

МЕТОД ОБОБЩЕННОГО ПОДОБИЯ В ЗАДАЧАХ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ ИЛИ ТЕПЛОвого ПОТОКА НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКЕ

Н. Л. ЗОЛОТОВ

(Ленинград)

Автомодельная задача о свободной конвекции вблизи нагретой вертикальной пластины для простейшего случая постоянной температуры поверхности была впервые решена в [1]. В [2] было показано существование автомодельного решения задачи о свободной конвекции для вертикальных пластин и цилиндров при степенном распределении температуры по их поверхностям. В [3] решение [2] было обобщено на случай свободной конвекции вблизи тонкого тела вращения, но также только в автомодельном случае степенного распределения температуры по поверхности. В статье [4] эта задача решена в расширенной неавтомодельной постановке, но искусственным, не обладающим общностью методом, близким к методу Гертлера, отличающимся медленной сходимостью приближений.

Настоящая статья содержит решение задачи о свободной конвекции вблизи вертикальной пластины с произвольным распределением температуры или теплового потока по его поверхности. Строгое применение метода обобщенного подобия [5] приводит в этом случае к универсальным уравнениям, представляющим непреодолимые вычислительные трудности, что заставляет пользоваться для решения этого класса задач упрощенным, но достаточно общим методом.

1. Вывод универсальных уравнений свободной конвекции в упрощенной постановке метода обобщенного подобия. Уравнения свободной конвекции в ламинарном пограничном слое на вертикальной пластине с граничными условиями первого или второго рода могут быть в обычных обозначениях представлены в форме

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \beta g (T - T_\infty) \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

$$u=v=0, \quad T=T_w(x), \quad y=0; \quad u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty, \quad y \rightarrow \infty$$

или

$$u=v=0, \quad \lambda (\partial T / \partial y)_w = q_w(x), \quad y=0; \quad u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty, \quad y \rightarrow \infty$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$(1.2) \quad \eta = y/\delta; \quad \Phi = \psi/U\delta, \quad S = \beta(T - T_\infty)/\theta, \quad \theta = \beta(T_w - T_\infty), \quad \theta = \beta\delta q_w/\lambda$$

где первая формула соответствует заданной температуре стенки, вторая — заданному тепловому потоку соответственно

$$(1.3) \quad U = gz\theta, \quad z = \delta^2/\nu$$

Здесь η — безразмерная поперечная координата; ψ — функция тока; Φ — безразмерная функция тока; U — масштаб скоростей; q_w — тепловой поток; S — безразмерная температура в жидкости; θ — безразмерный перепад температуры; δ — масштаб поперечной координаты.

Следя идеям метода обобщенного подобия в несколько упрощенной, частной форме, будем искать решение задачи в виде

$$(1.4) \quad \psi = U\delta\Phi(\eta, \lambda_1, \lambda_2, \dots; \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots), \quad S = S(\eta, \lambda_1, \lambda_2, \dots; \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots)$$

$$(1.5) \quad \lambda_k = g^k z^{2k} \theta^{(k-1)} \frac{d^k \theta}{dx^k}; \quad \lambda_k^* = g^k z^{2(k-1)} \theta^k \frac{d^k z^2}{dx^k}; \quad k=1, \dots, \infty$$

Вводя в уравнения (1.1) указанные преобразования, приходим к следующей универсальной (в смысле независимости от частного задания распределения температуры или теплового потока T_w или q_w) системе уравнений (точка над буквой — производ-

ная по η ; σ — число Прандтля $\sigma = \nu/a$)

$$\ddot{\Phi} + \left(\lambda_1 + \frac{3}{4} \lambda_1^* \right) \Phi \ddot{\Phi} - \left(\lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_1^* \right) \dot{\Phi}^2 + S =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[R_k \left(\dot{\Phi} \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \lambda_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_k} \ddot{\Phi} \right) + R_k^* \left(\dot{\Phi} \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \lambda_k^*} - \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_k^*} \ddot{\Phi} \right) \right]$$

$$(1.6) \quad \frac{\delta}{\sigma} + \left(\lambda_1 + \frac{3}{4} \lambda_1^* \right) \Phi S - \lambda_1 \dot{\Phi} S =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[R_k \left(\dot{\Phi} \frac{\partial S}{\partial \lambda_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_k} S \right) + R_k^* \left(\dot{\Phi} \frac{\partial S}{\partial \lambda_k^*} - \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_k^*} S \right) \right]$$

или

$$\Phi = \dot{\Phi} = 0, \quad S_w = 1, \quad \eta = 0; \quad \dot{\Phi} \rightarrow 0, \quad S \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty$$

$$\Phi = \dot{\Phi} = 0, \quad S_w = 1, \quad \eta = 0; \quad \dot{\Phi} \rightarrow 0, \quad S \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty$$

$$R_k = [k\lambda_1^* + (k-1)\lambda_1] \lambda_k + \lambda_{k+1}; \quad R_k^* = [k\lambda_1 + (k-1)\lambda_1^*] \lambda_k^* + \lambda_{k+1}^*$$

2. Интегральные соотношения для импульса и температуры. Первый этап метода заключается в численном решении уравнений системы (1.6) на ЭВМ, которое проводится один раз, и табулировании этого решения. Чтобы довести задачу до конца в каждом конкретном случае следует определить величины $\lambda_k(x)$ и $\lambda_k^*(x)$, а тем самым и $\delta(x)$. Решение этой задачи составляет второй этап метода. Необходимые для этого интегральные соотношения импульсов и энергии выводятся из уравнений системы (1.6) почленным интегрированием их по η от 0 до ∞ . При этом с целью упрощения получаемых соотношений в качестве δ выбираем величину

$$(2.1) \quad \lambda_s^* = \int_0^{\infty} \dot{\Phi} S dy$$

представляющую функционал распределения скоростей и температур в сечениях пограничного слоя.

Вводя еще величину толщины потери импульса δ^{**} и толщину δ_s , которые в данном случае определяются отношением

$$(2.2) \quad \delta^{**}/\delta_s^* = \int_0^{\infty} \dot{\Phi}^2 d\eta; \quad \delta_s/\delta_s^* = \int_0^{\infty} S d\eta$$

получим систему двух интегральных соотношений

$$(2.3) \quad \ddot{\Phi}(0, \lambda_1, \lambda_2, \dots; \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots) + \left(2\lambda_1 + \frac{5}{4} \lambda_1^* \right) - \delta_s/\delta_s^* =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[R_k \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (\delta^{**}/\delta_s^*) + R_k^* \frac{\partial}{\partial \lambda_k^*} (\delta^{**}/\delta_s^*) \right]$$

$$S(0, \lambda_1, \lambda_2, \dots; \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots) + \sigma \left(2\lambda_1 + \frac{3}{4} \lambda_1^* \right) = 0$$

Здесь $\ddot{\Phi}(0, \lambda_k; \lambda_k^*)$ — безразмерное трение, а $S(0, \lambda_k; \lambda_k^*)$ — безразмерный тепловой поток на поверхности пластины.

Ограничимся в выражении S в левой части второго уравнения системы (2.3) однопараметрическим приближением $S(0, \lambda_1)$. Тогда получим выражение λ_1^* через λ_1

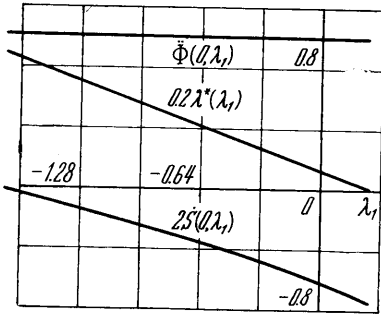
$$(2.4) \quad \lambda_1^* = -\frac{4}{3\sigma} S(0, \lambda_1) + \frac{8}{3} \lambda_1$$

которое, используя вторую систему равенств (1.5) при $k=1$ и полагая $z=(\delta_s^*)^2/\nu$, можно переписать в виде дифференциального уравнения

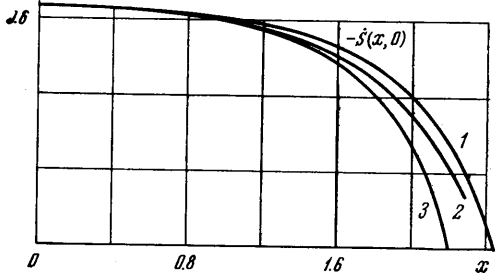
$$(2.5) \quad \frac{dz_s^2}{dx} + \frac{8}{5} \frac{\vartheta_x'}{\vartheta} z_s^2 = -\frac{4}{3} \frac{S(0, \lambda_1)}{\sigma g \vartheta}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по x .

Уравнение (2.5) служит при заданном $\vartheta(x)$ для определения z_s , а следовательно, и «толщины» пограничного слоя δ_s^* , входящей в определение η .



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Численное решение универсальных уравнений. Систему уравнений (1.6) в однопараметрическом приближении при λ_1^* , выраженном через λ_1 согласно (2.4), и при замене $\Phi = \varphi$ можно переписать в виде

$$(3.1) \quad \ddot{\varphi} + \left(\lambda_1 + \frac{3}{4} \lambda_1^* \right) \Phi \dot{\varphi} - \left(\lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_1^* \right) \varphi^2 + S = R_1 \left(\dot{\Phi} \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} \ddot{\Phi} \right)$$

$$\frac{S}{\sigma} + \left(\lambda_1 + \frac{3}{4} \lambda_1^* \right) \Phi S - \lambda_1 \varphi S = R_1 \left(\dot{\Phi} \frac{\partial S}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} \ddot{\Phi} \right)$$

$\varphi = \Phi = 0, \quad S = 1, \quad \eta = 0; \quad \varphi \rightarrow 0, \quad S \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty$

и проинтегрировать методом итераций [6].

Численный расчет производился на машине ЕС-1033. Заменяя производные в уравнениях (3.1) их конечно-разностными отношениями, получим систему уравнений, которую решаем методом простой прогонки [7]. В первой точке за начальное значение берется $\lambda_1 = 0$, решение осуществляется вправо от этой точки до точки, где $\lambda_1^* = 0$, и влево до точки, где $S_w = 0$. За начальную итерацию при $\lambda_1 = 0$ принимаем, что изменение функции S происходит линейно от 1 при $\eta = 0$ до 0 при $\eta = M$, а $\varphi = 0$.

На фиг. 1 приведены результаты численного интегрирования уравнений (3.2); показаны графики универсальных функций $\Phi(0, \lambda_1)$, $S(0, \lambda_1)$ и $\lambda_1^*(\lambda_1)$ при $\sigma = 0.7$.

4. Обсуждение результатов. Как видно из фиг. 1, график функции $\lambda_1^*(\lambda_1)$ почти точно совпадает с прямой. Округляя коэффициенты, примем приближенно

$$(4.1) \quad \lambda_1^*(\lambda_1) = a - b\lambda_1, \quad a = 0.59, \quad b = 2.22$$

Тогда решение второго уравнения системы (2.3) может быть приведено к квадратуре [5]

$$(4.2) \quad \lambda_1(x) = a \vartheta_x'(x) \int_0^x \vartheta^{b-1}(\xi) d\xi / \vartheta^b(x)$$

Проиллюстрируем применение результатов однопараметрического решения универсальных уравнений (3.1) к частной задаче о свободной конвекции при распределении температуры по закону синуса $\vartheta = \beta \sin x$.

Полученные результаты сравнены с точным численным решением, взятым из работы [4]. На фиг. 2 обозначено: 1 — точное численное решение; 2 — приближенное однопараметрическое решение настоящей работы; 3 — автоматическое решение. Как

видно из графика, оправдывается суждение об эффективности предложенного упрощенного метода обобщенного подобия, дающего удовлетворительный результат уже в однопараметрическом приближении. В случае пристенного пограничного слоя [5] было показано, что двухпараметрическое решение дает результат, почти не отличающийся от точного. Можно думать, что и в настоящем случае применение двух параметров λ_1 и λ_2 приведет почти к полному совпадению с точным решением. Решение универсальных уравнений (1.6) в двухпараметрическом приближении вызывает некоторые вычислительные трудности, преодолением которых автор в настоящее время занимается.

Автор благодарит Л. Г. Лойцянского и Е. М. Смирнова за обсуждение результатов работы и ценные замечания.

Поступила 18 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Pohlhausen E. Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung. ZAMM, 1921, Bd. 1, N 2.
2. Yang K.-T. Possible similarity solutions for laminar free convection on vertical plates and cylinders. J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, N 2.
3. Van Dyke M. Free convection from a vertical needle. В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды (К 60-летию академика Л. И. Седова). М., «Наука», 1969.
4. Kao T.-T., Domoto G. A., Elrod H. G., Jr. Free convection along a nonisothermal vertical flat plate. Trans. ASME, Ser. C, J., Heat Transfer, 1977, vol. 99, N 1.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1978.
6. Симюни Л. М., Терентьев Н. М. Численное решение уравнений «однопараметрической» теории пограничного слоя. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1965, № 248.
7. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.

УДК 539.198:533.6.011.8

О ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ МОЛЕКУЛЯРНОГО ПУЧКА В УСЛОВИЯХ ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ НЕРАВНОВЕСНОСТИ

А. Е. ЗАРВИН, Р. Г. ШАРАФУТДИНОВ

(Новосибирск)

В предложенной в [1] модели формирования молекулярного пучка предполагались идеальные условия, при которых расширение газового потока происходит по изэнтропическому закону, внесение скиммера в газовый поток не вызывает возмущений этого потока вверх по течению, а входное сечение скиммера является поверхностью последних столкновений. В реальных условиях эти предположения выполняются не всегда. При резком расширении сверхзвукового потока разреженного газа возникают отклонения от изэнтропичности вследствие замораживания релаксационных процессов, а формирование молекулярного пучка с помощью скиммера вызывает изменение газодинамических параметров [2, 3].

Цель настоящей работы — прямая экспериментальная проверка применимости модели формирования молекулярного пучка из сверхзвукового потока разреженного газа в условиях поступательной неравновесности.

В настоящее время известно несколько работ [4–6], в которых на основании модели [1] проведен теоретический анализ формирования молекулярного пучка в условиях поступательной неравновесности в предположении эллипсоидальности функции распределения скоростей молекул [7]. Следуя [8], выражение для плотности молекулярного пучка в произвольной точке плоскости детектирования в предположении малых телесных углов, внутри которых входное отверстие скиммера видно из сопла и детектора (в большинстве случаев при молекулярно-пучковых измерениях это пред-