольку реально уравнения вида (1.1) применяются для описания макросистем (например, участка нефтяного месторождения), в котором роль «элемента» играет некоторый макрообъем пористой среды с присущей ему неоднородностью. (Достаточно сказать, что при численном моделировании процессов разработки нефтяных месторождений шаг сетки составляет десятки, а чаще сотни метров.) При этом равновесное распределение фаз в макроэлементе может устанавливаться настолько долго, что истинные гидродинамические проводимости элемента будут весьма далеки от равновесных. Некоторые модели, учитывающие эти эффекты, были предло-

жены в работах [1–8] [1]; в [9] на основе термодинамического анализа была введена зависимость капиллярного давления от скорости изменения насыщенности. Ниже рассматриваются некоторые общие вопросы описания неравновесных эффектов и их влияние на устойчивость вытеснения нефти водой.

2. Рассмотрим макроскопические неравновесные процессы, возникающие при вытеснении нефти водой в неоднородном пласте. Порождающей их причиной является взаимодействие гидродинамических и капиллярных сил. Если рассматриваемый пласт состоит из участков с разной проницаемостью (и, следовательно, различным средним размером пор), то равновесное распределение фаз в поровом пространстве соответствует равенству капиллярных давлений во всех элементах среды. В случае гидрофильной среды это означает преимущественное заполнение водой участков меньшей проницаемости, в случае гидрофобной среды большая локальная насыщенность водой образуется в участках большей проницаемости. Далее для определенности рассматривается гидрофильная среда.

Выход на равновесное распределение требует времени, которое определяется скоростью капиллярного перетока между отдельными элементами среды. По порядку величины это время составляет

$$\tau \simeq \mu l^2/k\Delta p_c \simeq C\mu l^2 k^{-1/2} \tag{2.1}$$

Здесь k — проницаемость элемента, l — его линейный размер, Δp_c — действующая разность капиллярных давлений.

Вообще говоря, макроэлементу пористой среды соответствует спектр времени установления

$$\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots \tag{2.2}$$

соответственно спектру размеров и проницаемостей тех элементов, из которых составлен данный макроэлемент.

Пусть в момент $t=0$ в макроэлементе среды возникает двухфазное неравновесное состояние. Тогда к моменту t элементы, которым отвечают $\tau_i \ll t$, окажутся между собой в состоянии капиллярного равновесия; элементы с $\tau_j \gg t$ сохранят практически неизменным то состояние, в котором они находились при $t=0$. Таким образом, для того чтобы задать состояние макроэлемента пористой среды, недостаточно задать свойства составляющих его элементов и среднюю насыщенность макроэлемента обеими фазами; нужно, как минимум, указать распределение фаз по составным элементам данного макроэлемента. Некоторые модели подобных процессов рассмотрены применительно к трещиновато-пористым средам, средам с двойной пористостью и слоистым пластам в [10].

Попытаемся дать общее описание неравновесных процессов в макроэлементе гетерогенной среды. Пусть f — некоторая функция состояния макроэлемента, т. е. функция, полностью определяемая распределением фаз внутри макроэлемента. В свою очередь примем в качестве постулата, что это распределение определяется предысторией изменения средней насыщенности в макроэлементе. Тогда f есть функционал от указанной предыстории (сравни с [11]):

$$f(t) = F_{\tau=-\infty}^{t}\{s(\tau)\} = F_{\tau=0}^{\infty}\{s(t-\tau)\} \tag{2.3}$$

Если пористая среда не меняет характеристик во времени, функционал F не зависит явно от времени. Таким образом, макроэлемент описывается как система с памятью.

[1] См. также: Рыжик В. М. Гидродинамическое исследование механизма нефте- и газоотдачи пластов. Автореф. докт. дис. М., 1973.

Если $s(t)$ — медленно меняющаяся функция, то в системе с конечной (или быстрозатухающей) памятью можно положить

$$s(t-\tau)\approx s(t)-\dot{s}(t)\tau+{}^1/_2\ddot{s}(t)\tau^2+\cdots+(-1)^n s^{(n)}\tau^n/n!$$

(точками обозначены производные по времени).

При этом функционал превращается в функцию n производных функции $s(t)$ в данный момент.

Такие системы назовем дифференциальными системами n-го порядка. В частности, для системы первого порядка имеем

$$f(t)=f^*(s,\ \dot{s}) \tag{2.4}$$

Важно иметь в виду, что дифференциальные системы будут удовлетворительно описывать лишь относительно медленные неравновесные процессы, когда «неравновесные поправки» малы. В противном случае дифференциальное описание может приводить к качественно неверным результатам. Как известно, подобная картина имеет место в теории определяющих соотношений в реологии [11]. В этих случаях может оказаться более полезным интегральное описание, например описание системой с внутренней линейной структурой. Под этим понимается, что функционал F есть (нелинейная, вообще говоря) функция k аргументов, каждый из которых представляет собой линейный функционал

$$f=F(a_1,\ldots,a_k);\qquad a_i=\int_0^\infty s(t-\tau)K_i(\tau)\,d\tau \tag{2.5}$$

К последнему типу относятся рассматривавшиеся В. М. Рыжиком модели составных сред ($k=2$, $a_1=s_1$, $a_2=s_2$ — насыщенности водой для более и менее проницаемого компонента среды).

По смыслу проницаемости как гидравлической проводимости макрообъема для данной фазы соответствующие функционалы должны удовлетворять некоторым естественным требованиям. В частности, если водонасыщенность s возрастает, то при одном и том же достигнутом значении ее s° значение фазовой проницаемости для воды будет тем выше, чем быстрее происходило нарастание насыщенности до s°, т. е. чем выше степень неравновесности. Учитывая еще очевидное увеличение фазовой проницаемости для воды с увеличением мгновенного значения насыщенности, получаем для описания неравновесности дифференциальную систему первого порядка

$$\begin{gathered} f_1=F_1(s,\dot{s}),\qquad f_2=F_2(s,\dot{s}) \\ F_{1,s}\geqslant 0,\quad F_{1,\dot{s}}\geqslant 0;\quad F_{2,s}\leqslant 0,\quad F_{2,\dot{s}}\leqslant 0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

В качестве системы с внутренней линейной структурой примем простейшую модель с двумя степенями свободы, полагая

$$\begin{gathered} s=s^++s^-,\ f_i=F_i(s,s^-) \\ s^-=\int_0^\infty \dot{s}(t-\tau)K^-(\tau)\,d\tau,\qquad K^-(\tau)\geqslant 0,\qquad s^-\leqslant s \\ F_{1,s}\geqslant 0,\ F_{1,s^-}\leqslant 0;\ F_{2,s}\leqslant 0,\ F_{2,s^-}\geqslant 0 \end{gathered} \tag{2.7}$$

В этом случае s^- представляет собой долю насыщенности, приходящуюся на менее проницаемые элементы.

3. Рассмотрим задачу о фронтальном вытеснении нефти водой с учетом неравновесных эффектов, считая характерное время процессов установле-

ния локального равновесия τ малым по сравнению с полным временем вытеснения (имеющим порядок mL/U, где L — размер пласта, U — скорость вытеснения).

Используя дифференциальную модель (2.6), получим

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{U}{m}\frac{\partial F(s,\dot{s})}{\partial x}=0, \quad s(0,x)=s_0, \quad s(t,0)=s^\circ \tag{3.1}$$

$$F(s,\dot{s})=F_1(s,\dot{s})\,[F_1(s,\dot{s})+\mu_1F_2(s,\dot{s})/\mu_2]^{-1};\ F_{,s}\geqslant 0,\ F_{,\dot{s}}\geqslant 0 \tag{3.2}$$

Обозначим $\tau=\max\limits_{s_0<s<s^\circ} F_{,\dot{s}}$ и будем полагать $\tau U/mL\ll 1$. Тогда решение задачи можно получить методом сращиваемых асимптотических разложений (сравни [5]). Для внешнего разложения, полагая $\tau=0$, имеем обычную задачу Баклея — Леверетта, имеющую решение

$$s=S(\eta);\ \eta=mx/Ut \tag{3.3}$$

со скачком величины s^*-s_0 в точке $\eta=\eta^*$, определяемого из условия

$$\eta^*=mU^{-1}F_{,s}(s^*,\ 0)=(m/U)\,[F(s^*)-F(s_0)]/(s^*-s_0) \tag{3.4}$$

Скачок распространяется с постоянной скоростью $V=\eta^*U/m$. Вводя в окрестности скачка «быстрые» переменные

$$\xi=(x-Vt)/tV,\ \theta=t/\tau \tag{3.5}$$

из (3.4) получим

$$\frac{\partial s}{\partial\theta}-\frac{\partial s}{\partial\xi}+\frac{U}{mV}\frac{\partial}{\partial\xi}F\left(s,-\frac{1}{\tau}\frac{\partial s}{\partial\theta}-\frac{1}{\tau}\frac{\partial s}{\partial\xi}\right)=0 \tag{3.6}$$

При $\theta\to\infty$ получаем для стационарного решения уравнение

$$\frac{U}{mV}\frac{d}{d\xi}F\left(s,\ -\frac{1}{\tau}\frac{ds}{d\xi}\right)-\frac{ds}{d\xi}=0;$$

$$F\left(s,\ -\frac{1}{\tau}\frac{ds}{d\xi}\right)-s\eta_*=\text{const}$$

Поскольку при $\xi\to\infty$, $s\to s_0$, имеем

$$F\left(s,\ -\frac{1}{\tau}\frac{ds}{d\xi}\right)=(s-s_0)\,\eta_* \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) должно быть решено при краевых условиях $s(-\infty)=s_0$, $s(\infty)=s^*$, обеспечивающих сопряжение с внешним решением задачи. Такое решение существует, если $\varepsilon\leqslant F_{,\dot{s}}\leqslant E$ при $s_0<s<s^*$, поскольку при этом уравнение (3.7) однозначно разрешимо относительно $ds/d\xi$, причем $ds/d\xi\to 0$ при $s\to s^*$ и $s\to s_0$.

С учетом определения τ в зоне резкого изменения $s(\xi)$ выполняется соотношение

$$\frac{ds}{d\xi}\sim\eta_*(s-s_0)-F(s)$$

Для протяженности переходной зоны имеем

$$L\sim V\tau(s^*-s_0)/\max_{s_0<s<s^*}[\eta_*(s-s_0)-F(s)] \tag{3.8}$$

4. Оценим влияние неравновесных эффектов на устойчивость вытеснения. Обозначим через $S(\xi)$, $P(\xi)$, $\xi=x-Vt$ решение задачи о фронталь-

ном вытеснении нефти водой и допустим, что на это решение наложены малые возмущения $s(\xi, y, t)$, $p(\xi, y, t)$. В линейном приближении возмущения удовлетворяют системе уравнений

$$m\frac{\partial s}{\partial t}-mV\frac{\partial s}{\partial \xi}-\frac{k}{\mu_1}F_1^\circ\nabla^2 p-\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{G^\circ\left[F^\circ_{1,s}s+F^\circ_{1,\dot s}\left(\frac{\partial s}{\partial t}-V\frac{\partial s}{\partial \xi}\right)\right]\right\}=0 \tag{4.1}$$

$$F^\circ\nabla^2 p+\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{G^\circ\left[F^\circ_{,s}s+F^\circ_{,\dot s}\left(\frac{\partial s}{\partial t}-V\frac{\partial s}{\partial \xi}\right)\right]\right\}=0$$

Здесь индексом $^\circ$ отмечены все величины в невозмущенном состоянии, $G=dP/d\xi$.

Полагая

$$s=\sigma(\xi)\exp(i\omega t+i\eta y),\ p=\pi(\xi)\exp(i\omega t+i\eta y) \tag{4.2}$$

получим для $\sigma(\xi)$ и $\pi(\xi)$ систему уравнений

$$\frac{m\mu_1}{k}\left[i\omega\sigma-V\frac{d\sigma}{d\xi}\right]-F_1^\circ\left(\frac{d^2\pi}{d\xi^2}-\eta^2\pi\right)-\frac{d}{d\xi}\left\{G^\circ\left[F^\circ_{1,s}\sigma+F^\circ_{1,\dot s}\left(i\omega\sigma-\xi V\frac{d\sigma}{d\xi}\right)\right]\right\}=0 \tag{4.3}$$

$$F^\circ\left(\frac{d^2\pi}{d\xi^2}-\eta^2\pi\right)+\frac{d}{d\xi}\left\{G^\circ\left[F^\circ_{,s}\sigma+F^\circ_{,\dot s}\left(i\omega\sigma-V\frac{d\sigma}{d\xi}\right)\right]\right\}=0$$

Исключая из этой системы π, получим для $\sigma(\xi)$ уравнение

$$F_1^\circ\frac{d}{d\xi}\left\{G^\circ\left[F^\circ_{,s}\sigma+F^\circ_{,\dot s}\left(i\omega\sigma-\frac{d\sigma}{d\xi}V\right)\right]\right\}-F^\circ\frac{d}{d\xi}\left\{G^\circ\left[F^\circ_{1,s}\sigma+F^\circ_{1,\dot s}\left(i\omega\sigma-V\frac{d\sigma}{d\xi}\right)\right]\right\}+\frac{m\mu_1}{k}F^\circ\left(i\omega\sigma-V\frac{d\sigma}{d\xi}\right)=0 \tag{4.4}$$

Интерес представляют значения $\omega=\omega^*$, при которых задача имеет ограниченные решения $|\sigma(\xi)|<\infty$, $-\infty<\xi<\infty$. Если для всех ω^* из спектра задачи $\operatorname{Im}\omega^*>0$, то решение устойчиво по отношению к малым возмущениям.

В указанной полной постановке решение сформулированной задачи неизвестно, однако чтобы оценить качественно роль неравновесности, достаточно рассмотреть предельные случаи длинноволновых и коротковолновых возмущений. В случае длинноволновых возмущений, характерный масштаб которых много больше ширины фронта вытеснения, получаются обычные условия устойчивости фронта в задаче Баклея – Леверетта (сравни [3]).

Рассмотрим теперь коротковолновые возмущения со столь малой длиной волны, что можно пренебречь переменностью коэффициентов в уравнении (4.4). Тогда имеем

$$\sigma=\sigma_0\exp(i\lambda\xi),\ \sigma_0=\text{const},\ \lambda\tau V\ll 1 \tag{4.5}$$

причем связь между ω и λ имеет вид

$$\omega=\lambda[V-kA(\mu_1 mF^\circ+i\lambda kB)^{-1}] \tag{4.6}$$

$$A=(F_1^\circ F^\circ_{2,s}-F_2^\circ F^\circ_{1,s})G^\circ,\ B=(F_1^\circ F^\circ_{2,\dot s}-F_2^\circ F^\circ_{1,\dot s})G^\circ \tag{4.7}$$

Из (4.6) следует, что $\operatorname{Im}\omega$ имеет знак произведения AB. Однако по общим свойствам фазовых проницаемостей $A<0$, а в силу неравенств (2.6) $B<0$. Таким образом, при сделанных допущениях $\operatorname{Im}\omega>0$ и решение устойчиво по отношению к коротковолновым возмущениям.

Приведенные результаты получены при весьма сильных допущениях. Тем не менее они указывают на то, что неравновесность может играть роль стабилизирующего фактора, во всяком случае, может препятствовать развитию мелкомасштабных возмущений. Это наводит на мысль, что в реальных гетерогенных пластах неустойчивость вытеснения при неблагоприятном соотношении подвижностей может не проявляться или проявляться в ослабленной форме. С другой стороны, из приведенного анализа ясно, что дифференциальные системы первого порядка, для которых нарушены условия (2.6), могут приводить к некорректно поставленным задачам. Так, по-видимому, будет обстоять дело при попытке описания вытеснения нефти водой в гидрофобном пласте дифференциальной системой первого порядка.

Поступила 14 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маскет М.* Физические основы технологии добычи нефти. М.– Л., Гостоптехиздат, 1953.
2. *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
3. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., «Недра», 1972.
4. *Курбанов А. К.* Об уравнениях движения двухфазных жидкостей в пористой среде. В сб. Теория и практика добычи нефти. М., «Недра», 1968.
5. *Баренблатт Г. И.* Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в однородной пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
6. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М.* Неравновесные эффекты при фильтрации несмешивающихся жидкостей. В сб. Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск, 1972.
7. *Медведков В. И.* Расщепление потока по микроструктуре пористой среды в задачах вытеснения нефти водой. В сб. Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск, Вычисл. центр СО АН СССР, 1975.
8. *Цыбульский Г. П.* Уравнения неравновесной двухфазной фильтрации. В сб. Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск, 1977.
9. *Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И., Степанова Г. С., Терзи В. П.* Движение углеводородных смесей в пористой среде. М., «Недра», 1968.
10. *Бан А., Богомолова А. Ф., Максимов В. А., Николаевский В. Н., Оганджанянц В. Г., Рыжик В. М.* Влияние свойств горных пород на движение в них жидкостей. М., Гостоптехиздат, 1962.
11. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., «Мир», 1975.