МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1980

УДК 532.529.5

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ОБТЕКАЕМОЙ ДВУХФАЗНЫМ ПОТОКОМ

Я. Д. ЯНКОВ

(Москва)

В настоящей работе обсуждается вопрос о граничных условиях на твердой поверхности, обтекаемой двухкомпонентным дисперсным потоком. Для кинетического уравнения и макроскопических уравнений псевдогаза из твердых частиц, предложенных в [1–3], получены соответствующие граничные условия. Обсуждаются причины возникновения пузырей в двухфазных системах. На основе параметров подобия кинетического уравнения псевдогаза дана общая классификация дисперсных систем в зависимости от концентрации твердых частиц и их диаметров.

1. Граничные условия для кинетического уравнения псевдогаза. Тело с поверхностью S обтекается двухфазным потоком, состоящим из жидкости (сплошной фазы) и твердых сферических частиц (псевдогаза) с диаметром $\sigma=2a$, где a — радиус твердой частицы. Если для сплошной фазы на поверхности тела можно задавать граничные условия прилипания, то вопрос о граничных условиях для псевдогаза нуждается в дополнительном обсуждении.

Конечность диаметра твердых частиц требует, чтобы граничные условия для твердой фазы задавались не на поверхности S твердого тела, а на поверхности S_a, находящейся на расстоянии a от поверхности S в сторону псевдогаза. Пусть через $\mathbf{n}$ обозначен единичный вектор, нормальный к поверхности S_a и направленный в сторону потока.

Аналогично, как и в динамике разреженного газа [4], число частиц, падающих в единицу времени на единицу площади поверхности S_a со скоростью $\mathbf{c}_i$ в интервале $d\mathbf{c}_i$ в точке $\mathbf{r}\in S_a$, равно $\Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t)\,d\mathbf{c}_i$, где $\Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t)$ — пока неизвестная функция, зависящая от одночастичной функции распределения $f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t)$ [3].

Часть из этих частиц, равная $\Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t)\,W(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_r)\,d\mathbf{c}_i d\mathbf{c}_r$, отразится со скоростью $d\mathbf{c}_r$ около точки $\mathbf{c}_r$. Здесь через $W(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_r)\,d\mathbf{c}_i d\mathbf{c}_r$ обозначена вероятность того, что твердая частица, падающая со скоростью $\mathbf{c}_i$ в интервале $d\mathbf{c}_i$, отразится от поверхности со скоростью $\mathbf{c}_r$ в интервале $d\mathbf{c}_r$. Таким образом, полное число твердых частиц, отраженных от единицы поверхности со скоростями $d\mathbf{c}_r$ около точки $\mathbf{c}_r$, задается формулой

$$\Phi_r(\mathbf{r}, \mathbf{c}_r, t)\,d\mathbf{c}_r = d\mathbf{c}_r \int\limits_{\mathbf{cn}<0} \Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t)\,W(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_r)\,d\mathbf{c}_i \tag{1.1}$$

где интегрирование ведется по всем скоростям твердых частиц, летящих к стенке $\mathbf{cn}<0$.

Так как число падающих частиц должно равняться числу отраженных, т. е.

$$\int\limits_{\mathbf{cn}>0} \Phi_r(\mathbf{r}, \mathbf{c}_r, t)\,d\mathbf{c}_r = \int\limits_{\mathbf{cn}<0} \Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t)\,d\mathbf{c}_i \tag{1.2}$$

то функция $W(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_r)$ должна удовлетворять условию нормировки

$$\int\limits_{\mathbf{cn}>0} W(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_r)\, d\mathbf{c}_r = 1 \tag{1.3}$$

В дальнейшем необходимо найти связь функций Φ_i и Φ_r с функцией распределения f. Для этого подсчитаем поток твердых частиц, проходящий через площадь поверхности d^2s в интервале времени dt со скоростями $d\mathbf{c}$ около точки $\mathbf{c}$. Как уже отмечалось в [3,5], из-за конечности диаметра твердых частиц необходимо учитывать столкновительный перенос. В результате поток твердых частиц будет складываться из трех частей. Поток твердых частиц, пересекающих в интервале времени dt элемент площади d^2s со скоростью $\mathbf{c}$ в интервале $d\mathbf{c}$, не сталкиваясь с другими частицами: $\Phi_1 d\mathbf{c} d^2s dt$. Поток твердых частиц, которые в момент пересечения поверхности d^2s приобрели скорости $\mathbf{c}$ в результате столкновения с другими частицами: $\Phi_2 d\mathbf{c} d^2s dt$. Поток твердых частиц, которые в момент пересечения поверхности d^2s в результате столкновения с другими частицами потеряли свою скорость, раньше находящуюся в интервале $d\mathbf{c}$ около точки $\mathbf{c}$: $\Phi_3 d\mathbf{c} d^2s dt$.

В таком случае, очевидно, выполняется равенство

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 \tag{1.4}$$

Отметим, что элемент поверхности d^2s пока не относится к поверхности S_a, а является произвольным элементом поверхности, находящейся внутри псевдогаза.

Пусть площадка d^2s находится в точке $\mathbf{r}$ и пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к d^2s, направленный в сторону движения твердых частиц, пересекающих площадку. Аналогично, как и в теории разреженного газа ([4], стр. 77), для Φ_1 получается

$$\Phi_1(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) = (\mathbf{nc}) f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) \tag{1.5}$$

Идеи теории Энскога для плотных газов ([5], стр. 354) дают возможность получить функции Φ_2 и Φ_3, зависящие от функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)$. Пусть первая частица находится с положительной стороны элемента поверхности d^2s, а вторая — с отрицательной. Тогда скалярное произведение $\mathbf{kn}$ положительно, так как $\mathbf{k}$ — единичный вектор линии центров, направленный от второй к первой частице в момент столкновения. Когда твердые частицы сталкиваются, линия центров пересекает элемент d^2s и, следовательно, первая частица должна лежать внутри цилиндра с основанием d^2s и объемом, равным $\sigma(\mathbf{kn}) d^2s$. В единицу времени вблизи момента t среднее число столкновений, для которых $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{k}$ лежат соответственно в интервалах $d\mathbf{c}$, $d\mathbf{c}_1$ и $d^2\mathbf{k}$, можно записать как

$$f\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\sigma\mathbf{k}\right) f_1\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\sigma\mathbf{k}\right) \sigma^3 (\mathbf{gk})\, d^2k\, d\mathbf{c}\, d\mathbf{c}_1 (\mathbf{kn})\, d^2s \tag{1.6}$$

Из (1.6) для Φ_3 и Φ_2 получим

$$\Phi_3 = \sigma \iint\limits_{\mathbf{gk}>0,\ \mathbf{kn}>0} f\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\sigma\mathbf{k}\right) f_1\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\sigma\mathbf{k}\right) \sigma^2 (\mathbf{gk})\, (\mathbf{kn})\, d^2k\, d\mathbf{c}_1 \tag{1.7}$$

$$\Phi_2 = \sigma \iint\limits_{\mathbf{g}'\mathbf{k}'>0,\ \mathbf{k}'\mathbf{n}<0} f'\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\sigma\mathbf{k}'\right) f_1'\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\sigma\mathbf{k}'\right) \times \tag{1.8}$$

$$\times \sigma^2 (\mathbf{g}'\mathbf{k}')\, (\mathbf{k}'\mathbf{n})\, d^2k'\, d\mathbf{c}_1$$

где $\mathbf{g}$ — относительная скорость, а $\mathbf{g}'$ и $\mathbf{k}'$ — относительная скорость и единичный вектор линий центров для обратных столкновений. Между параметрами прямых и обратных столкновений существуют следующие связи: $\mathbf{k}'=-\mathbf{k}$ и $\mathbf{g}'=-\mathbf{g}$. По определению, $\mathbf{kn}>0$ и $\mathbf{k}'\mathbf{n}<0$, а $\mathbf{gk}=\mathbf{g}'\mathbf{k}'>0$ означает, что столкновение произошло. Из этих соотношений и (1.5), (1.7) и (1.8) для Φ окончательно получается

$$(1.9)\qquad \Phi=(\mathbf{nc})f(\mathbf{r},\mathbf{c},t)+\sigma\iint\limits_{\mathbf{gk}>0,\ \mathbf{kn}>0}\left[f'\left(\mathbf{r}-\frac{1}{2}\sigma\mathbf{k}\right)f_1'\left(\mathbf{r}+\frac{1}{2}\sigma\mathbf{k}\right)-\right.$$
$$\left.-f\left(\mathbf{r}+\frac{1}{2}\sigma\mathbf{k}\right)f_1\left(\mathbf{r}-\frac{1}{2}\sigma\mathbf{k}\right)\right]\sigma^2(\mathbf{gk})(\mathbf{kn})\,d^2k\,d\mathbf{c}_1$$

Ввиду того что вектор нормали $\mathbf{n}$ поверхности S_a направлен в сторону псевдогаза, то

$$(1.10)\qquad \Phi_i=-\Phi(\mathbf{r},\mathbf{c}_i,t),\qquad \Phi_r=\Phi(\mathbf{r},\mathbf{c}_r,t)$$

Таким образом, граничное условие для кинетического уравнения псевдогаза получается из выражений (1.1), (1.9) и (1.10). Оно справедливо в том случае, когда на поверхности обтекаемого тела твердые частицы не терпят физических и химических изменений, а только отражаются. Отметим, что функцию $W(\mathbf{c}_i,\ \mathbf{c}_r)$ необходимо задать или каким-то образом определить, зная детали процесса отражения от поверхности.

Полученное граничное условие намного сложнее того, что известно в кинетической теории газов. Является ли оно подходящим для предлагаемой теории [1–3], пока неясно. Утвердительный ответ на этот вопрос можно получить только в том случае, если удастся доказать теорему существования и единственности решения кинетического уравнения псевдогаза с полученным граничным условием вместе с уравнениями для сплошной фазы, что само по себе чрезвычайно сложная задача.

Упростим полученное граничное условие. Если его запишем в безразмерном виде [3], то первый член в правой части (1.9) будет порядка единицы, а второй — порядка σ/λ, где λ — свободный пробег твердых частиц. Если предположим $\sigma/\lambda\ll 1$, то влиянием столкновительных членов можно пренебречь, так что в дальнейшем будем пользоваться хорошо известным соотношением [6]

$$(1.11)\qquad (\mathbf{nc}_r)f(\mathbf{r},\mathbf{c}_r,t)=-\int\limits_{\mathbf{cn}<0}(\mathbf{nc}_i)f(\mathbf{r},\mathbf{c}_i,t)W(\mathbf{c}_i,\mathbf{c}_r)\,d\mathbf{c}_i$$

где $\mathbf{r}\in S_a$, т. е. граничное условие задается на расстоянии a от поверхности S твердого тела.

Сделанное предположение при выводе (1.11) соответствует требованию, что диаметр твердых частиц намного меньше их свободного пробега.

2. Граничные условия для макроскопических уравнений псевдогаза. В работе [3] были получены дифференциальные уравнения в частных производных для макроскопических характеристик псевдогаза при предположении, что число Кнудсена намного меньше единицы. Для получения граничных условий для этих уравнений в первую очередь необходимо знать функцию $W(\mathbf{c}_i,\ \mathbf{c}_r)$. Предположим, что твердые частицы отражаются зеркально-диффузно от поверхности [4].

Граничные условия в среднем для макроскопических уравнений получим в случае обтекания изотропной пластины. Как известно, изотропной называется поверхность, на которой частицы отражаются в плоскости, определенной векторами нормали к поверхности и скорости падающих частиц. Для удобства все расчеты будут вестись в следующей декартовой системе координат, связанной с поверхностью S_a: первая ось по направлению вектора нормали в сторону псевдогаза, вторая — по направлению обтекаемого потока, а третья ось выбирается так, чтобы система координат была правой.

Если определим коэффициенты аккомодаций тангенциального импульса и энергии обычным образом [4, 6], т. е. не учитывая влияния столкновительного переноса, то граничные условия в среднем получаются путем последовательного умножения (1.11) на m, mc_{r2}, mc_r^2 с последующим интегрированием по скоростям отраженных частиц. Так как функция распределения равна [3]

$$f=f^{(0)}\left\{1-\frac{1}{n_p}\left[\left(1+\frac{2}{5}\pi n_p\sigma^3\right)\frac{2}{5}\frac{m\lambda^{(0)}}{T_p}\left(\frac{mC^2}{2T_p}-\frac{5}{2}\right)\mathbf{C}\nabla\ln T_p+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(1+\frac{4}{15}\pi n_p\sigma^3\right)\frac{m\eta^{(0)}}{T_p^2}\left(\mathbf{CC}-\frac{1}{2}C^2\mathbf{I}\right):\mathbf{E}\right]\right\} \tag{2.1}$$

где все величины и обозначения определены в упомянутой работе, то граничные условия в среднем на поверхности S_a после громоздких, но простых вычислений нетрудно получить в следующем виде:

$$u_{p1}=0 \tag{2.2}$$

$$u_{p2}\left\{1+\frac{4}{5}\left(1+\frac{2}{5}\pi n_p\sigma^3\right)\sqrt{\frac{\pi m}{2T_w}}\frac{\lambda^{(0)}}{n_{pw}T_p}\frac{\partial T_p}{\partial r_2}-\right.$$
$$-\frac{2}{3}\frac{\eta^{(0)}}{n_{pw}T_p}\left[\left(1+\frac{4}{15}\pi n_p\sigma^3\right)\left(\frac{\partial u_{p1}}{\partial r_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial u_{p2}}{\partial r_2}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{m}{2T_p}\left(G^{11}-\frac{1}{2}G^{22}\right)+\Phi_{01}-\frac{1}{2}\Phi_{02}\right]\right\}=$$
$$=\frac{1}{5}\left(1+\frac{2}{5}\pi n_p\sigma^3\right)\frac{\lambda^{(0)}}{n_{pw}T_p}\frac{\partial T_p}{\partial r_2}+\frac{(2-\tau)}{\tau}\sqrt{\frac{\pi m}{2T_w}}\frac{\eta^{(0)}}{mn_{pw}}\times$$
$$\times\left[\left(1+\frac{4}{15}\pi n_p\sigma^3\right)\left(\frac{\partial u_{p1}}{\partial r_2}+\frac{\partial u_{p2}}{\partial r_1}\right)-\frac{m}{2T_p}(G^{12}+G^{21})\right] \tag{2.3}$$

$$T_p-T_w=\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\left\{\frac{4}{5}\left(1+\frac{2}{5}\pi n_p\sigma^3\right)\sqrt{\frac{\pi m}{2T_w}}\frac{\lambda^{(0)}}{n_{pw}}\frac{\partial T_p}{\partial r_1}-\right.$$
$$-\frac{5}{6}\frac{\eta^{(0)}}{n_{pw}}\left[\left(1+\frac{4}{15}\pi n_p\sigma^3\right)\frac{\partial u_{p1}}{\partial r_1}+\Phi_{01}-\frac{m}{2T_p}G^{11}\right]-$$
$$-u_{p2}\left[\frac{1}{20}\left(1+\frac{2}{5}\pi n_p\sigma^3\right)\frac{m\lambda^{(0)}}{n_{pw}T_p}\frac{\partial T_p}{\partial r_2}-\right.$$
$$-\frac{(2+\tau)}{\tau}\sqrt{\frac{\pi m}{2T_w}}\frac{\eta^{(0)}}{n_{pw}}\left(\left(1+\frac{4}{15}\pi n_p\sigma^3\right)\left(\frac{\partial u_{p1}}{\partial r_2}+\frac{\partial u_{p2}}{\partial r_1}\right)-\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{m}{2T_p}(G^{12}+G^{21})\right)\right]\right\}$$

где τ и α — соответственно коэффициенты аккомодаций тангенциального импульса и энергии, $G^{\alpha\beta}$ — коэффициенты диффузии, $\Phi_{0\alpha}$ — постоянные времени [2, 3], а T_w — средняя кинетическая энергия (температура), уносимая частицами от поверхности в состоянии равновесия. Выражения (2.2)—(2.4) соответственно характеризуют условия непроницаемости, скольжения скорости и «теплового» скачка на поверхности S_a. Полученные граничные условия явно учитывают влияние сплошной среды на движение твердых частиц и влияние неоднородностей, возникающих за счет конечного диаметра частиц.

3. Причины возникновения пузырей в дисперсных системах. Диффузионные коэффициенты $G^{\alpha\beta}$ и постоянные времени $\Phi_{0\alpha}$ по определению [2] зависят от скорости сплошной среды $\mathbf{v}$. Так как скорость жидкости на поверхности S_a вообще отлична от нуля ($\mathbf{v}\neq 0$ на S_a), то при достаточно большой скорости сплошной фазы $\mathbf{v}_*$ влияние вязкости псевдогаза можно компенсировать и выражение в фигурных скобках (2.3) может равняться нулю. При таком условии твердые частицы перестают сталкиваться с поверхностью, а это и есть начало возникновения пузыря. На поверхности обтекаемого тела образуется что-то вроде воздушной подушки, внутрь которой твердые частицы не попадают. В дальнейшем пузырь может подниматься и даже отрываться от поверхности тела.

Ввиду этих соображений сформулируем общий критерий образования пузырей. Обозначим через

$$N_i=-m\int\limits_{\mathbf{cn}<0}(\mathbf{nc}_i)f(\mathbf{r},\mathbf{c}_i,t)\,d\mathbf{c}_i \tag{3.1}$$

поток падающих на поверхность S_a твердых частиц, где функция распределения зависит от скорости сплошной среды $\mathbf{v}$ [2].

Критической скоростью рождения пузыря называется та скорость жидкости $\mathbf{v}_*$, для которой поток падающих частиц на поверхности S_a равняется нулю, т. е.

$$N_i(\mathbf{v}_*)=-m\int\limits_{\mathbf{cn}<0}(\mathbf{nc}_i)f(\mathbf{r},\mathbf{c}_i,\mathbf{v}_*,t)\,d\mathbf{c}_i=0,\quad \mathbf{r}\in S_a \tag{3.2}$$

Если в (3.2) поставим (2.1), то получается, что поток падающих частиц равен выражению в фигурных скобках (2.3), а следовательно, пузырь родился при скорости жидкости $\mathbf{v}_*$.

Критическая скорость рождения пузыря не определена однозначно, так как условие (3.2) реализуется при разных комбинациях между продольной и поперечной скоростями сплошной фазы, что видно из структуры диффузионных коэффициентов и постоянных времени [2]. Следовательно, между продольной и поперечной критическими скоростями рождения пузыря существует связь типа $l(v_{*1}, v_{*2})=0$, которая определяется из условия (3.2) в момент возникновения пузыря. В пространстве скоростей (v_{*1}, v_{*2}) равенство $l(v_{*1}, v_{*2})=0$ задает критическую линию рождения, а в трехмерном случае — критическую поверхность рождения.

После возникновения пузыря уравнение его поверхности определяется равенством

$$N_i(\mathbf{v}_*)=-m\int\limits_{\mathbf{cn}<0}(\mathbf{nc}_i)f(\mathbf{r},\mathbf{c}_i,\mathbf{v}_*,t)\,d\mathbf{c}_i=0 \tag{3.3}$$

при $\mathbf{r}\in\Omega$, где $\mathbf{n}$ — уже вектор нормали поверхности Ω в сторону псевдогаза, а $\mathbf{v}_*$ определена из (3.2) в момент возникновения пузыря.

О дальнейшем поведении пузыря можно судить после решения конкретных задач, однако и сейчас ясно, что на его поверхности Ω необходимо задавать подходящие граничные условия. Из физических соображений граничные условия на поверхности пузыря могут быть следующие: непроницаемость пузыря, отсутствие трения и теплового потока на его поверхности.

Отметим, что пузырь существует только в том случае и в тех областях течения, где выполняется равенство $l(v_{*1}, v_{*2})=0$, и начинает распадаться, если оно нарушается.

4. Классификация дисперсных систем. После получения граничного условия на твердой поверхности для кинетического уравнения псевдогаза задача об обтекании твердого тела двухкомпонентным потоком замкнулась. Теперь для решения конкретных задач очень важно выяснить влияние безразмерных параметров, определяющих движение двухфазной дисперсной системы. Параметры подобия для сплошной фазы хорошо известны [7], а для псевдогаза их влияние частично обсуждалось в [3] и в настоящей работе. Для кинетического уравнения псевдогаза была получена следующая безразмерная форма [3]

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{c}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+\frac{1}{\mathrm{Fr}}\mathrm{G}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}}=\frac{1}{\mathrm{Kn}}J_{pp}(f)+\frac{1}{\mathrm{Nm}}J_{pf}(f)$$

где $J_{pp}(f)$ — оператор динамического взаимодействия, $J_{pf}(f)$ — оператор гидродинамического взаимодействия, Sh — число Струхаля, Fr — число Фруда, Kn — число Кнудсена и Nm — критерий межфазного обмена количеством движения.

Особого внимания заслуживают безразмерные числа Kn и Nm, поскольку они определяют релаксационные процессы в псевдогазе. В зависимости от их значения можно произвести довольно общую классификацию дисперсных систем.

Так как число Кнудсена характеризует степень разреженности, то по этому признаку дисперсные системы можно разделить на три группы: сильно разреженные — $\mathrm{Kn}\gg1$, умеренно разреженные — $\mathrm{Kn}\sim1$ и слабо разреженные — $\mathrm{Kn}\ll1$.

Немного по-другому стоит вопрос о влиянии критерия межфазного обмена количеством движения Nm, который зависит от диаметра твердых частиц. Если геометрические параметры обтекаемой системы фиксированы, то в зависимости от размеров частиц имеются три основные группы дисперсных систем: с маленьким диаметром твердых частиц (броуновские частицы) — $\mathrm{Nm}\ll1$; с умеренным диаметром — $\mathrm{Nm}\sim1$ и с крупным диаметром — $\mathrm{Nm}\gg1$.

Если фиксируем диаметр твердых частиц, а меняем размеры обтекаемой системы, то меняется безразмерное число Nm. Данная ситуация очень существенна для процессов в химической технологии, где практически необходимо фиксировать диаметр частиц и их среднюю скорость с целью правильного протекания химических реакций. Тогда любое изменение размеров химических аппаратов влечет за собой изменения критерия межфазного обмена количеством движения, а в результате по-другому протекают релаксационные процессы в псевдогазе. Таким образом, довольно крупные частицы могут начать двигаться как броуновские и обратно, что ведет к получению других уравнений для макроскопических характеристик.

Данная классификация позволяет определить область применимости некоторых из существующих моделей дисперсных систем. Не представляет особой трудности заметить, что классические результаты Эйнштейна и Смолуховского [8, 9] относятся к сильно разреженным дисперсным системам из мелких частиц: $\mathrm{Kn}\gg1$, $\mathrm{Nm}\ll1$; основные результаты в монографиях [10, 11] — к слабо разреженным дисперсным системам из крупных части: $\mathrm{Kn}\ll1$ и $\mathrm{Nm}\gg1$; а результаты в [1, 3] — к слабо разреженным дисперсным системам из частиц с умеренным диаметром: $\mathrm{Kn}\ll1$ и $\mathrm{Nm}\sim1$.

Автор благодарит В. П. Мясникова за постановку задачи и полезное обсуждение.

Поступила 15 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мясников В. П.* О динамических уравнениях движения двухкомпонентных систем. ПМТФ, 1967, № 2.
2. *Янков Я. Д.* Кинетическая теория дисперсных систем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 1.
3. *Янков Я. Д.* Макроскопические уравнения движения дисперсных систем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 2.
4. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
5. *Ferziger J. H., Kaper H. G.* Mathematical theory of transport processes in gases. Amsterdam – London, North – Holl. Publ. Co., 1972 (Рус. перев.: Математическая теория процессов переноса в газах. М., «Мир», 1976).
6. *Баранцев Р. Г.* Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М., «Наука», 1975.
7. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1965.
8. *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр., т. 3. М., «Наука», 1966.
9. *Эйнштейн А., Смолуховский М.* Броуновское движение. М., Гостехиздат, 1936.
10. *Soo S. L.* Fluid dynamics of multiphase systems. Toronto – London, Blaisdell Publ. Co., 1967 (Рус. перев.: Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971).
11. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М., «Наука», 1978.