

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА СТРЕЛОВИДНЫХ КРЫЛЬЯХ БЕСКОНЕЧНОГО РАЗМАХА, ОБТЕКАЕМЫХ ПОД УГЛОМ АТАКИ

И. Г. БРЫКИНА, Э. А. ГЕРШБЕЙН, С. В. ПЕЙГИН

(Москва)

Исследуется течение сжимаемого газа в ламинарном пограничном слое на стреловидных крыльях бесконечного размаха, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа под различными углами атаки. Поверхность предполагается либо непроницаемой, либо через нее производится выдувание или отсасывание газа. Для данного и осесимметричного течений приводится аналитическое решение задачи, полученное в первом приближении интегрального метода последовательных приближений. Для больших значений параметра вдува и отсоса найдены асимптотические решения уравнений пограничного слоя. Приводятся некоторые результаты численного решения задачи, полученного конечно-разностным методом, для крыльев различной формы в широком диапазоне углов стреловидности, параметров вдува и отсоса. Получено численное решение уравнений пространственного слоя смещения, возникающего при сильном вдуве газа с поверхности тела. Аналитические и численные решения сравниваются друг с другом и оцениваются области применимости аналитических формул. На основании решений, полученных в данной работе, и работ других авторов предлагается формула для расчета тепловых потоков к идеально каталитической поверхности стреловидных крыльев, обтекаемых сверхзвуковым потоком диссоциированного и ионизованного воздуха под различными углами атаки.

Ранее обтекание стреловидных крыльев под нулевым углом атаки в рамках теории ламинарного пограничного слоя рассматривалось в ряде работ [1-4 и др.]. В работе [3] исследовалось обтекание стреловидных крыльев под ненулевым углом атаки при малых и умеренных числах Рейнольдса в рамках теории гиперзвукового вязкого ударного слоя.

1. Постановка задачи. Рассмотрим сверхзвуковое обтекание осесимметричных затупленных тел под нулевым углом атаки и стреловидных крыльев бесконечного размаха с затупленной передней кромкой под различными углами атаки.

При обтекании крыла бесконечного размаха под углом атаки вектор скорости набегающего потока V_∞ можно разбить на две составляющие, одна из которых, W_∞ , направлена вдоль образующей, другая, U_∞ , лежит в плоскости, ортогональной образующей; угол скольжения φ — угол между V_∞ и U_∞ , угол атаки θ — угол между некоторой плоскостью (например, плоскостью симметрии крыла, если оно симметрично) и вектором U_∞ .

Свяжем систему координат x, y, z с обтекаемой поверхностью. Координата x — это расстояние от критической точки вдоль контура, y — расстояние от поверхности по нормали к ней, z — азимутальный угол в случае осесимметричного течения или координата, направленная вдоль образующей, в случае обтекания стреловидного крыла.

Уравнения ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе в системе координат x, y, z имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho^* u^* r^{*\nu}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho^* v^* r^{*\nu}) = 0$$

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \rho^* \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \\
 & \rho^* \left(u^* \frac{\partial w^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu^* \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) \\
 & \rho^* \left(u^* \frac{\partial H^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial H^*}{\partial y} \right) = \\
 & = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\mu}{\sigma} \left[\frac{\partial H^*}{\partial y} + (\sigma-1) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^{*2} + w^{*2}}{2} \right) \right] \right\} \\
 & p^* = \rho^* R_A T^*, \quad H^* = c_p T^* + \frac{u^{*2}}{2} + \frac{w^{*2}}{2}
 \end{aligned}$$

Здесь u^* , v^* , w^* — составляющие скорости в направлениях x , y , z соответственно, ρ^* , p^* , T^* , H^* , $c_p = \text{const}$ — плотность, давление, температура, полная энтальпия, теплоемкость газа, μ^* — коэффициент вязкости (предполагалось, что $\mu^* \sim T^{*\omega}$), σ — число Прандтля, R_A — универсальная газовая постоянная; в случае осесимметричного течения $v=1$, $w^*=0$, r^* — расстояние от поверхности тела до оси симметрии; в случае обтекания стреловидного крыла $v=0$.

Граничные условия принимаем следующие:

$$\begin{aligned}
 (1.2) \quad & y \rightarrow \infty: u^* \rightarrow u_e(x), \quad w^* \rightarrow w_e = \text{const}, \quad H^* \rightarrow H_e = \text{const} \\
 & y=0: u^* = w^* = 0, \quad H^* = H_w^*(x), \quad v^* = v_w^*(x)
 \end{aligned}$$

Индекс e соответствует параметрам внешнего невязкого течения на поверхности тела.

2. Решение уравнений пограничного слоя в сжимаемом газе интегральным методом последовательных приближений. Перейдем в (1.1) и (1.2) к новым переменным:

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & s = \frac{x}{R_0}, \quad \eta = \sqrt{\frac{u_e \rho_e}{\mu_e R_0 s}} \int_0^y \rho \, dy, \quad u = \frac{u^*}{u_e}, \quad w = \frac{w^*}{w_e} \\
 & \rho = \frac{\rho^*}{\rho_e}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_e}, \quad g = \frac{H^* - H_w^*}{H_e - H_w^*}, \quad T = \frac{T^*}{T_e} \\
 & v = v^* \rho \sqrt{\frac{R_0 s \rho_e}{\mu_e u_e}} + s u \frac{\partial \eta}{\partial (x/R_0)}
 \end{aligned}$$

Проинтегрируем уравнения импульсов и уравнение энергии 2 раза по координате η (от η до ∞ и от 0 до η) с учетом граничных условий и уравнения неразрывности. После некоторых преобразований получим систему интегродифференциальных уравнений, в левой части которых стоят искомые функции u , w и $g - \varphi_1 u^2 - \varphi_2 w^2$, где

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & \varphi_1 = \frac{u_e^2 (1-\sigma)}{2H_e (1-H_w)}, \quad \varphi_2 = \frac{w_e^2 (1-\sigma)}{2H_e (1-H_w)} \\
 & H_w = \frac{H_w^*}{H_e} = T_w \cos^2 \varphi, \quad T_w = \frac{T_w^* 2c_p}{u_\infty^2}
 \end{aligned}$$

а в правой — интегралы от выражений, содержащих искомые функции и их производные по s . Эту систему будем решать методом последовательных приближений. Итерационный процесс будем строить таким образом, чтобы каждое приближение удовлетворяло граничным условиям на внешней границе пограничного слоя. Пусть известно n -е приближение $u^{(n)}(s, \eta)$, $w^{(n)}(s, \eta)$, $g^{(n)}(s, \eta)$. В правую часть i -го урав-

нения подставим $u^{(n)}(s, \eta_i^{(n)})$, $w^{(n)}(s, \eta_i^{(n)})$, $g^{(n)}(s, \eta_i^{(n)})$, где

$$(2.3) \quad \eta_i^{(n)} = \frac{\eta}{\sqrt{\delta_i^{(n+1)}}}, \quad i = u, w, g$$

Функции $\delta_i^{(n+1)}(s)$ введены для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на внешней границе пограничного слоя для решения в $(n+1)$ -м приближении.

Переходя в уравнениях к новым переменным интегрирования (2.3), получим окончательно следующие выражения для искомых функций в $(n+1)$ -м приближении:

$$(2.4) \quad k_i^{(n+1)}(s, \eta_i^{(n)}) = \delta_i^{(n+1)} [\beta(\theta_{i1}^{(n)} + \theta_{i3}^{(n)}) + s(\theta_{i2}^{(n)} + \theta_{i4}^{(n)}) + P_i^{(n)}] -$$

$$- \sqrt{\delta_i^{(n+1)}} B \theta_{i5}^{(n)} + \frac{s}{2} \frac{d\delta_i^{(n+1)}}{ds} (\theta_{i1}^{(n)} + \theta_{i3}^{(n)})$$

$$i = u, w, g, \quad k_u = u, \quad k_w = w, \quad k_g = (g - \varphi_1 u^2 - \varphi_2 w^2) \sigma^{-1}$$

$$P_u = \beta_1 [(1 + \beta_4)(\theta_{u1}^{(n)} + \theta_{uu}^{(n)}) + \beta_5(\theta_{uw}^{(n)} + \theta_{u6}^{(n)}) - \beta_3 \theta_{ug}^{(n)}], \quad P_w = 0, \quad P_g = \beta_2 \theta_{g1}^{(n)}$$

$$(2.5) \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{d \ln u_e \mu_e \rho_e s r^{-\nu}}{d \ln s}, \quad \beta_1 = \frac{d \ln u_e}{d \ln s}$$

$$\beta_2 = \frac{d \ln(1 - H_w)}{d \ln s}, \quad \beta_3 = \frac{H_e(1 - H_w)}{c_p T_e}, \quad \beta_4 = \frac{u_e^2}{2c_p T_e}$$

$$\beta_5 = \frac{w_e^2}{2c_p T_e}, \quad B = \rho_w^* \nu_w^* \sqrt{\frac{R_0 s}{\rho_e \mu_e u_e}}, \quad r = \frac{r^*}{R_0}$$

$$(2.6) \quad \theta_{i1} = \int_0^\eta \frac{\theta_i}{l} d\eta, \quad \theta_{i2} = \int_0^\eta \frac{1}{l} \frac{\partial f^*}{\partial s} (1-i) d\eta, \quad \theta_{i3} = \int_0^\eta \frac{f^*}{l} (1-i) d\eta$$

$$\theta_{i4} = \int_0^\eta \frac{1}{l} \frac{\partial \theta_i}{\partial s} d\eta, \quad \theta_{i5} = \int_0^\eta \frac{1-i}{l} d\eta, \quad \theta_{ui} = \int_0^\eta \frac{\theta_i^*}{l} d\eta$$

$$\theta_i = \int_\eta^\infty (1-i) u d\eta, \quad \theta_i^* = \int_\eta^\infty (1-i) d\eta, \quad i = u, w, g$$

$$\theta_{u6} = \int_0^\eta \frac{\theta_w}{l} d\eta, \quad f^* = \int_0^\eta u d\eta, \quad l = \mu \rho$$

$$\frac{1}{\rho} = T = \left(g(1 - H_w) + H_w - u^2 \frac{u_e^2}{2H_e} - w^2 \frac{w_e^2}{2H_e} \right) \left(1 - \frac{u_e^2 + w_e^2}{2H_e} \right)^{-1}$$

В (2.6) для простоты у всех функций опущен индекс (n) , соответствующий номеру приближения, а также опущены индексы у переменных $\eta_u^{(n)}$, $\eta_w^{(n)}$, $\eta_g^{(n)}$.

Переходя в уравнениях (2.4) к пределу при $\eta_u^{(n)} \rightarrow \infty$, $\eta_w^{(n)} \rightarrow \infty$, $\eta_g^{(n)} \rightarrow \infty$ и полагая левые части соответственно 1, 1 и $(1 - \varphi_1 - \varphi_2) \sigma^{-1}$, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $\delta_u^{(n+1)}$, $\delta_w^{(n+1)}$ и $\delta_g^{(n+1)}$. Отметим, что в случае непроницаемой поверхности решение этих уравнений выписывается в квадратурах.

Затем процесс повторяется, причем для перехода к переменной η используются соотношения (2.3).

Метод последовательных приближений был предложен в работах [6, 7] для двумерных задач пограничного слоя и была показана удовлетворительная точность решения уже в первом приближении. В дальнейшем в несколько ином виде метод использовался для решения уравнений пространственного пограничного слоя [8, 9].

3. Общее аналитическое решение задачи в первом приближении. В первом приближении изложенного метода получено аналитическое решение задачи для компонент скорости, энтальпии, коэффициентов трения и теплопередачи при двух способах задания нулевого приближения

$$(3.1) \quad u^{(0)} = w^{(0)} = g^{(0)} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$(3.2) \quad u^{(0)} = w^{(0)} = g^{(0)} = 1 - e^{-\eta}$$

В частности, коэффициенты трения и теплопередачи в первом приближении (для нулевого приближения (3.1)) определяются по формулам

$$(3.3) \quad c_{f1} = \frac{0.234}{\sqrt{\delta_u B_\infty}} + 0.468 \sqrt{\delta_u} \beta_1 \frac{H_e}{c_p T_e} \left(1 - \frac{\Phi_1}{2B_\infty} + H_w \left(2.41 - \frac{\Phi_2}{2B_\infty} \right) \right) - 2D$$

$$c_{f2} = \frac{0.234}{\sqrt{\delta_w B_\infty}} - 2D$$

$$c_q = \frac{0.117(1 - \Phi_1 - \Phi_2)}{\sigma \sqrt{\delta_g B_\infty}} + 0.234 \sqrt{\delta_g} \beta_2 \left(1 - \frac{\Phi_1}{2B_\infty} \right) - D$$

$$B_\infty = 0.068 + 0.057 l_w, \quad D = B \left(1 - 0.117 \frac{D_\infty}{B_\infty} \right)$$

$$D_\infty = 0.234 + 0.330 l_w, \quad \Phi_1 = 0.068 + 0.091 l_w,$$

$$\Phi_2 = 0.091 + 0.159 l_w$$

$$(3.4) \quad c_{f1} = \frac{2\tau_{x*}}{\rho_e u_e^2} \sqrt{\text{Re}_x}, \quad c_{f2} = \frac{2\tau_z}{\rho_e w_e u_e} \sqrt{\text{Re}_x}, \quad c_q = \frac{q}{\rho_e u_e (H_e - H_w^*)} \sqrt{\text{Re}_x}$$

$$\tau_x = \tau_{x*} s = \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y}, \quad \tau_z = \mu^* \frac{\partial w^*}{\partial y}, \quad q = \lambda \frac{\partial T^*}{\partial y}, \quad \text{Re}_x = \frac{u_e \rho_e x}{\mu_e}$$

Функции δ_u , δ_w , δ_g в случае непроницаемой поверхности определяются по формулам:

$$(3.5) \quad \delta_i = \frac{1}{F s G_i} \int_0^s \frac{\alpha_i F G_i}{B_\infty} ds, \quad i = u, w, g, \quad \alpha_u = \alpha_w = 1$$

$$\alpha_g = \frac{1 - \Phi_1 - \Phi_2}{\sigma}, \quad G_w = 1, \quad G_g = 1 - H_w, \quad G_u = u_e^a \exp(b u_e^{*2})$$

$$F(s) = u_e \mu_e \rho_e r^{2\nu}, \quad a = \frac{0.68 + 0.91 H_w + c(0.91 + 1.59 H_w)}{\cos^2 \varphi (0.68 + 0.57 c)}$$

$$b = a + \frac{c(0.58 + 0.8 H_w - 2.8 a \cos^2 \varphi)}{\cos^2 \varphi (0.68 + 0.57 c)}, \quad u_e^* = \frac{u_e}{2u_\infty}, \quad c = \frac{H_w^{1/2}}{\cos \varphi}$$

При наличии вдува или отсоса газа с поверхности функции δ_u , δ_w , δ_g определяются из дифференциальных уравнений:

$$(3.6) \quad \delta_i A_i + s \frac{d\delta_i}{ds} B_\infty - \delta_i^{1/2} D_\infty = \alpha_i, \quad i = u, w, g$$

$$\delta_i(0) = \left(\frac{D_\infty + (D_\infty^2 + 4\alpha_i A_i)^{1/2}}{2A_i} \right)^2$$

$$A_w = 2\beta B_\infty, \quad A_u = A_w + \beta_1 \frac{H_e}{c_p T_e} (\Phi_1 + H_w \Phi_2), \quad A_\varepsilon = A_w + \beta_2 \Phi_1$$

Расчеты по формулам, полученным при задании нулевого приближения в виде (3.1) и (3.2), проведенные для осесимметричных тел и для крыльев различной формы, обтекаемых под углами атаки от 0 до 30° и углами скольжения от 0 до 45°, показали, что распределения вдоль поверхности величин теплового потока и коэффициентов трения, отнесенных к их значениям в критической точке, слабо зависят от нулевого приближения. То что решение в первом приближении для относительных величин слабо зависит от вида нулевого приближения, можно показать и аналитически. Для относительных распределений теплового потока и компонент напряжения трения вдоль непроницаемой поверхности были получены приближенные формулы, не зависящие от вида нулевого приближения:

$$(3.7) \quad \frac{\dot{q}(s)}{q(0)} = (1 - \varphi_1 - \varphi_2) F(s) \left[2(\nu + 1) u_{es}'(0) r^{2\nu} (1 - \varphi_2) \times \right. \\ \left. \times \int_0^s (1 - \varphi_1 - \varphi_2) F(s) ds \right]^{-1/2}$$

$$(3.8) \quad \frac{\tau_z(s)}{\tau_z(0)} = F(s) \left[2(\nu + 1) u_{es}'(0) r^{2\nu} \int_0^s F(s) ds \right]^{-1/2}, \quad F(s) = u_e \mu_e \rho_e r^{2\nu} \\ \frac{\tau_{x*}(s)}{\tau_{x*}(0)} = \frac{u_e^{3/2} (\mu_e \rho_e)^{1/2}}{s^{1/2} [u_{es}'(0)]^{1/2}} \times \\ \times \frac{1 + 2\delta_u^* \beta_1 (1 + u_e^{*3} + 2H_w - d^*) / \cos^2 \varphi}{2\delta_u^{*1/2} (2 + \nu + \text{tg}^2 \varphi + 2H_w / \cos^2 \varphi) s} [2(1 + \nu) + d]^{1/2}$$

$$\delta_u^* = \int_0^s G(s) ds / s G(s), \quad G(s) = u_e^d \exp\left(\frac{u_e^{*2}}{\cos^2 \varphi}\right) F(s), \quad d = \frac{2d^*}{\cos^2 \varphi} \\ d^* = 0.5 + 0.6H_w - 0.2H_w / \cos^2 \varphi + 0.25H_w^{1/2} / \cos \varphi$$

В случае осесимметричного течения формула (3.7) для относительного теплового потока при $\sigma=1$ в точности совпадает с формулой Лиза [10] и хорошо согласуется с формулой Кемпа, Роуза, Детры [11], аппроксимирующей многочисленные численные расчеты, и с экспериментальными данными [11].

Для величин напряжения трения и теплового потока к непроницаемой поверхности в критической точке стреловидного крыла, отнесенных к их значениям при нулевом угле скольжения, в первом приближении получены следующие выражения:

$$(3.9) \quad q^\circ = \frac{q(u_\infty, w_\infty)}{q(u_\infty, 0)} = \left[\frac{(1 - T_w \cos^2 \varphi) (1 - T_w + \sigma \text{tg}^2 \varphi)}{\cos \varphi (1 - T_w)^2 (1 - 0.4 \sin^2 \varphi)} \right]^{1/2}$$

$$(3.10) \quad \tau_z^\circ = \frac{\tau_z(u_\infty, w_\infty) / \sin \varphi}{\lim_{w_\infty \rightarrow 0} (\tau_z(u_\infty, w_\infty) / \sin \varphi)} = [\cos \varphi (1 - 0.4 \sin^2 \varphi)]^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} \tau_x^0 &= \frac{\tau_{x*}(u_\infty, w_\infty)}{\tau_{x*}(u_\infty, 0)} = \\ &= \left(1 + \frac{tg^2 \varphi}{2(1+T_w)}\right) \left[\frac{\cos \varphi (1+0.13T_w)}{1+0.13T_w \cos^2 \varphi + 0.3 \sin^2 \varphi tg^2 \varphi} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Формулы (3.9), (3.10) приведены для нулевого приближения (3.2), так как в этом случае достигается более высокая точность (в диапазоне $0.01 \leq T_w \leq 0.5$, $0 \leq \varphi \leq 50^\circ$ отличие от численного решения (см. п. 5–6) величины q^0 , определенной по формуле (3.9), не превышает 1%, а величины q^0 , полученной при нулевом приближении (3.1), – 5%).

При обтекании проницаемой поверхности зависимость величин теплового потока и коэффициентов трения в критической точке, отнесенных к их значениям при $B=0$, от параметра B на основании (3.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{q}{q_{B=0}} &= B(t_g - t_g^*) + \sqrt{B^2 t_g^2 + 1}, & \frac{\tau_{x*}}{\tau_{x* B=0}} &= B(t_u - t_u^*) + \sqrt{B^2 t_u^2 + 1} \\ \frac{\tau_z}{\tau_{z B=0}} &= B(t_w - t_w^*) + \sqrt{B^2 t_w^2 + 1} \\ t_w &= \frac{0.32(1+1.41T_w^{1/2})}{[(\nu+1)(1+0.84T_w^{1/2})]^{1/2}}, & t_w^* &= 1.58 \left[\frac{1+0.84T_w^{1/2}}{\nu+1} \right]^{1/2}, & t_g &= kt_u \end{aligned}$$

(3.11)

$$\begin{aligned} t_g^* &= kt_w^*, & k &= [\sigma/(1-\varphi_2)]^{1/2}, & t_u &= 0.32(1+1.41T_w^{1/2})t^{-1} \\ t_u^* &= 1.58t(2+\nu+2T_w+tg^2 \varphi)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \left[(\nu+1)(1+0.84T_w^{1/2}) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} (1+1.34T_w^{1/2}) + \right. \\ &\quad \left. + 1.34T_w(1+1.75T_w^{1/2}) \right]^{1/2} \end{aligned}$$

При малых вдувах и отсосах выражения (3.11) дают линейную зависимость величин $q/q_{B=0}$, $\tau_{x*}/\tau_{x* B=0}$, $\tau_z/\tau_{z B=0}$ от параметра B . При больших отсосах также получаем линейную зависимость от параметра B (что следует и из асимптотического решения уравнений пограничного слоя при $-B \gg 1$):

$$\frac{q}{q_{B=0}} = -Bt_g^*, \quad \frac{\tau_{x*}}{\tau_{x* B=0}} = -Bt_u^*, \quad \frac{\tau_z}{\tau_{z B=0}} = -Bt_w^*$$

Точность полученных формул будет оценена ниже путем сравнения с численным решением.

4. Асимптотическое решение задачи при сильном вдуве и сильном отсосе. 1. Сильный вдув. При больших значениях параметра вдува $|\Phi|$ [12] задача (1.1), (1.2) является сингулярной, и для ее решения может быть использован метод внешних и внутренних срачиваемых разложений, в котором пограничный слой разбивается на слой вдуваемых газов, примыкающий к поверхности, и слой смешения [12–15].

Решение асимптотических уравнений для коэффициентов разложения в ряд по малому параметру $\varepsilon = \Phi^{-1}$ в слое вдуваемых газов для первых ненулевых членов дает следующие размерные формулы для компонент напряжения трения и теплового потока на поверхности тела (индексы * и w опускаем):

$$(4.1) \quad \tau_x = -\frac{\mu}{\rho\nu} \frac{dp}{dx}, \quad \tau_z = O(\varepsilon^k), \quad k > 0$$

$$q = \frac{\lambda^2}{c_p \rho v^2} \frac{\rho_e u_e}{\rho v} \frac{du_e}{dx} \left[\frac{\rho_e}{\rho} (1-\sigma) \frac{dT_e}{dx} - \frac{dT}{dx} \right]$$

Из формул (4.1) следует, что напряжение трения τ_x и тепловой поток при $x > 0$ имеют степенную асимптотику по параметру вдува. Можно показать, что τ_x и $q(0)$ имеют экспоненциальную асимптотику по параметру вдува. Кроме того, из (4.1) видно, что предельные линии тока на поверхности тела при больших значениях параметра вдува совпадают в первом приближении с векторными линиями градиента давления, направленными в данном случае вдоль контура крыла (ортогонально образующей) (см. также [15]).

Для профилей скоростей и температуры поперек слоя вдуваемых газов получаем в первом приближении следующие формулы:

$$(4.2) \quad \frac{u^2(x, t)}{2} = \frac{1}{\kappa} \frac{p(t)}{\rho_w(t)} \left\{ 1 - \left[\frac{p(x)}{p(t)} \right]^\kappa \right\}$$

$$w(x, t) = 0, \quad \frac{T(x, t)}{T_w(t)} = \left[\frac{p(x)}{p(t)} \right]^\kappa$$

$$\frac{\rho(x, t)}{\rho_w(t)} = \left[\frac{p(x)}{p(t)} \right]^{1/\gamma}, \quad y(x, t) = \int_t^x \frac{\rho_w(t) v_w(t)}{\rho(x, t) u(x, t)} dt \quad (0 \leq t \leq x)$$

$$\kappa = (\gamma - 1)/\gamma, \quad \gamma = c_p/c_v$$

Здесь t — координата x выхода линии тока с поверхности тела. На критической линии $x=0$ имеем [13]

$$(4.3) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = P_2 \sin \frac{P_2 y}{v_w(0)}, \quad v(0, y) = v_w(0) \cos \frac{P_2 y}{v_w(0)}, \quad w(0, y) = 0$$

$$T(0, y) = T_w(0), \quad \rho(0, y) = \rho_w(0), \quad P_2 = \left(-\frac{1}{\rho_w(0)} \frac{d^2 p}{dx^2} \right)_{x=0}^{-1/2}$$

Уравнение разделяющей линии тока имеет вид: $y = y(x, 0) = y^*(x)$. В частности, при $x=0$ из (4.3) получаем: $y^*(0) = \pi v_w(0) / 2P_2$.

Выражения для скоростей и температуры вдоль разделяющей линии тока получим из (4.2) при $t=0$.

Течение в слое смешения описывается уравнениями (1.1) с граничными условиями, выставляемыми на плюс и минус бесконечности [14]. Полная постановка задачи о течении сжимаемого газа в слое смешения и ее решение даны ниже (п. 6).

2. *Сильный отсос.* При больших значениях параметра отсоса Φ решение уравнений (1.1) можно искать в виде соответствующего ряда по параметру $\varepsilon = \Phi^{-1}$ [17-19]. Решая асимптотические уравнения в первом приближении для коэффициентов разложения в ряд по ε , получаем следующие размерные формулы для профилей скоростей и температуры поперек пограничного слоя (звездочки здесь и далее опускаем):

$$(4.4) \quad u(x, y) = u_e(x) (1 - e^{-\varepsilon}), \quad w(x, y) = w_e (1 - e^{-\varepsilon})$$

$$\xi = - \int_0^y \frac{\rho_w(x) v_w(x)}{\mu} dy$$

$$T(x, y) = T_w(x) + [T_e(x) - T_w(x)] (1 - e^{-\sigma \xi}) +$$

$$+ \frac{\sigma}{\sigma - 2} \frac{u_e^2 + w_e^2}{2c_p} (e^{-2\xi} - e^{-\sigma \xi})$$

На поверхности тела при $y=0$ имеем

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \tau_x &= -(\rho v)_w u_e, \quad \tau_z = -(\rho v)_w w_e \\ q &= -(\rho v)_w [c_p (T_e - T_w) + 1/2 (u_e^2 + w_e^2)] \end{aligned}$$

Формулы (4.5) показывают, что при больших значениях параметра отсоса предельные линии тока на поверхности тела совпадают в первом приближении с линиями тока внешнего невязкого течения (см. [19]).

5. Численное решение задачи конечно-разностным методом. Решение уравнений слоя смещения при наличии скольжения и угла атаки. Для численного решения уравнений (1.1) будем использовать переменные Дородницына — Лиза:

$$(5.1) \quad \xi = \int_0^x \mu_e \rho_e u_e r^{2\nu} dx, \quad n = \frac{u_e r^\nu}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy$$

Переходя в (1.1) к новым искомым функциям u, w, T по формулам (2.1), получим

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left(l \frac{\partial u}{\partial n} \right) + \left(2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + f \right) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta_* \left(\frac{1}{\rho} - u^2 \right) &= 2\xi u \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad u = \frac{\partial f}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(l \frac{\partial w}{\partial n} \right) + \left(2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + f \right) \frac{\partial w}{\partial n} &= 2\xi u \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{l}{\sigma} \frac{\partial T}{\partial n} \right) + \left(2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + f \right) \frac{\partial T}{\partial n} + \beta_* l \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 + \beta_* l \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 &= 2\xi u \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \rho^* v^* &= -r^{-\nu} \left[\left(2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + f \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2\xi \frac{\partial f}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} \right] (2\xi)^{-1/2} \\ \beta_* &= 2 \frac{d \ln u_e}{d \ln \xi} \end{aligned}$$

Граничные условия принимают следующий вид:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} n \rightarrow \infty: \quad u &= T = w = 1 \\ n = 0: \quad f + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \Phi(\xi), \quad T = T_w, \quad w = u = 0 \end{aligned}$$

Система уравнений (5.2) с граничными условиями (5.3) решалась численно на ЭВМ с помощью программы, созданной для решения уравнений пограничного слоя на проницаемой поверхности. Использовалась неявная четырехточечная разностная схема [20] с точностью аппроксимации $O(\Delta n)^4 + O(\Delta \xi)^2$.

Рассматривалось течение в ламинарном пограничном слое на эллиптических (отношение полуосей варьировалось от 0.1 до 1), параболическом, 45-градусном гиперболическом цилиндрах, обтекаемых под различными углами стреловидности φ ($0 \leq \varphi \leq 45^\circ$) и атаки θ ($0 \leq \theta \leq 15^\circ$). В расчетах принималось $M_\infty = 10$, $\gamma = 1.4 - 1.2$, $\sigma = 0.71$, $\omega = 0.4 - 0.9$. Распределение давления рассчитывалось по формуле Ньютона, параметр вдува f_w и температура поверхности T_w считались постоянными и их значения варьировались в пределах $-5 \leq f_w \leq 5$, $0.03 \leq T_w \leq 0.5$. Результаты расчетов и их обсуждение приведены в п. 6.

Течение в слое смещения описывается уравнениями (5.2) с граничными условиями

$$(5.4) \quad \begin{aligned} n \rightarrow +\infty: \quad u &\rightarrow 1, \quad T \rightarrow 1, \quad w \rightarrow 1 \\ n \rightarrow -\infty: \quad u &\rightarrow u^-, \quad T \rightarrow T^-, \quad w \rightarrow 0 \\ n - n^* = 0: \quad f &= 0 \end{aligned}$$

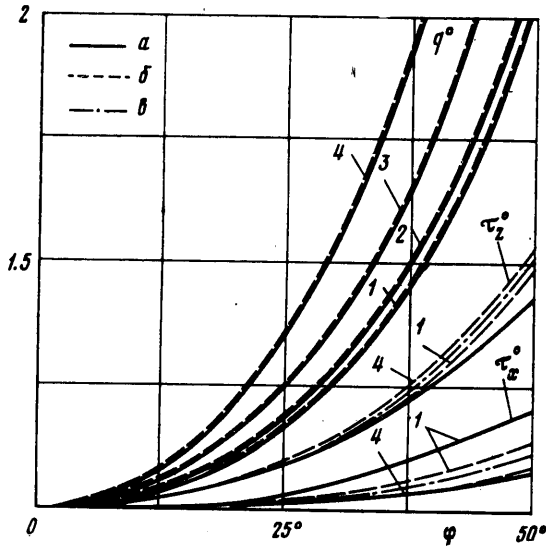
Задача (5.2), (5.4) решалась с помощью той же программы. При этом в силу того, что уравнения (5.2) инвариантны относительно преобразования $n = n^* + c(\xi)$, граничные условия к системе (5.2) записывались следующим образом:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} n^* \rightarrow \infty: \quad u &\rightarrow 1, \quad T \rightarrow 1, \quad w \rightarrow 1 \\ n^* = 0: \quad u &= u^-, \quad T = T^-, \quad w = 0 \end{aligned}$$

а условие $f=0$ при $n=n^*$ заменялось условием $f=f^- < 0$ при $n^*=0$. Значение f^- брались достаточно большим, так, чтобы выполнялась асимптотика решения уравнений на минус бесконечности.

После решения задачи в переменных (ξ, n°) определялось значение переменной $n^\circ = c(\xi)$, соответствующей $f=0$, и производился возврат к исходным переменным (ξ, n) .

6. Сопоставление аналитических и численных решений. Обсуждение результатов расчетов. 1. Тепловой поток и напряжение трения на непроницаемой поверхности. Сравнение аналитического решения в первом приближении с численным, проведенное для крыльев различной формы в широком диапазоне определяющих параметров задачи, показало, что отличие абсолютных значений коэффициентов трения и теплообмена, подсчитанных по формулам (3.4) и полученных из численного решения, не превышает 20% для всех вариантов расчета; отличие же относительных величин, вы-



Фиг. 1

раженных формулами (3.7)–(3.10), от численных значительно меньше.

Например, погрешность формул (3.9), (3.10) для величин теплового потока и коэффициентов трения в критической точке стреловидного крыла, отнесенных к их значениям при нулевом угле скольжения, в диапазоне $0 \leq \varphi \leq 45^\circ$ и $0.03 \leq T_w \leq 0.5$ не превышает: для q° — 1%, для τ_x° и τ_z° — 5%. Это видно из фиг. 1, где приведены эти величины в зависимости от φ при $T_w = 0.03, 0.1, 0.3, 0.5$ (кривые 1–4 соответственно). Кривые *a* — расчет по формулам (3.9), (3.10), кривые *b* — численные расчеты.

Отметим, что влияние температуры стенки на относительный тепловой поток проявляется сильнее, чем на коэффициенты трения, причем последние можно с хорошей точностью (меньше 2%) аппроксимировать формулами более простыми, чем (3.10):

$$(6.1) \quad \tau_x^\circ = \cos^{-0.25}\varphi, \quad \tau_z^\circ = \cos^{-0.94}\varphi$$

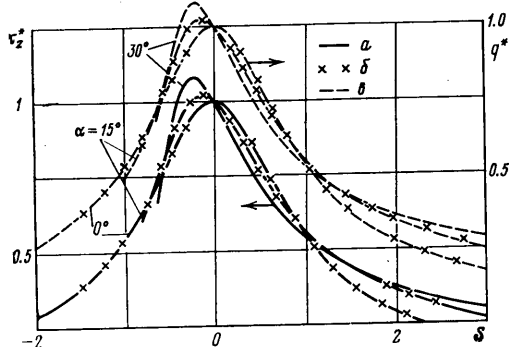
Величины τ_x° и τ_z° , рассчитанные по этим формулам, приведены на фиг. 1 линиями *в*.

Расчеты также показали, что q° , τ_x° , τ_z° практически не зависят от ω (для $\omega = 0.4$ и $\omega = 0.9$ при $T_w = 0.03$ максимальное отличие не превосходило 3%).

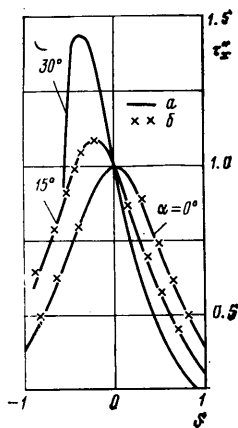
Сравнение распределений вдоль поверхности относительных значений теплового потока и коэффициентов трения $q^* = q(x)/q(0)$, $\tau_x^* = \tau_x(x)/\tau_x(0)$, $\tau_z^* = \tau_z(x)/\tau_z(0)$, подсчитанных по формулам (3.7), (3.8) и полученных из численного решения, проведенное для параболического, кругового, гиперболического и эллиптических цилиндров, обтекаемых под различными углами скольжения и атаки, показало, что погрешность формулы (3.7) не превышала 2–3%, а формул (3.8) — 5%. Пример сравнения

аналитического (кривые a и ϵ) и численного (δ) решений представлен на фиг. 2, 3, где приведены характерные распределения величин q^* , τ_x^* , τ_z^* вдоль поверхности параболического цилиндра, обтекаемого под углом скольжения 45° и углами атаки $0, 15, 30^\circ$ ($T_w=0.03$). Хорошая точность аналитического решения для относительных величин подтверждается также проведенным сравнением с результатами работы [4], полученными методом интегральных соотношений для скользящих эллиптических цилиндров под нулевым углом атаки, и с результатами экспериментов [3].

Отметим некоторые характерные особенности распределений теплового потока и коэффициентов трения вдоль поверхности стреловидного крыла.



Фиг. 2



Фиг. 3

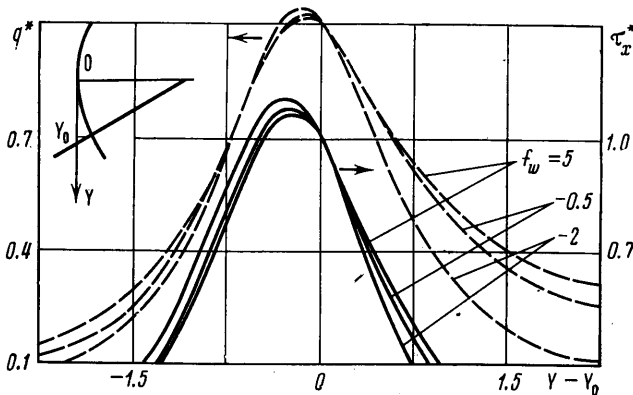
Во-первых, эти величины слабо зависят от параметров γ и ω , от температуры поверхности (для $T_w = \text{const}$) и от угла скольжения ϕ . Например, значения q^* на поверхности параболического цилиндра ($0 \leq s \leq 3$), обтекаемого под нулевым углом атаки, по сравнению с соответствующими значениями при $\phi=0$ менялись при $0 \leq \phi \leq 45^\circ$ менее чем на 1%, а значения τ_x^* и τ_z^* при $\phi=15^\circ$ — на 1%, при $\phi=30^\circ$ — на 2%, при $\phi=45^\circ$ — на 3.5%. Значения q^* , τ_x^* , τ_z^* , подсчитанные при $T_w=0.02$, по сравнению с этими же величинами, подсчитанными при $T_w \leq 0.2$, изменялись менее чем на 1%, а при $T_w=0.6$ изменение q^* составляло менее 1.7%, а τ_x^* и τ_z^* — менее 4%. По сравнению с соответствующими значениями при $\gamma=1.4$ изменение q^* составляло при $\gamma=1.2$ менее 0.5%, при $\gamma=1.1$ — менее 1%; изменение τ_x^* при $\gamma=1.2$ составляло 3%, при $\gamma=1.1$ — 5%; изменение τ_z при $\gamma=1.2$ составляло 1%, при $\gamma=1.1$ — 2%.

Во-вторых, следует отметить, что при обтекании крыла под углом атаки максимальное значение теплового потока достигается не в критической точке, а сдвигается в сторону уменьшения радиуса кривизны контура крыла. С увеличением угла атаки максимум теплового потока увеличивается и сдвигается дальше от критической точки. Коэффициенты трения ведут себя аналогичным образом.

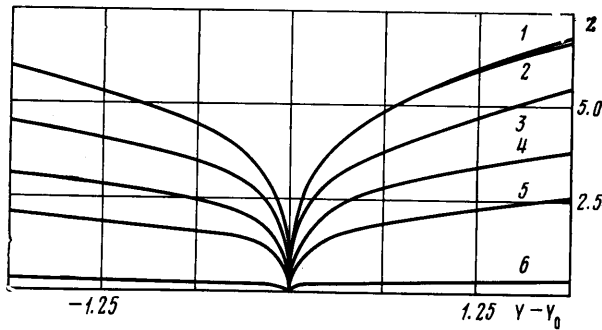
2. *Тепловой поток к идеально каталитической поверхности стреловидного крыла, обтекаемого потоком диссоциированного и ионизованного газа.* В ряде работ [11, 22, 24] было показано, что при обтекании затупленных осесимметричных тел потоком химически реагирующего газа распределение теплового потока вдоль идеально каталитической поверхности, отнесенного к его значению в критической точке, слабо зависит от степени диссоциации и ионизации газа и практически совпадает с распределением, полученным для случая течения однородного сжимаемого газа. Об этом же свидетельствует проведенное в данной работе сравнение теплового пото-

ка q^* , подсчитанного по формуле (3.7), с результатами работ [14, 22], в которых рассчитывалось течение диссоциирующего воздуха в пограничном слое на сфере.

Будем предполагать, что и в случае обтекания стреловидного крыла с затупленной передней кромкой под углом атаки распределение теплового потока на идеально каталитической поверхности слабо зависит от степени диссоциации или ионизации газа. Тогда можно предложить следующую



Фиг. 4



Фиг. 5

формулу для определения теплового потока к поверхности стреловидного крыла, обтекаемого потоком химически реагирующего газа под углом атаки:

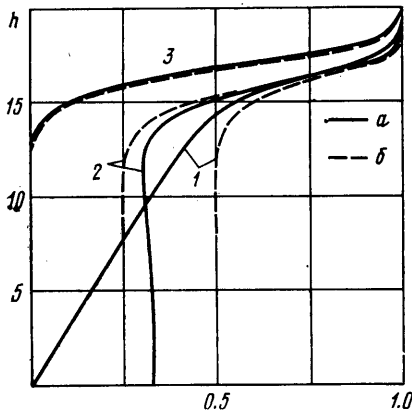
$$(6.2) \quad q(x) = \frac{q_0}{(1.34 - 0.34\nu) l_w^{0.04(1-\nu)}} q^\circ q^*(x)$$

Здесь q° определяется по формуле (3.9), $q^*(x)$ — по формуле (3.7), q_0 — тепловой поток в критическую точку осесимметричного тела, который определяется, например, по формуле Фэя и Ридделла [23], а в случае течения ионизованного газа — по формуле (2.2) работы [24]. Выражение, стоящее в знаменателе, дает отличие теплового потока в критическую точку осесимметричного тела от теплового потока в критическую точку цилиндрического тела при нулевом угле скольжения [21]. При $\nu=1$ и $q^\circ=1$ данная формула может быть использована для расчета теплового потока к поверхности осесимметричных затупленных тел, обтекаемых под нулевым углом атаки.

3. *Ламинарный пограничный слой на проницаемой поверхности.* Сравнение аналитического решения с численным в случае обтекания прони-

цаемой поверхности показало, что аналитические формулы для теплового потока и коэффициентов трения, полученные в первом приближении метода последовательных приближений, могут быть использованы только при малых значениях параметра вдува $-f_w \leq 0,3-0,4$ (погрешность формул (3.11) в диапазоне $0 \leq \varphi \leq 45^\circ$ и $T_w = 0,03$ не превышала: при $-f_w = 0,1-2\%$, при $-f_w = 0,2-4\%$, при $-f_w = 0,3-9\%$, при $-f_w = 0,4-18\%$, с увеличением $-f_w$ погрешность становилась значительной). При наличии формулы (3.11) дают хорошую точность во всем диапазоне изменения параметра отсоса от малых значений до больших. С возрастанием f_w погрешность аналитического решения не увеличивалась и составляла при $0 \leq \varphi \leq 45^\circ$ для τ_x величину порядка 1%, для τ_z — 3%, для q — 7%.

Влияние вдува и отсоса на распределение теплового потока и напряжения трения вдоль поверхности стреловидного крыла показано на фиг. 4.



Фиг. 6

Рассматривалось обтекание параболического цилиндра под углом атаки 15° и углом скольжения 45° при температуре стенки $T_w = 0,03$. Следует отметить слабое влияние угла скольжения φ на распределение величин q^* , τ_x^* , τ_z^* вдоль поверхности крыла.

Сравнение результатов асимптотических решений с численным показывает, что формулы для коэффициентов трения и теплообмена, полученные из асимптотических решений, дают хорошую точность при параметрах вдува $-f_w \geq 1,5-3$ и при параметрах отсоса $f_w \geq 3-5$.

На фиг. 5 для различных значений параметра вдува приведены предельные линии тока на поверхности параболического цилиндра, обтекаемого под углом атаки 15° и углом скольжения 45° ($f_w = 5, 0,5, -0,5, -1, -2$ — кривые 2–6 соответственно; кривая 1 — линия тока внешнего невязкого течения). Как видно из фиг. 5, с увеличением параметра отсоса предельные линии тока на поверхности тела приближаются к линиям тока внешнего невязкого течения, как это следует из асимптотического решения. При увеличении параметра вдува предельные линии тока приближаются к векторным линиям градиента давления, которые в случае обтекания крыла бесконечного размаха совпадают с контуром тела.

На фиг. 6 приведен пример численного расчета слоя смешения (линии б), возникающего при сильном вдуве с поверхности стреловидного крыла, обтекаемого под углом атаки. Кривые 1–3 — профили u , T , w поперек слоя смешения соответственно. Линии а — численное решение полных уравнений пограничного слоя. Из анализа решения можно сделать вывод, что, как и в случае осесимметричного течения в слое смешения [16], неавтономные решения уравнений слоя смешения мало отличаются от автономных.

Авторы выражают благодарность Г. А. Тирскому за полезное обсуждение результатов работы.

Поступила 2 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Струмминский В. В. Скольжение крыла в вязкой жидкости. Докл. АН СССР, 1946, т. 54, № 7.
2. Beckwith I. E. Similar solutions for compressible boundary layer on a yawed cylinder with transpiration cooling. NASA Techn. Rept., 1959, NR-242.

3. *Beckwith I. E., Gallagher J.* Local heat transfer and recovery temperatures on a yawed cylinder at a Mach number of 4.15 and high Reynolds numbers. NASA, Techn. Rept., 1961, NR-104.
4. *Башкин В. А.* Ламинарный пограничный слой на бесконечно длинных эллиптических цилиндрах при произвольном угле скольжения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
5. *Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А.* Гиперзвуковой вязкий ударный слой на стреловидных крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углом атаки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 2.
6. *Гирский Г. А.* Метод последовательных приближений для интегрирования уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя с химическими реакциями, включая реакции ионизации. Ин-т мех. МГУ. Отчет, 1969, № 1016.
7. *Ковач Э. А., Гирский Г. А.* Применение метода последовательных приближений к интегрированию уравнений пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1971, т. 190, № 1.
8. *Брыкина И. Г., Шевелев Ю. Д.* Приближенное решение задачи о трехмерном ламинарном пограничном слое в несжимаемой жидкости. ПМТФ, 1974, № 2.
9. *Шевелев Ю. Д.* Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М., «Наука», 1977.
10. *Lees L.* Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds. Jet Propulsion, 1956, vol. 26, No. 4.
11. *Кетр Н. Н., Розе Р. Н., Детра Р. В.* Laminar heat transfer around blunt bodies in dissociated air. J. Aerospace Sci., 1959, vol. 26, No. 7.
12. *Гершбейн Э. А.* Ламинарный многокомпонентный пограничный слой при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
13. *Гершбейн Э. А.* Об автомодельных численных и асимптотических решениях уравнений пограничного слоя при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.
14. *Гершбейн Э. А.* К асимптотическому решению уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2.
15. *Гершбейн Э. А.* Асимптотическое решение уравнений трехмерного ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при сильном вдуве. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
16. *Мурзинов И. Н., Шинкин Г. П.* Ламинарное смешение однородных потоков при наличии градиента давления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
17. *Morduchow M.* General asymptotic suction solution of the laminar compressible boundary layer with heat transfer. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 8.
18. *Гершбейн Э. А.* Асимптотическое решение уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при интенсивном отсосе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
19. *Гершбейн Э. А.* Асимптотическое решение уравнений трехмерного ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при интенсивном отсосе, Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.
20. *Петухов И. В.* Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. В сб. Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М., «Наука», 1964.
21. *Гирский Г. А.* Определение тепловых потоков в окрестности критической точки двойкой кривизны при обтекании тела диссоциирующим газом произвольного химического состава. ПМТФ, 1965, № 1.
22. *Мурзинов И. Н.* Ламинарный пограничный слой на сфере в гиперзвуковом потоке равновесно диссоциирующего воздуха. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
23. *Фэй, Ридделл.* Теоретический анализ теплообмена в передней критической точке, омываемой диссоциированным воздухом. В сб. Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
24. *Суслов О. Н.* Многокомпонентная диффузия и теплообмен при обтекании тела химически равновесным ионизованным газом. ПМТФ, 1972, № 3.