МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1980

УДК 532.135

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В КАНАЛЕ

С. Л. БЕНДЕРСКАЯ, Б. М. ХУСИД, З. П. ШУЛЬМАН

(Минск)

Исследуется неизотермическое движение реологически сложной жидкости в плоскопараллельном канале при граничных условиях третьего рода на внешних поверхностях стенок канала с учетом диссипации механической энергии и температурной зависимости коэффициентов. Проводится качественное исследование задачи при произвольной зависимости текучести от температуры. Рассматриваются частные случаи течения линейной вязкопластичной и «степенной» сред со скачкообразным изменением предела текучести и коэффициента консистенции с температурой. Показано, что при определенных условиях в канале реализуется несколько различных режимов течения одновременно и возможен гистерезисный характер изменения расхода среды в канале с температурой окружающей среды.

Одна из особенностей течения высоковязких неньютоновских жидкостей — их повышенная теплочувствительность и сильное влияние неизотермичности из-за большой диссипации механической энергии и резкой температурной зависимости текучести.

В работах [1–11] рассмотрены течения сред с гиперболической и экспоненциальной зависимостями вязкости от температуры для пуазейлевского и куэттовского течений, когда возможно возникновение критических условий теплового режима течения жидкости — типа гидродинамического теплового взрыва — вследствие того, что тепло, связанное с диссипацией, не успевает отводиться через стенки канала и стационарное решение отсутствует.

При учете ограниченности времени пребывания жидкости в канале [6–9] из-за нелинейности диссипативной функции тепловыделения возможен скачкообразный переход от низкотемпературного к высокотемпературному режиму течения и обратно.

Для вязкопластичных жидкостей задачи такого типа все еще остаются малоизученными. В работах [10, 11] исследовалось движение вязкопластичных сред для частных условий при одновременном изменении по гиперболическому закону пластической вязкости и предельного напряжения сдвига. Авторы уделяют основное внимание определению условий возникновения резкого разогрева жидкости и не затрагивают вопрос о режиме течения после такого разогрева.

Известны материалы, резко изменяющие текучесть в узком температурном интервале, например нефти, смеси полимеров и т. д. Вследствие этого при их течении в канале может существовать несколько профилей скоростей и температур, описываемых несколькими решениями рассматриваемой задачи. Некоторые из этих решений неустойчивы.

Рассмотрим неизотермическое движение реологически сложной жидкости — плоское течение при установившемся теплообмене, когда температурное поле меняется только поперек канала.

Математическая формулировка задачи включает уравнение энергии для жидкости с учетом диссипации энергии и температурной зависимости реологических свойств; уравнение теплопроводности для стенки канала; граничное условие на плоскости симметрии; условия сопряжения на внутренней стенке канала, выражающие непрерывность температур и тепловых потоков; симметричные граничные условия третьего рода на внешних поверхностях стенок канала:

$$\frac{d}{dy}\left(\lambda_f\frac{dT_f}{dy}\right)+\tau^2\varphi(\tau,T_f)=0,\quad 0\leqslant y<h \tag{1}$$

$$\frac{d}{dy}\left(\lambda_W\frac{dT_W}{dy}\right)=0,\quad h\leqslant y\leqslant h+b \tag{2}$$

$$\left.\frac{dT_f}{dy}\right|_{y=0}=0 \tag{3}$$

$$T_W|_{y=h}=T_f|_{y=h},\quad \lambda_W\left.\frac{dT_W}{dy}\right|_{y=h}=\lambda_f\left.\frac{dT_f}{dy}\right|_{y=h} \tag{4}$$

$$\lambda_W\left.\frac{dT_W}{dy}\right|_{y=h+b}=\alpha[T_C-T_W|_{y=h+b}] \tag{5}$$

Здесь y — поперечная координата, отсчитываемая от средней плоскости канала, h — полуширина канала, b — толщина стенки, α — коэффициент теплообмена, T_C — температура окружающей среды, τ — напряжение сдвига, $\varphi=\dot\gamma/\tau$ — функция текучести, зависящая от касательного напряжения и температуры (конкретный вид функции текучести задается реологическим уравнением состояния жидкости), $\dot\gamma$ — скорость сдвига.

Как известно, для пуазейлевского течения касательное напряжение сдвига нарастает линейно поперек канала $\tau=y\tau_W/h$, где τ_W — напряжение сдвига на стенке. Распределение продольной скорости u определяется из уравнения

$$du/dy=-\tau\varphi(\tau,\ T_f)$$

Введем соотношение, связывающее расход жидкости через поперечное сечение канала с температурным профилем на внутренней стенке канала

$$Q=\int\limits_0^h u\,dy=-\int\limits_0^h y\frac{du}{dy}dy=\frac{h}{\tau_W}\int\limits_0^{\tau_W}\tau^2\varphi(\tau,T_f)\,dy=-\lambda_f\left.\frac{dT_f}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_W}$$

Здесь использованы уравнение (1) и граничное условие $u|_{y=h}=0$.

Ввиду неотрицательности функции текучести из уравнения энергии для жидкости (1) следует, что $dT_f/dy\leqslant 0$. Таким образом, максимальное значение температуры достигается в середине канала. Если решение задачи (1)—(5) существует, то ему соответствует некоторое максимальное значение температуры в центре канала T_K. Тогда однозначность краевой задачи (1)—(5) можно оценить, исследуя зависимость $T_K(T_C)$. Ее можно определить из решения задачи Коши с граничным условием

$$T_f|_{y=0}=T_K$$

Краевая задача (1)—(5) в безразмерном виде сводится к следующему интегральному уравнению:

$$\Theta=\Theta_C+\beta\int\limits_\eta^1 dz\int\limits_0^z \xi^2\varphi(\xi,\Theta)\,d\xi+\left(\frac{4}{3}l-1\right)\beta\int\limits_0^1\eta^2\varphi(\eta,\Theta)\,d\eta \tag{6}$$

Здесь $\Theta=(T-T_P)/T_P$ (T_P — некоторая характерная температура изменения реологических свойств жидкости), $\eta=y/h=\tau/\tau_W$ (для пуазейлевского течения), $\beta=h^2\tau_W^2/\lambda_f\mu T_P$, μ — характерное значение вязкости среды, $l={}^3/_4[1+\lambda(\delta+1/\mathrm{Bi})]$, $\lambda=\lambda_f/\lambda_W$, $\delta=b/h$, $\mathrm{Bi}=\alpha h/\lambda_W$.

Проанализируем (6), используя соотношения, аналогичные [5]. Если температура окружающей среды

(7) $$\Theta_C=\Theta_K-\beta\int_0^1\left(\frac{4}{3}l-\eta\right)\eta^2\varphi(\eta,\Theta)\,d\eta\quad(\Theta_K=\Theta|_{\eta=0})$$

такова, что $\tau_0(T_C)<\tau_W$, то $\varphi(1,\Theta_C)>0$.

Здесь выделен случай вязкопластичных жидкостей, обладающих пределом текучести $\tau_0(T)$. Закон текучести есть монотонно возрастающая неотрицательная функция переменных η и Θ. Из (7) следует, что $\beta\to0$ при $\Theta_K\to\Theta_C$. Если же Θ_C таково, что $\tau_0(T_C)>\tau_W$,— движение отсутствует, $\Theta_K=\Theta_C$.

Вследствие монотонности функций $\varphi(\eta,\Theta)$ и $d\Theta/d\eta$

$$\Theta_i+(1-\eta)(\Theta_K-\Theta_i)\leqslant\Theta\leqslant\Theta_K\quad(\Theta_i=\Theta|_{\eta=1}),\ 0\leqslant\eta\leqslant1$$

$$\varphi\{\eta,\Theta_i+(1-\eta)(\Theta_K-\Theta_i)\}\leqslant\varphi(\eta,\Theta)\leqslant\varphi(\eta,\Theta_K)$$

Из последнего соотношения получаем следующую оценку для $\beta=\beta(\Theta_K)$:

(8) $$\left[\int_0^1 d\eta\int_0^\eta\xi^2\frac{\varphi(\xi,\Theta_K)}{\Theta_K-\Theta_C}d\xi+\left(\frac{4}{3}l-1\right)\int_0^1\eta^2\frac{\varphi(\eta,\Theta_K)}{\Theta_K-\Theta_C}d\eta\right]^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant\beta\leqslant\left[\int_0^1 d\eta\int_0^\eta\xi^2\frac{\varphi\{\xi,\Theta_i+(1-\xi)(\Theta_K-\Theta_i)\}}{\Theta_K-\Theta_C}d\xi+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{4}{3}l-1\right)\int_0^1\eta^2\frac{\varphi\{\eta,\Theta_i+(1-\eta)(\Theta_K-\Theta_i)\}}{\Theta_K-\Theta_C}d\eta\right]^{-1}.$$

Поведение решения краевой задачи (1)—(5) зависит от пределов изменения функции $\beta(\Theta_K)$ при $\Theta_K>\Theta_C$. Если $\sup\limits_{\Theta_C\leqslant\Theta_K}\beta(\Theta_K)=\infty$, то реализуется некоторый стационарный режим, если же $\sup\limits_{\Theta_C\leqslant\Theta_K}\beta(\Theta_K)$ ограничен, стационарный режим существует лишь для области значений $\beta\leqslant\sup\limits_{\Theta_C\leqslant\Theta_K}\beta(\Theta_K)$.

Согласно неравенству (8), область изменения $\beta(\Theta_K)$ зависит от поведения функции текучести $\varphi(\eta,\Theta_K)$ при достаточно больших Θ_K. Область изменения $\beta(\Theta_K)$ совпадает со всей полуосью $\sup\limits_{\Theta_C\leqslant\Theta_K}\beta(\Theta_K)=\infty$, если

(9) $$\inf_{\Theta_C\leqslant\Theta_K}\int_0^1\frac{\varphi(\eta,\Theta_K)}{\Theta_K-\Theta_C}\eta^2d\eta=0$$

В случае

(10) $$\inf_{\Theta_C\leqslant\Theta_K}\int_0^1\frac{\varphi\{\eta,\Theta_i+(1-\eta)(\Theta_K-\Theta_i)\}}{\Theta_K-\Theta_C}\cdot\eta^2d\eta>0$$

из непрерывности функции $\beta(\Theta_K)$ вытекает ее ограниченность.

Ввиду трудности анализа функций $\Theta_i(\Theta_\kappa)$ проверку неравенства (10) следует начинать с оценки наименьшего значения интеграла, стоящего в правой части выражения

$$(11)\qquad \inf_{\Theta_C\leqslant\Theta_K}\int_0^1 \frac{\varphi\{\eta,\Theta_i+(1-\eta)(\Theta_\kappa-\Theta_i)\}}{\Theta_\kappa-\Theta_C}\eta^2\,d\eta\geqslant$$

$$\geqslant\inf_{\Theta_C\leqslant\Theta_K}\int_0 \frac{\varphi\{\eta,\Theta_C+(1-\eta)(\Theta_\kappa-\Theta_C)\}}{\Theta_\kappa-\Theta_C}\eta^2\,d\eta$$

При экспоненциальной или «степенной» (для значений показателя степени $m\geqslant1$) зависимостях реологических свойств от температуры существует критическое значение параметра β, выше которого стационарное решение отсутствует.

Рассмотрим зависимость $\Theta_C=\Theta_C(\Theta_\kappa)$ (7). При небольших значениях $\partial\varphi/\partial\Theta$ существует единственное решение краевой задачи. С увеличением $\partial\varphi/\partial\Theta$ возможно несколько решений, поскольку величина $\partial\Theta_C/\partial\Theta_\kappa$ может стать меньшей нуля. Решение с отрицательным значением $\partial\Theta_C/\partial\Theta_\kappa$ неустойчиво, так как в этом случае

$$\frac{\partial T_0}{\partial T_\kappa}<\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\Phi_\Sigma}{\partial T_\kappa},\qquad \Phi_\Sigma=\int_0^h\tau^2\varphi\,dy$$

где T_0 — температура внешней поверхности стенок канала, Φ_Σ — суммарная диссипация механической энергии в потоке жидкости.

Таким образом, с ростом температуры на оси канала диссипативное тепловыделение Φ_Σ более интенсивно, нежели теплоотвод в окружающую среду, жидкость саморазогревается.

Неоднозначные решения могут получиться при скачкообразном изменении реологических свойств. Качественные особенности процесса рассмотрим на двух простых примерах. Исследуем влияние температурной зависимости предельного напряжения сдвига τ_0 вязкопластичной жидкости. Реологическое уравнение среды описывается моделью Шведова — Бингама со ступенчатой температурной зависимостью предела текучести и постоянной пластической вязкостью

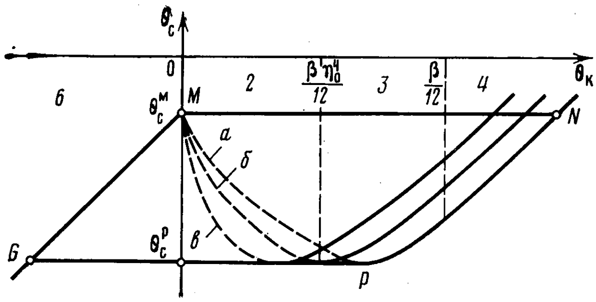
$$(12)\qquad \varphi(\tau,T)=\begin{cases}(\tau-\tau_0)/\mu\tau, & T<T_P\\ 1/\mu, & T\geqslant T_P\end{cases}$$

Здесь T_P — температура, при которой исчезают пластические свойства материала. Ранее показано, что для такой среды всегда существует решение задачи (1)—(5), т. е. реализуется стационарный режим.

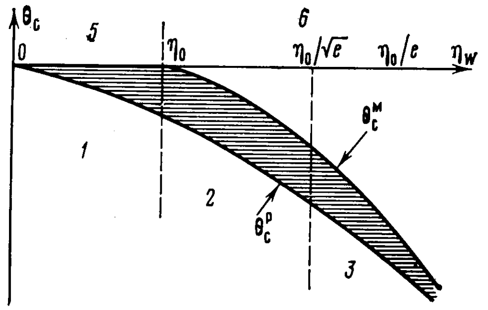
Проанализируем течение выбранной жидкости в плоском канале. Вследствие монотонности функции $\Theta(\eta)$ имеется единственное значение $\eta=\eta_*$, при котором $\Theta(\eta_*)=0$. В зависимости от соотношения величин $\eta_0=\tau_0/\tau_W$, η_*, 1 и температуры Θ_κ на оси канала могут реализоваться следующие режимы течения.

При $\Theta_\kappa>0$: 1 — зоны ньютоновского течения ($\eta\leqslant\eta_*$) и квазитвердой области у стенки ($\eta_*<\eta\leqslant1$); 2 — ньютоновского ($\eta<\eta_*$), квазитвердого ($\eta_*\leqslant\eta\leqslant\eta_0$) и вязкопластичного сдвигового ($\eta_0<\eta\leqslant1$) течения; 3 — ньютоновского ($\eta\leqslant\eta_*$, $\eta_0<\eta_*$) и вязкопластичного сдвигового ($\eta_*<\eta\leqslant1$) течения; 4 — ньютоновского течения ($\eta_*>1$). При $\Theta_\kappa<0$: 5 — квазитвердое ядро ($\eta_0\geqslant1$); 6 — зоны квазитвердого ($\eta\leqslant\eta_0$) и вязкопластичного сдвигового ($\eta_0<\eta\leqslant1$) течения.

График функции $\Theta_c(\Theta_\kappa)$ представлен на фиг. 1 для случаев: *а* — $\eta_0<l<1$; *б* — $l<\eta_0<\sqrt{l}<1$; *в* — $\sqrt{l}<\eta_0<l$. В зависимости от соотношений τ_w и τ_0 рост температуры Θ_c приводит к различным последовательностям чередования зон в канале, при $\Theta_\kappa=0$ (фиг. 1) вязкопластичное течение 6 переходит в трехзонное с чистовязким движением в центре, квазитвердым и сдвиговым вязкопластичным (режим 2). Размеры квазитвердого ядра уменьшаются ($\eta_*\to\eta_0$), а при $\Theta_\kappa=\beta\eta_0^4/12$ оно исчезает. С дальнейшим возрастанием $\Theta_\kappa(\eta_*\to1)$ зона чистовязкого течения расширяется,



Фиг. 1



Фиг. 2

а при $\Theta_\kappa=\beta/12$ заполняет весь канал. (Для $\tau_w/\tau_0\leqslant1$ в описанной последовательности отсутствует зона сдвигового вязкопластичного движения.)

Таким образом, при $\Theta_c\leqslant\Theta_c^P$ и $\Theta_c\geqslant\Theta_c^M$ краевая задача (1)—(5) имеет единственное решение, а при $\Theta_c^P<\Theta_c<\Theta_c^M$ имеется три решения. Одно из них (при $\partial\Theta_c/\partial\Theta_\kappa<0$) неустойчиво, и режим течения, соответствующий данному решению, неосуществим. На практике при увеличении Θ_c происходит скачкообразный переход от точки M к N (фиг. 1, *а*). Если $\eta_0'\leqslant\eta_0\leqslant1$ (здесь η_0' — решение уравнения $\Theta_c(\Theta_\kappa)\,|_{\Theta_K=\beta/12}-\Theta_c(\Theta_\kappa\,|_{\Theta_K=0}=0)$, вязкопластичное течение становится чистовязким; при $0\leqslant\eta_0<\eta_0'$ реализуется двухслойный режим течения 3. При уменьшении Θ_κ происходит обратный переход от точки P к G, т. е. течение из режима 3 либо трехзонного переходит скачком к вязкопластичному 6 (фиг. 1).

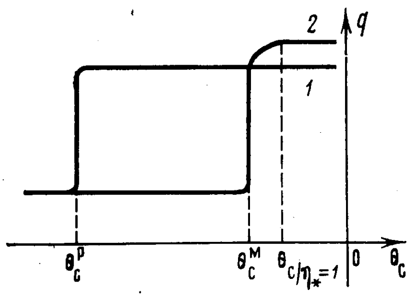
Для $l>1$ и $\tau_w/\tau_0>1$ скачкообразное охлаждение происходит только из двухслойного режима течения 3. Критические условия скачкообразного разогрева и охлаждения не совпадают (гистерезисный эффект).

Зависимость критических температур скачкообразных переходов от напряжения сдвига на стенке канала изображена на фиг. 2 для $l<1$. Область неоднозначных решений заключена между линиями $T_c^M=T_c^M(\tau_w)$ (верхняя кривая) и $T_c^P=T_c^P(\tau_w)$ (нижняя кривая). Цифрами отмечены режимы течения, из которых возможны скачкообразные разогрев (верхний ряд цифр на фиг. 2) или охлаждение (нижний ряд цифр). С увеличением l (увеличением ширины канала, улучшением условий теплообмена либо уменьшением теплопроводности стенки) область неоднозначности расширяется.

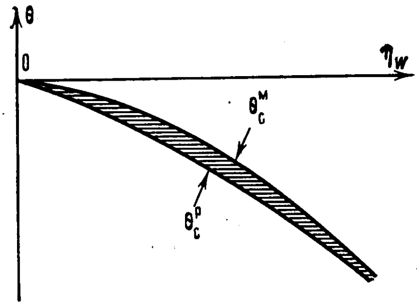
При течении в канале «степенной» жидкости, описываемой реологическим законом

$$\varphi(\tau, T)=\begin{cases} k_1^{-1/n}\tau^{(1-n)/n}, & T\leqslant T_P \\ k_2^{-1/n}\tau^{(1-n)/n}, & T>T_P \end{cases} \qquad (13)$$

где T_P — температура, при которой происходит резкое изменение коэффициента консистенции жидкости, возможны следующие режимы: если



Фиг. 3



Фиг. 4

$\Theta_i<0<\Theta_K$ — двухслойный с k_2 при $0<\Theta<\Theta_K$ и k_1 при $\Theta_i<\Theta<0$; однослойные с k_1, если $\Theta_K\leqslant 0$, и k_2, если $\Theta_i\geqslant 0$.

С увеличением температуры Θ_C при $\Theta_C{}^M=\Theta_C|_{\Theta_K=0}$ происходит либо резкое изменение коэффициента консистенции от значения k_1 до k_2, если

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)-\frac{2n+1}{3n+1}<\frac{4}{3}l\left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{1/n}-1\right]<\frac{3n+1}{2n+1}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{1/n}-1 \qquad (14)$$

либо течение скачком становится двухслойным, если

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{1/n}-1<\frac{4}{3}l\left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{1/n}-1\right]<\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{1/n}-\frac{2n+1}{3n+1} \qquad (15)$$

Характер зависимости расхода вязкопластичной либо «степенной» жидкости $q=-d\Theta/d\eta|_{\eta=1}$ от температуры окружающей среды при постоянном градиенте давления представлен на фиг. 3. При $\Theta_C=\Theta_C{}^M$ вследствие диссипативного тепловыделения происходит скачкообразный разогрев жидкости; соответственно скачком возрастает расход вдоль линии *1*, если $\eta_0'\leqslant\eta_0<1$ для вязкопластичной и выполняется условие (14) для «степенной» среды, вдоль линии *2*, если $0\leqslant\eta_0<\eta_0'$ для вязкопластичной и справедливо (15) для «степенной» жидкости. Понижение температуры Θ_C от критического значения $\Theta_C{}^P$, соответствующего резкому охлаждению жидкости, также приводит к скачкообразному изменению расхода. Зависимость расхода от температуры окружающей среды носит гистерезисный характер.

Исследуем течение реологически сложной жидкости между двумя бесконечными параллельными пластинами $y=h$ и $y=-h$ под действием постоянного напряжения τ_W, приложенного к верхней пластине. На внешних поверхностях пластин $y=h+b$ и $y=-h-b$ идет теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Так как в канале отсутствует градиент давления и гидродинамика стабилизирована, то из уравнения движения в напряжениях вытекает, что напряжение сдвига во всем канале постоянно и равно τ_W. Процесс теплообмена симметричен относительно средней плоскости канала $y=0$.

Из качественной оценки решения данной задачи получаем следующие пределы изменения параметра $\beta=\beta(\Theta_к)$:

$$\frac{\Theta_к-\Theta_c}{(4l/3-0.5)\varphi(\Theta_к)}\leqslant\beta\leqslant\left[\int\limits_0^1 d\xi\int\limits_0^\xi\frac{\varphi[\Theta_i+(1-\eta)(\Theta_к-\Theta_i)]}{\Theta_к-\Theta_c}d\eta+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{4}{3}l-1\right)\int\limits_0^1\frac{\varphi[\Theta_i+(1-\xi)(\Theta_к-\Theta_i)]}{\Theta_к-\Theta_c}d\xi\right]^{-1}$$

В качестве примеров изучалось течение сред, реологические свойства которых подчиняются соотношениям (12)—(13). Характер изменения Θ_c от $\Theta_к$ аналогичен случаю пуазейлевского течения, но для куэттовского течения вязкопластичной среды отсутствует квазитвердая зона, движение жидкости начинается при $\tau_W>\tau_0$. Варьируя напряжение сдвига τ_W, которое создает в канале движущаяся верхняя стенка, можно получить область неоднозначных решений, которая представлена на фиг. 4 для пуазейлевского либо куэттовского течения «степенной» среды. Скачкообразные переходы в этом случае возможны лишь в пределах двухслойного режима. Исследуется влияние изменения температуры окружающей среды T_c на скорость движения верхней стенки канала V. Вид функции $V(T_c)$ аналогичен зависимости $Q(T_c)$ для пуазейлевского течения.

Таким образом, резкое изменение текучести среды при наличии диссипативных тепловыделений в потоке может привести к существованию одновременно нескольких гидродинамических режимов течения в канале. При определенных условиях имеются критические значения температуры окружающей среды, при которых происходит скачкообразное изменение расхода среды.

Численные расчеты, проведенные для реологически сложных жидкостей с различными видами температурной зависимости реологических свойств, приводят к качественным результатам, которые аналогичны простым моделям, рассмотренным в данной работе.

Поступила 24 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И.* Некоторые задачи о неизотермическом стационарном течении вязкой жидкости. ПМТФ, 1965, № 5.
2. *Мержанов А. Г., Столин А. М.* К тепловой теории течения вязкой жидкости. Докл. АН СССР, 1971, т. 198, № 6.
3. *Столин А. М., Бостанджиян С. А., Плотникова Н. В.* Критические условия гидродинамического теплового взрыва при течении степенной жидкости. В сб. Тепломассообмен-5. Т. 7. Минск, 1976.
4. *Зиненко Ж. А., Столин А. М., Хрисостомов Ф. А.* Тепловые режимы куэттовского течения вязкой жидкости. ПМТФ, 1977, № 3.
5. *Trowbridge E. A., Karran J. H.* A discussion of critical parameters which can occur in frictionally heated non-newtonian fluid flows. Int. J. Heat and Mass Fransfer, 1973, vol. 16, No. 10.
6. *Мержанов А. Г., Столин А. М.* Гидродинамические аналоги явлений воспламенения и потухания. ПМТФ, 1974, № 1.

7. *Pearson J. R. A., Shah Y. T., Vieira E. S. A.* Stability of non-isothermal flow in channels-1. Temperature – dependent Newtonian fluid without heat generation. Chem. Engng Sci., 1973, vol. 28, No. 11.
8. *Shah Y. T., Pearson J. R. A.* Stability of non isothermal flow in channels-2. Temperature dependent power – law fluids without heat generation. Chem. Engng Sci., 1974, vol. 29, No. 3.
9. *Shah Y. T., Pearson J. R. A.* Stability of non-isothermal flow in channels-3. Temperature – dependent power – law fluids with heat generation. Chem. Engng Sci., 1974, vol. 29, No. 6.
10. *Беломытцев В. П., Гвоздков Н. Н.* О потере тепловой устойчивости движения вязкопластического материала. Докл. АН СССР, 1966, т. 170, № 2.
11. *Мамедов Р. М., Саттаров Р. М.* О неизотермическом структурном режиме движения нелинейно-вязкопластичной среды в плоском канале. Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 2.