

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ОБ ИСТЕЧЕНИИ РАДИАЛЬНЫХ ЛАМИНАРНЫХ СТРУЙ
НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

В. И. ЕЛИСЕЕВ, Л. И. СУХИХ, Л. А. ФЛЕЕР

(Днепропетровск)

Рассматриваются две задачи об истечении радиальных ламинарных струй несмешивающихся жидкостей; свободная радиально-щелевая струя и струя на вращающемся диске. Предложен асимптотический метод решения, позволяющий определить параметры течения вдали от источника. Показано отличие рассмотренных течений от течений однородных жидкостей.

1. Постановка задачи. Основные уравнения. Изучение струйных течений разнородных несмешивающихся жидкостей, сильно отличающихся друг от друга своими физическими параметрами, представляет большой теоретический и практический интерес. Особенностью таких течений является наличие поверхности, отделяющей истекающую жидкость от внешней среды. Вследствие вязкостных свойств жидкостей на поверхности выполняются условия равенства скоростей, нормальных и касательных напряжений. Эти условия и определяют взаимное влияние движущихся сред. Учет этого влияния приводит к сопряженной задаче, в которой для получения решения необходимо принять во внимание все характерные области течения.

В данной работе рассмотрим истечение радиальных ламинарных струй несмешивающихся жидкостей. Выпишем основные уравнения движения в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned}
 & u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{w_i^2}{x} = \\
 & = - \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \nu_i \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{u_i}{x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \right) \\
 & u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial y} + \nu_i \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} \right) \\
 & u_i \frac{\partial w_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial w_i}{\partial y} + \frac{u_i w_i}{x} = \nu_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w_i}{\partial x} - \frac{w_i}{x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) \\
 & \frac{\partial(xu_i)}{\partial x} + \frac{\partial(xv_i)}{\partial y} = 0, \quad i=1, 2
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Здесь ось x лежит в радиальной плоскости; u_i , v_i и w_i — соответственно радиальная, осевая и тангенциальная составляющие скорости, p_i — давление, ρ_i — плотность, ν_i — кинематическая вязкость.

Согласно схемам течения (фиг. 1, 2), будем различать две области течения: внутреннюю — область, занятую истекающей жидкостью, и область внешнего пограничного слоя. Параметры, относящиеся к внутренней области, имеют индекс «1»; относящиеся к внешней области — индекс «2».

Будем считать, что границы струй гладкие, волн на поверхности нет, струи не разрушаются. В такой постановке интегральным методом в работе [1] была рассмотрена плоская струя несмешивающейся с окружающей средой жидкости. Осесимметричные струи интегральным и численным методами были исследованы в работах [2, 3]. В данной статье используем асимптотический метод, разработанный в [4, 5].

2. Радиально-щелевая закрученная струя. Будем решать эту задачу (фиг. 1) в рамках теории пограничного слоя. Как и в задаче о течении радиально-щелевой струи в затопленном пространстве [6], параметры течения здесь определяются заданием интегральных условий сохранения количества движения, момента количества движения и постоянства истекающей массы соответственно

$$(2.1) \quad \frac{d}{dx} \int_0^y x u_1^2 dy + \frac{d}{dx} \int_{v_*}^{\infty} x u_2^2 dy = \int_0^{v_*} w_1^2 dy + \int_{v_*}^{\infty} w_2^2 dy$$

$$(2.2) \quad 2\pi\rho_1 x^2 \int_0^{v_*} u_1 w_1 dy + 2\pi\rho_2 x^2 \int_{v_*}^{\infty} u_2 w_2 dy = L_0 = \text{const}$$

$$(2.3) \quad 2\pi\rho_1 x \int_0^{v_*} u_1 dy = G$$

где y_* — граница раздела.

Вводя функцию тока ψ_i , представим первые члены разложений решений соответственно во внутренней и внешней областях в виде

$$\psi_1 \propto X^l a_0^2 U F(n), \quad w_1 \propto X^m W R(n), \quad n \propto \frac{y}{a_0 X^k}$$

$$\psi_2 \propto X^p a_0^2 U G(h), \quad w_2 \propto X^r W Q(h), \quad h \propto \frac{y - a_0 X^k}{a_0 X^r}$$

$$u_i = \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial y}, \quad v_i = -\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}, \quad X = \left(\frac{A v_1}{U a_0} \right)^{1/2} \frac{x}{a_0}$$

Здесь a_0 — линейный масштаб; U, W — масштабы скоростей; l, m, k, p, n, r — постоянные величины; A — некоторая постоянная.

Из условия сохранения массы во внутренней области имеем $l=0$. Остальные коэффициенты определяются из следующих условий: условия равноправности вязких и динамических членов во внешнем пограничном слое; условия равенства при $X \rightarrow \infty$ импульса и момента количества движения присоединенной массы соответственно величинам I_0 и L_0 ; условия равенства скоростей на границе раздела. Совокупность выписанных требований определяет следующие значения: $n=-2, r=1, p=1, k=0, m=-2$, откуда видно, что толщина собственно струи (внутренней области) при $X \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к постоянной величине. Для модели идеальной жидкости или вязкой жидкости с касательными напряжениями, равными нулю на границе, из условий сохранения массы и количества движения можно получить, что $y_* \propto X^{-1}$. Из этой оценки видно влияние окружающей среды на течение инородной жидкости.

Определив первые члены разложений, можно выписать асимптотические решения во внутренней и внешней областях соответственно

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \psi_1 &= a_0^2 U [F_0(n) + X^{-1} F_1(n) + X^{-2} F_2(n) + \dots] \\ w_1 &= W X^{-2} [R_0(n) + X^{-1} R_1(n) + X^{-2} R_2(n) + \dots] \end{aligned}$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} n &= y [a_0 + a_1 X^{-1} + a_2 X^{-2} + \dots]^{-1} \\ \psi_2 &= a_0^2 U X [G_0(h) + X^{-1} G_1(h) + X^{-2} G_2(h) + \dots] \\ w_2 &= W X^{-2} [Q_0(h) + X^{-1} Q_1(h) + \dots] \end{aligned}$$

$$h = [y - (a_0 + X^{-1} a_1 + X^{-2} a_2 + \dots)] [X(a_0 + X^{-1} a_1 + X^{-2} a_2 + \dots)]^{-1}$$

где a_i — поправочные коэффициенты.

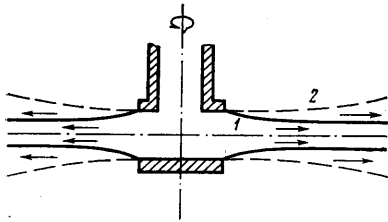
Граница между жидкостями определяется из равенства $n=1$ или $h=0$. Из найденных коэффициентов k и r видно, что в данной задаче склеиваются решения в областях, имеющих различные масштабы: ширина струи $y_* \propto a_0 X^0$, а толщина внешнего пограничного слоя $\delta \propto a_0 X$. Эту особенность решений необходимо учитывать при определении граничных условий для членов разложений F_j, R_j, G_j и Q_j . Подставляя (2.4) в уравнения движения [6], можно получить уравнения для функций F_j и R_j

$$(2.6) \quad F_0''' = 0, F_1''' = 0, F_2''' = -A, F_3''' = 0, R_0'' = 0, R_1'' = 0, R_2'' = -D_0 A$$

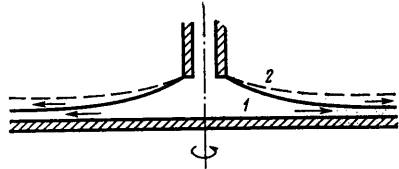
для которых выполняются граничные условия

$$(2.7) \quad F_0(1) = 1, F_j(1) = 0, F_j''(0) = 0, R_j'(0) = 0 \quad (j > 0)$$

Непосредственным интегрированием уравнений (2.6) с учетом (2.7)



Фиг. 1



Фиг. 2

можно получить

$$(2.8) \quad F_0(n) = n, F_1 = 0, F_2(n) = \frac{nA}{6} (1 - n^2), F_3 = 0$$

$$R_0 = D_0, R_1 = D_1, R_2 = -\frac{D_0}{2} n^2 A + D_2$$

На границе раздела условия равенства скоростей и касательных напряжений для рассмотренного количества приближений обуславливают следующий вид граничных условий:

$$(2.9) \quad G_j(0) = 0, F_j'(1) = G_j'(0), \mu_1 F_{j+1}''(1) = \mu_2 G_j''(0)$$

$$R_j(1) = Q_j(0), \mu_1 R_{j+1}'(1) = \mu_2 Q_j'(0)$$

Здесь μ — динамическая вязкость.

Подставляя теперь (2.5) в уравнение движения [6], после замены $G_j = C g_j(t), Q_j = B q_j(t)$, где $t = 0.5 Dh$, получим во внешней области в первом приближении уравнение для g_0, q_0

$$(2.10) \quad g_0''' + 2(g_0'' g_0 + g_0'^2) = 0$$

$$g_0(0) = 0, g_0'(0) = 2/CD, g_0'(\infty) = 0, g_0''(0) = 0$$

$$(2.11) \quad q_0'' + 2(g_0' q_0 + g_0 q_0') = 0$$

$$q_0(0) = D_0 B^{-1}, q_0'(0) = 0, q_0(\infty) = 0$$

При $0.5 CD = 1$ решение уравнения (2.10) хорошо известно [6]. Принимая также $B = 1, D_0 = 1$, будем иметь

$$(2.12) \quad g_0 = \text{th}(t), q_0 = g_0' = 1 - \text{th}^2(t)$$

Во втором приближении можно записать

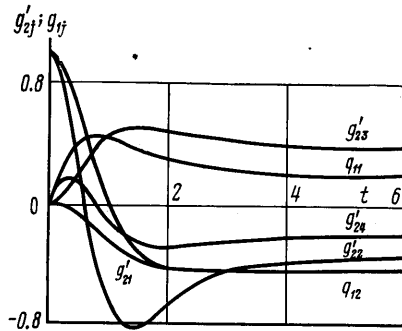
$$g_1''' + 2 \left(3g_0' g_1' + g_0 g_1'' + \frac{a_1}{a_0} g_0 g_0'' \right) = 0 \quad (2.13)$$

$$g_1(0) = 0, \quad g_1'(0) = 0, \quad g_1'(\infty) = 0, \quad g_1''(0) = -2\gamma A/D$$

$$q_1'' + 2g_0 q_1' + 4g_0' q_1 + 2g_1' q_0 = 0 \quad (2.14)$$

$$q_1(0) = D_1, \quad q_1'(0) = -2\gamma A/D, \quad q_1(\infty) = 0, \quad \gamma = \mu_1/\mu_2$$

Имеем два уравнения второй и третьей степени и семь граничных условий. Дополнительными неизвестными величинами являются D_1 и a_1/a_0 .



Фиг. 3

Решениями последних уравнений являются выражения

$$(2.15) \quad g_1 = A_1(g_0' - 1), \quad q_1 = A_1 g_0'' + K_{11} q_{11} + K_{12} q_{12}$$

где функции q_{11} и q_{12} , представленные на фиг. 3, удовлетворяют однородному уравнению при следующих граничных условиях:

$$q_{11}(0) = 0, \quad q_{12}(0) = 1, \quad q_{11}'(0) = 1, \quad q_{12}'(0) = 0$$

Из граничных условий и значений $q_{11}(\infty) = 0.184$, $q_{12}(\infty) = -0.423$, следующих из фиг. 3, определим, что

$$(2.16) \quad \frac{a_1}{a_0} = 0, \quad A_1 = -\gamma \frac{A}{2}, \quad K_{11} = -2\gamma A$$

$$K_{12} = D_1 = \frac{K_{11}}{2.296}, \quad C = 1, \quad D = 2$$

В следующем приближении выпишем уравнение только для g_2

$$(2.17) \quad g_2''' + 2 \left(g_2'' g_0 + 4g_2' g_0' - g_0'' g_2 + 2g_1'^2 + \chi q_0'^2 + \frac{a_2}{a_0} (g_0 g_0'' - g_0'^2) \right) = 0$$

$$\chi = \frac{W^2 a_0}{A \nu_1 U}, \quad g_2(0) = 0, \quad g_1'(0) = -\frac{A}{3}, \quad g_2'(0) = g_2'(\infty) = 0$$

Решение этого уравнения можно представить в виде суммы

$$(2.18) \quad g_2 = A g_0' + \frac{A_1^2}{2} g_0'' + \frac{a_2}{a_0} g_{23} + \chi g_{24} + C_{21} g_{21} + C_{22} g_{22}$$

Здесь g_{21}, g_{22} — решения однородных уравнений $g_{21}(0)=1, g_{21}'(0)=0, g_{21}''(0)=0, g_{22}(0)=0, g_{22}'(0)=1, g_{22}''(0)=0$; g_{23} и g_{24} — решения соответствующих неоднородных уравнений $g_{23}(0)=0, g_{23}'(0)=0, g_{23}''(0)=0, g_{24}(0)=0, g_{24}'(0)=0, g_{24}''(0)=1$.

Используя численные значения этих функций на бесконечности (фиг. 3) и граничные условия при $h=0$, найдем

$$(2.19) \quad A_2 = \frac{\chi}{2}, \quad \frac{a_2}{a_0} = 1.15C_{22} + C_{21} + 0.57\chi$$

$$C_{21} = -\frac{\chi}{2}, \quad C_{22} = \left(\gamma \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A}{3}, \quad A = \frac{2}{\kappa}, \quad \kappa = \frac{v_2}{v_1}$$

Определим теперь с помощью решений первого приближения масштабные величины a_0 ; U и W из интегральных соотношений

$$(2.20) \quad a_0 = \frac{G}{4\pi r_1} \left(\frac{3}{4} \frac{I_0}{\pi r_2 (4Av_1)^{0.5}} \right)^{-2/3}$$

$$U = \left(\frac{3}{4} \frac{I_0}{\pi r_2 (4Av_1)^{0.5}} \right)^{2/3} a_0^{-1}, \quad W = \frac{3L_0 (Av_1)^{0.5}}{8\pi r_2 a_0^{3.5} U^{1.5}}$$

Используя полученные решения, выпишем выражения для скорости u_1 и w_1 на оси струи

$$(2.21) \quad u_1 = \left(\frac{Av_1}{Ua_0} \right)^{0.5} \frac{X^{-1}}{a_0} \left[\frac{3}{4} \frac{I_0}{\pi r_2 (4Av_1)^{0.5}} \right]^{2/3} \left[1 + \left(\frac{A}{6} - \frac{a_2}{a_0} \right) X^{-2} \right]$$

$$w_1 = \frac{3^{2/3}}{4} \frac{L_0}{(\pi r_2)^{2/3} I_0^{1/3} (Av_1)^{1/3}} \frac{(Av_1) X^{-2}}{Ua_0^3} (1 + X^{-1} D_1)$$

Выражения (2.21) являются наиболее общими решениями задачи о течении ламинарных струй. Известные формулы [6] могут быть получены из (2.21) путем предельного перехода $G \rightarrow 0$ при подстановке в (2.21) всех необходимых величин U ; W ; a_0 и X .

3. Струя на вращающемся диске. Рассмотрим задачу о растекании инородной жидкости на диске, равномерно вращающемся в безграничной среде вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости (фиг. 2). Для решения используем полные уравнения движения. В отличие от свободной радиально-щелевой струи здесь выполняется только одно интегральное условие сохранения массы истекающей жидкости, которое совпадает с (2.3).

Вводя функцию тока, выпишем первые члены разложений в той же форме, что и ранее. Коэффициент l равен нулю вследствие сохранения массы в области 1. Для определения остальных коэффициентов служат следующие условия: условие равноправности вязких и динамических членов уравнений во внешней области; постоянство угловой скорости, вследствие чего $w_1 \propto X$; условие равенства касательных напряжений на границе раздела; условие равенства тангенциальных скоростей. Из этих условий получим: $k=-1, m=n=1, r=0, p=2$. Масштабы сопрягаемых областей, как и в предыдущей задаче, различны: толщина внешнего пограничного слоя постоянна, толщина же пленки уменьшается $y \propto X^{-1}$.

Представим теперь решения основных уравнений во внутренней и внешней областях соответственно в виде

$$(3.1) \quad \psi_1 = a_0 W [F_0(n) + X^{-1} F_1(n) + X^{-2} F_2(n) + \dots]$$

$$w_1 = WX [R_0(n) + X^{-1} R_1(n) + X^{-2} R_2(n) + \dots]$$

$$\begin{aligned}
 n &= yX(a_0 + X^{-1}a_1 + X^{-2}a_2 + \dots)^{-1}, \quad X = \left(\frac{Av_1}{Wa_0} \right)^{1/2} \frac{x}{a_0} \\
 \psi_2 &= a_0WX^2[G_0(h) + X^{-1}G_1(h) + X^{-2}G_2(h) + \dots] \\
 w_2 &= WX[Q_0(h) + X^{-1}Q_1(h) + X^{-2}Q_2(h) + \dots] \\
 h &= [y - X^{-1}(a_0 + X^{-1}a_1 + X^{-2}a_2 + \dots)](a_0 + X^{-1}a_1 + \dots)^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Здесь W — масштаб скорости.

Давление на рассматриваемое количество приближений не влияет и поэтому не учитывается. Подставляя (3.1) в основные уравнения для определения функций F_j и R_j , получим следующие уравнения и граничные условия:

$$F_0''' = 0, \quad F_1''' = -\text{Re}_1 R_0^2, \quad F_2''' = -\text{Re}_1 \left[2R_0 R_1 + 3 \frac{a_1}{a_0} R_0^2 \right]
 \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 R_0'' &= 0, \quad R_1'' = 0, \quad R_2'' = 0, \quad R_3'' = (\text{Re}_1 A)^{0.5} Q_0 F_0', \quad \text{Re}_1 = Wa_0/v_1 \\
 F_0(1) &= 1, \quad F_j(1) = 0, \quad F_j(0) = F_j'(0) = 0, \quad R_0(0) = 1, \quad R_j(0) = 0 \quad (j > 0)
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Для выполнения равенства скоростей и касательных напряжений на границе между жидкостями для рассмотренного количества приближений необходимы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 F_j'(1) &= G_{j+1}'(0), \quad \mu_1 F_j''(1) = \mu_2 G_j''(0), \quad G_j(0) = 0 \\
 R_j(1) &= Q_j(0), \quad \mu_1 R_{j+1}'(1) = \mu_2 Q_j'(0)
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Интегрируя уравнения при условиях (3.4), будем иметь во внутренней области

$$F_0 = n^2, \quad F_1 = \frac{\text{Re}_1}{6} n^2 (1-n), \quad R_0 = 1, \quad R_1 = C_1 n, \quad R_2 = C_2 n
 \tag{3.6}$$

Во внешней области после замены $G_j = Cg_j(t)$, $Q_j = Bq_j(t)$, $t = Dh$, где

$$D = \left(\frac{2\gamma}{0.51} \right)^{-1} \text{Re}_1 \kappa, \quad C = \left(\frac{2\gamma}{0.51} \right) (\text{Re}_1 \kappa)^{-2}$$

$$A = \frac{\text{Re}_1^3 \kappa^2}{(2\gamma/0.51)^4}, \quad B = 1, \quad \kappa = \frac{v_1}{v_2}, \quad \gamma = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

и подстановки решений в основные уравнения получим в первом приближении

$$g_0''' = g_0'^2 - 2g_0 g_0'' - q_0^2, \quad g_0(0) = 0, \quad g_0'(0) = 0, \quad g_0'(\infty) = 0
 \tag{3.7}$$

$$q_0'' = 2(g_0' q_0 - g_0 q_0'), \quad q_0(0) = 1, \quad q_0(\infty) = 0
 \tag{3.8}$$

Используя численные решения этих уравнений [6], из условия равенства касательных напряжений на границе раздела определим значение постоянной C_1

$$C_1 = -0.62\gamma^{-1}D
 \tag{3.9}$$

Выпишем уравнения для g_1 и q_1 во втором приближении

$$\begin{aligned}
 g_1''' &= g_0' g_1' - g_1 g_0'' - 2g_0 g_1'' + \frac{a_1}{a_0} (2g_0'^2 - 2g_0 g_0'' - 3q_0^2) - 2q_0 q_1' \\
 g_1(0) &= 0, \quad g_1'(0) = \frac{2}{CD}, \quad g_1'(\infty) = 0, \quad g_1''(0) = -\frac{2}{3} \gamma \frac{\text{Re}_1}{CD^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

$$(3.11) \quad q'' = g_0' q_1 + 2g_1' q_0 - g_1 q_0' - 2g_0 q_1' + 2 \frac{a_1}{a_0} (g_0' q_0 - q_0' g_0)$$

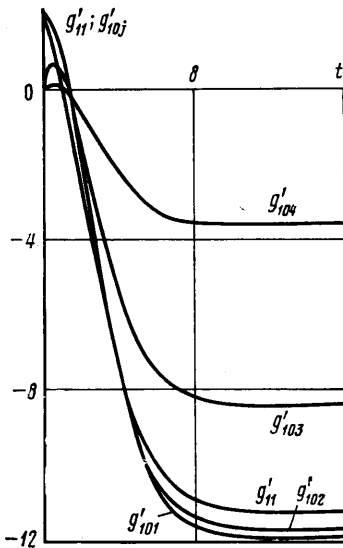
$$q_1(0) = C_1, \quad q_1'(0) = \gamma \frac{C_2}{D}, \quad q_1(\infty) = 0$$

Чтобы сохранить общность решения, т. е. не задавать конкретные значения физических констант, характеризующих жидкости, представим функции g_1 и q_1 в виде

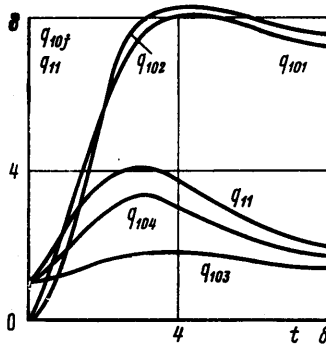
$$(3.12) \quad g_1 = \alpha g_{101} + \beta g_{102} + \xi g_{103} + \sigma g_{104} + \frac{a_1}{a_0} g_{11}$$

$$q_1 = \alpha q_{101} + \beta q_{102} + \xi q_{103} + \sigma q_{104} + \frac{a_1}{a_0} q_{11}$$

где g_{10j}, q_{10j} — решения однородных уравнений, а g_{11} и q_{11} — решения соответствующих неоднородных уравнений.



Фиг. 4



Фиг. 5

Граничные условия, при которых численно определялись неизвестные функции (фиг. 4, 5), имеют вид

$$(3.13) \quad \begin{aligned} g_{101}(0) &= 0, & g_{102}(0) &= 0, & g_{103}(0) &= 0, & g_{104}(0) &= 0 \\ g'_{101}(0) &= 1, & g'_{102}(0) &= 0, & g'_{103}(0) &= 1, & g'_{104}(0) &= 0 \\ g''_{101}(0) &= 0, & g''_{102}(0) &= 1, & g''_{103}(0) &= 0, & g''_{104}(0) &= 1 \\ g_{11}(0) &= 0, & g'_{11}(0) &= 1, & g''_{11}(0) &= 1, & g_1(\infty) &= 0 \\ q'_{101}(0) &= 2, & q'_{102}(0) &= 3, & q'_{103}(0) &= 0, & q'_{104}(0) &= 0 \\ q_{101}(0) &= 0, & q_{102}(0) &= 0, & q_{103}(0) &= 1, & q_{104}(0) &= 1 \\ q_{11}(0) &= 1, & q'_{11}(0) &= 0, & q_1(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

Используя граничные условия и численные значения найденных функций на бесконечности, определим постоянные

$$\alpha = D \left(1.04\gamma^{-1} - 0.44 \frac{\gamma}{x} \right), \quad \beta = D \left(-0.896\gamma^{-1} + 0.43 \frac{\gamma}{x} \right)$$

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \xi &= D \left(-1.51\gamma^{-1} + 1.096 \frac{\gamma}{\kappa} \right) \\ \sigma &= D \left(-0.084\gamma^{-1} - 0.44 \frac{\gamma}{\kappa} \right), \quad \frac{a_1}{a_0} = D \left(0.98\gamma^{-1} - 0.65 \frac{\gamma}{\kappa} \right) \\ C_2 &= D\gamma^{-1}(2\alpha + 3\beta) \end{aligned}$$

Найдем теперь масштаб скорости W из условия $w_1(0) = \omega x$, где ω — угловая скорость; из условия сохранения массы можно найти a_0 ; тогда

$$(3.15) \quad W = (2\gamma/0.51) (\omega v_1 \kappa^{-1})^{0.5}, \quad a_0 = (G/2\pi W)^{0.5}$$

Ограничиваясь первыми двумя приближениями, выпишем выражения для тангенциальной и радиальной скоростей во внутренней области и момента сопротивления жидкости вращению диска

$$(3.16) \quad \begin{aligned} w_1 &= (\omega v_1)^{0.5} \kappa^{-0.5} (2\gamma/0.51) X [1 + C_1 n X^{-1} + C_2 n X^{-2}] \\ u_1 &= \omega a_0 [2n + n(\text{Re}_1^{1/3} - n/2) - 2a_1/a_0] X^{-1} \\ M &= 2\pi \mu_1 \frac{v_1^2 (2\gamma/0.51)^4}{\omega \kappa^2} \left[\frac{C_1}{a_0} \frac{X^4}{4} + \left(\frac{C_2}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} \frac{C_1}{a_3} \right) \frac{X^3}{3} \right] \end{aligned}$$

Полагая, что $G \rightarrow 0$, можно получить известные решения задачи о вращении диска в неограниченной среде [6]. Сравним теперь полученные результаты с течением пленки, для которой касательные напряжения на границе равны нулю. Согласно [7], в этом случае $u_* \propto X^{-1/2}$ и $w_1 \propto X^{-1/2}$, в рассмотренном же здесь случае $u_* \propto X^{-1}$, $w_1 \propto X^0$, т. е. получен парадоксальный результат, заключающийся в том, что пленка при взаимодействии с окружающей средой не тормозится, как, например, в первой задаче, а ускоряется. Это происходит за счет передачи через пленку во внешнюю область окружной скорости $w_2 \propto X$, вследствие чего радиальная составляющая, согласно [8], также имеет порядок $u_2 \propto X$. Таким образом, для достаточно больших X скорость во внешней среде растет быстрее, чем в пленке, в результате чего окружающая среда должна оказывать ускоряющее действие на пленку жидкости.

Поступила 5 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Генкин А. Л., Кукес В. И., Ярин Л. П. О распространении струи несмешивающихся жидкостей. В сб. Проблемы теплоэнерг. и прикл. теплофиз. Вып. 9. Алма-Ата, «Наука», 1973.
2. Yu H., Scheele G. F. Laminar jet contraction and velocity distribution in immiscible liquid-liquid systems. Int. J. Multiphase Flow, 1975, vol. 2, N 2.
3. Haldar B., Mitra A. K. Studies on the hydrodynamics of vertical laminar liquid-jets. Indian J. Technol., 1971, vol. 9, N 4.
4. Елисеев В. И. Истечение ламинарных струй несмешивающихся несжимаемых жидкостей. В сб.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Вып. 21. Днепропетровск, 1976.
5. Елисеев В. И. Асимптотическое решение задачи об истечении тяжелых ламинарных струй несмешивающихся жидкостей. ПМТФ, 1977, № 2.
6. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
7. Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей. М., «Машиностроение», 1977.