

О ПРОДОЛЬНОМ ПОТОКЕ ТЕПЛА В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА

А. М. ВИШАЕВ, В. А. РЫКОВ

(Москва)

В данной статье рассматривается задача о сдвиговом движении газа (течение Куэтта). Две бесконечные параллельные пластины с температурами T_1 и T_2 , расположенные на расстоянии L , движутся каждая в своей плоскости со скоростью u_0 и $-u_0$ соответственно. Предполагается, что между стенками находится одноатомный газ. В такой постановке задача Куэтта рассматривалась ранее многими авторами. Отличие данной работы от предшествующих заключается в том, что в ней исследуется поведение потока тепла, направленного вдоль пластин. Оказалось, что наличие этого потока существенным образом влияет на направление переноса энергии, который устанавливается в течении Куэтта.

Анализ размерностей поставленной выше задачи показывает, что ее решение должно зависеть от трех безразмерных параметров: $B = T_2/T_1$, Kn — числа Кнудсена, S_0 — безразмерной скорости движения пластины. (T_2 — температура горячей пластины.) Наличие теплового потока q_y , направленного вдоль пластин, видно уже из рассмотрения свободномолекулярного режима ($\text{Kn} \rightarrow \infty$). Используя выражение для функции распределения при $\text{Kn} \rightarrow \infty$ (см. [1]), можно найти

$$(1) \quad q_y = \frac{kn_0 U_0 \sqrt{T_1 T_2} (T_2 - T_1)}{(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2})^2} \left[\frac{4mU_0^2}{k(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2})^2} + 5 \right]$$

Ось y направлена в сторону движения горячей пластины, n_0 — средняя плотность газа между пластинами, m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана.

В другом предельном случае, $\text{Kn} \rightarrow 0$, продольный поток тепла будет определяться барнетговскими членами, так как навье-стоксовская часть q_y строго равна нулю из-за отсутствия изменения температуры вдоль оси y . Если воспользоваться выписанными в [1] уравнениями Барнетта, то

$$(2) \quad q_y = -\frac{3}{2} \frac{\mu^2}{\rho P} \frac{dP}{dx} \frac{dU_y}{dx} + \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{\rho} \frac{d^2 U_y}{dx^2} + \frac{3}{2} \frac{\mu}{\rho} \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dx} \frac{dU_y}{dx} + \frac{105}{4} \frac{\mu^2}{\rho T} \frac{dT}{dx} \frac{dU_y}{dx}$$

где ось x направлена перпендикулярно к плоскости пластин, U_y — скорость газа вдоль оси y , $\mu = \mu(T)$ — коэффициент вязкости P , T , ρ — соответственно давление, температура и плотность газа.

Выражение (2) получено в [1] из уравнения Больцмана для максвелловских молекул, но можно показать, что оно справедливо и для используемого ниже S -модельного уравнения с произвольным законом вязкости.

Введем безразмерные величины

$$(3) \quad q_x = q_0 q_x', \quad q_y = q_0 q_y', \quad P = mn_0 \xi_0^2 P', \quad \mu = \mu^*(T_1) \mu'$$

$$U_y = \xi_0 U_y', \quad T = T_1 T', \quad x = Lx', \quad \rho = mn_0 n'$$

$$\xi_0^2 = \frac{2kT_1}{m}, \quad q_0 = \frac{mn_0 \xi_0^3}{2}$$

q_x — тепловой поток вдоль оси x .

Опуская штрихи, равенство (2) можно записать в виде

$$(4) \quad q_y = \frac{75\pi}{256} \frac{(\text{Kn}^2) \mu^2}{n} \left[-\frac{1}{P} \frac{dP}{dx} \frac{dU_y}{dx} + \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{dU_y}{dx} \right) + \frac{35}{4} \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \frac{dU_y}{dx} \right]$$

$$\text{Kn} = \frac{16\mu^*(T)}{5\sqrt{\pi} n_0 m \xi_0^2 L}$$

Известно, что в задаче Куэтта

$$P = \text{const} + O(Kn^2), \quad Kn \mu \frac{dU_y}{dx} = \text{const} + O(Kn^2)$$

Принимая во внимание эти оценки, выражение для продольного потока тепла можно записать в следующем виде

$$(5) \quad q_y = \frac{2625\pi}{2048} \frac{Kn^2 \mu^2}{P} \frac{dU_y}{dx} \frac{dT}{dx}$$

Если учесть, что $U_y = U_y^H + O(Kn)$, $T = T^H + O(Kn)$, где U_y^H и T^H — профили скорости и температуры, полученные при решении задачи Куэтта на основе уравнений Навье — Стокса с граничными условиями, не учитывающими скольжение скорости и скачок температуры, то для получения барнеттовского выражения q_y достаточно в формулу (5) подставить dU_y^H/dx и dT^H/dx .

Для одноатомного газа $\mu = T^\nu$. Тогда решения уравнений Навье — Стокса без скачка и скольжения записываются в виде (см. [4])

$$U_y^H = -S_0 + 2S_0 t; \quad T^H = 1 + \left(B - 1 + \frac{8}{15} S_0^2 \right) t - \frac{8}{15} S_0^2 t^2$$

$$P^H = \int_0^1 T^\nu dt \left[2 \int_0^1 T^{\nu-1} dt \right]^{-1}, \quad t = \int_0^x \frac{dv}{T^\nu(v)} \left[\int_0^1 \frac{dv}{T^\nu(v)} \right]^{-1}$$

Отсюда в барнеттовском приближении

$$(6) \quad q_y = \frac{105}{8} \frac{K^2 2S_0}{P^H} \left[\left(B - 1 + \frac{8}{15} S_0^2 \right) - \frac{16}{15} S_0^2 t \right] + O(K^3)$$

$$K = \frac{Kn}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{16}{5\sqrt{\pi} \int_0^1 T^\nu(t) dt}$$

Из полученных формул видно, что величина $q_y \propto S_0^3$ как при $Kn \rightarrow \infty$, так и при $Kn \rightarrow 0$. Поэтому наиболее существенное влияние продольного потока на перенос тепла будет, если $S_0 > 1$.

Исследование задачи Куэтта в случаях $Kn \approx 1$ проводилось на основе модельного кинетического уравнения, предложенного в [2] (S -модель), но без предположения что $q_y = 0$, как это было сделано в работах [3, 4]. В безразмерных переменных исходное кинетическое уравнение и соответствующие граничные условия запишутся в виде

$$(7) \quad \xi_x \frac{df}{dx} = \frac{16}{5\sqrt{\pi} Kn} \frac{P}{T^\nu} (F^+ - f)$$

$$F^+ = n(\pi T)^{-3/2} \exp \left\{ \frac{-\xi_x^2 + (\xi_y - U_y)^2 + \xi_z^2}{T} \right\} \times \\ \times \left[1 + \frac{2}{15} \frac{1}{nT^2} (q_x \xi_x + q_y (\xi_y - U_y)) \left(2 \frac{\xi_x^2 + (\xi_y - U_y)^2 + \xi_z^2}{T} - 5 \right) \right]$$

$$(8) \quad f(0, \xi_x, \xi_y, \xi_z) = n_1 (\pi)^{-3/2} \exp \left\{ - \frac{(\xi_x^2 + (\xi_y - S_0)^2 + \xi_z^2)}{B} \right\}, \quad \xi_x > 0 \\ f(1, \xi_x, \xi_y, \xi_z) = n_2 (\pi B)^{-3/2} \exp \left\{ - \frac{(\xi_x^2 + (\xi_y - S_0)^2 + \xi_z^2)}{B} \right\}, \quad \xi_x < 0$$

В формулах (7) и (8) приняты обозначения: $f(x; \xi_x; \xi_y; \xi_z)$ — функция распределения молекул, ξ_x, ξ_y, ξ_z — скорости молекул вдоль осей x, y, z соответственно.

Как отмечалось в работе [3], при решении одномерных задач на основе S -модели удобно осреднить функцию распределения по скоростям ξ_y и ξ_z и ввести функции

$$\Phi = \iint_{-\infty}^{\infty} f d\xi_y d\xi_z, \quad \chi = \iint_{-\infty}^{\infty} \xi_y f d\xi_y d\xi_z, \quad h = \iint_{-\infty}^{\infty} (\xi_y^2 + \xi_z^2) f d\xi_y d\xi_z$$

$$\psi = \iint_{-\infty}^{\infty} \xi_y^2 f d\xi_y d\xi_z, \quad g = \iint_{-\infty}^{\infty} \xi_y (\xi_y^2 + \xi_z^2) f d\xi_y d\xi_z$$

Через введенные осредненные функции интересующие нас макропараметры выражаются формулами

$$\begin{aligned} n &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi d\xi_x, & nU_y &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi d\xi_x, & P_{xy} &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi_y \chi d\xi_x \\ P &= 2/3 \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\xi_x^2 \varphi + h) d\xi_x - nU_y^2 \right], & P &= \frac{nT}{2} \\ p_{22} &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi d\xi_x - P - nU_y^2, & q_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi_x (\xi_x^2 \varphi + h) d\xi_x - 2P_{xy} U_y \\ q_y &= \int_{-\infty}^{\infty} g d\xi_x + \int_{-\infty}^{\infty} \xi_x^2 \chi d\xi_x - 2p_{22} U_y - 5P U_y - nU_y^3 \end{aligned}$$

Из формулы (9), видно, что функции ψ и g добавлены к известному из [3] набору осредненных функций для вычисления теплового потока q_y .

Введем векторы

$$\mathbf{a}(x, \xi_x) = \mathbf{a}(\varphi, \chi, h, \psi, g), \quad \mathbf{a}^+ = \{\varphi^+, \chi^+, h^+, \psi^+, g^+\},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b} \left\{ 1, -S_0, (1+S_0^2), \left(\frac{1}{2} + S_0^2 \right), (-2S_0 - S_0^3) \right\}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{c} \left\{ 1, S_0, (B+S_0^2), \left(\frac{B}{2} + S_0^2 \right), (2BS_0 + S_0^3) \right\},$$

$$\varphi^+ = \frac{n}{\sqrt{\pi T}} \exp \left\{ -\frac{\xi_x^2}{T} \right\} \left[1 + \frac{2}{15} \frac{q_x \xi_x}{nT^2} \left(\frac{2\xi_x^2}{T} - 3 \right) \right]$$

$$\chi^+ = U_y \varphi^+ + \frac{1}{15\sqrt{\pi T^{3/2}}} \frac{q_y}{T^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\xi_x^2}{T} \right\} \left(\frac{2\xi_x^2}{T} - 1 \right)$$

$$h^+ = U_y^2 \varphi^+ + n \sqrt{\frac{T}{\pi}} \exp \left\{ -\frac{\xi_x^2}{T} \right\} \left[1 + \frac{2}{15} \frac{(q_x \xi_x + q_y U_y)}{nT^2} \left(\frac{2\xi_x^2}{T} - 1 \right) \right]$$

$$\psi^+ = \frac{h^+ - U_y^2 \varphi^+}{2} + U_y \chi^+$$

$$g^+ = 2h^+ - U_y^2 \chi^+ + \frac{2q_y}{15\sqrt{\pi T}} \exp \left\{ -\frac{\xi_x^2}{T} \right\} \left(\frac{2\xi_x^2}{T} + 1 \right)$$

После соответствующего интегрирования по скоростям уравнений (7) и граничных условий (8) для представленных выше функций получится система уравнений с граничными условиями, которые можно записать в виде

$$(10) \quad \xi_x \frac{da}{dt} = \frac{16}{5\sqrt{\pi} \text{Kn}} \frac{P}{T^v} (\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}),$$

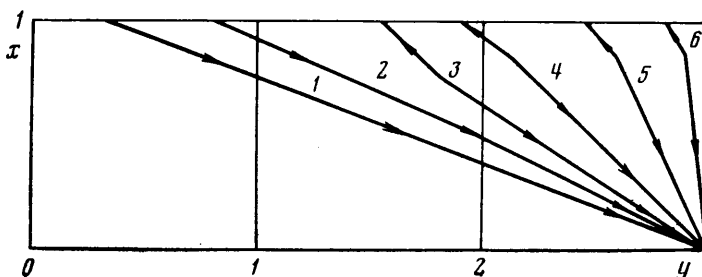
$$\mathbf{a}(0, \xi_x) = \frac{n_1}{\sqrt{\pi}} \exp \{-\xi_x^2\} \mathbf{b}, \quad \xi_x > 0$$

$$(11) \quad a(1, \xi_x) = \frac{n_2}{\sqrt{\pi}B} \exp \left\{ -\frac{\xi_x^2}{B} \right\} c, \quad \xi_x < 0$$

$$n_1 = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^0 \xi_x \varphi(0, \xi_x) d\xi_x, \quad n_2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{B} \int_0^{\infty} \xi_x \varphi(1, \xi_x) d\xi_x$$

Специальным численным методом [4] система (10)–(11) была решена практически во всем диапазоне изменения чисел Кн (0.01–20). Результаты расчетов, которые представлены ниже, получены в случае, когда $B=4$, $S_0=2$ и $\nu=0.5$.

Для наглядного представления картины переноса тепла в задаче Куэтта можно по аналогии с линией тока ввести понятие линии тока тепловой энергии как линии,



Фиг. 1

касательная к которой совпадает в каждой точке с вектором теплового потока. Легко видеть, что любая интегральная кривая уравнения $dx/q_x = dy/q_y$ будет линией тока тепловой энергии. Так как q_x и q_y не зависят от y , то интегральные кривые написанного выше уравнения отличаются друг от друга только сдвигом по оси y .

На фиг. 1 изображены линии тока тепла. Цифры 1–6 относятся к кривым, полученным соответственно при числах Кнудсена 17, 3.5, 0.46, 0.26, 0.1, 0.01. На фиг. 2, где представлена зависимость величины $\bar{W} = |q|/|q^*|$ от x , эти же цифры обозначают кривые, относящиеся к числам Кнудсена 17, 3.5, 0.9, 0.46, 0.28, 0.1 соответственно (q^* – свободномолекулярное значение вектора теплового потока).

Из представленных графиков видно, что в случае $Kn < 0.6$ внутри течения имеется плоскость, на которой $q=0$. Оказалось, что в пределах точности вычислений q_x и q_y обращаются в ноль в точке, где температура имеет максимум. В этом случае данная точка является особой для уравнения, определяющего линии тока тепла. При увеличении числа Кнудсена плоскость, где q обращается в ноль, смещается к горячей пластине и в случае $Kn \approx 0.6$ совпадает с ней. В режимах $Kn > 0.6$ температура монотонно возрастает от холодной пластины к горячей и вектор q меняется непрерывно как по величине, так и по направлению.

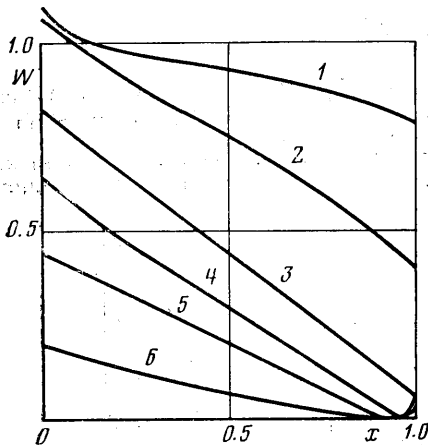
Следует отметить, что для $Kn > 17$ картина линий тока тепловой энергии практически будет независима от числа Кнудсена, так как отношение q_y/q_x в этих режимах очень слабо отличается от свободномолекулярного.

Из представленных выше графиков видно, что только при очень малых числах Кнудсена, меньше 0.01, q_y оказывает слабое влияние на направление потока тепла, однако уже в режимах, где $Kn \approx 0.1$, тепловые потоки в продольном и поперечном направлениях становятся одного порядка. При дальнейшем увеличении числа Кнудсена проекция теплового потока на ось y становится в несколько раз больше соответствующей проекции на ось x . Наличие теплового потока при отсутствии изменения температуры в этом направлении указывает на то, что в данном случае уравнения Навье–Стокса даже при сравнительно малых числах Кнудсена дают неправильную не только количественную, но и качественную картину рассматриваемого явления.

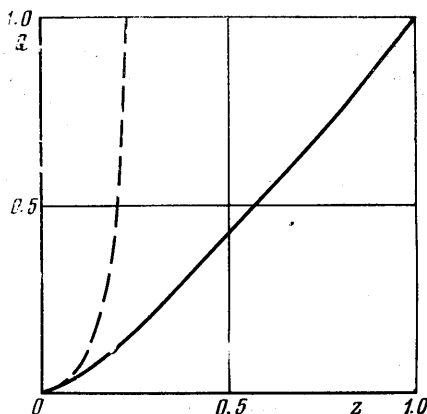
В работе [3] задача Куэтта решалась на основе S -модели, но в предположении, что $q_y=0$. Оказалось, что величины таких макропараметров, как плотности, скорости, температуры теплового потока вдоль оси x , отличаются от соответствующих значений макропараметров, полученных в [3], не более чем на 3%. Величина F^+ в формуле (7) является суммой двух первых членов ряда, который представляет интеграл обратных столкновений [2]. Введение q_y в F^+ эквивалентно добавлению еще одного члена в представление интеграла обратных столкновений. При этом оказывается, что на значения основных макропараметров увеличение членов ряда влияет слабо.

Отсюда можно сделать заключение, что то представление интеграла столкновений, какое дается S -моделью, является достаточно корректным.

Так как при $Kn \ll 1$ компонента вектора теплового потока вдоль оси y определяется уравнениями Барнетта, то в данном случае имеется довольно редкая возможность оценить область применимости этих уравнений. Из формулы (5) следует, что при $Kn \rightarrow 0$ $q_y/q_x = 7/2 K P_{xy}^H / P^H$, где K — определено в формуле (6), P_{xy}^H — навье-сток-



Фиг. 2



Фиг. 3

совское значение соответствующей компоненты тензора напряжений. Так как $P_{xy}^H / P^H = \text{const}$, то, согласно уравнениям Барнетта, $q_y/q_x = c(Kn)$. Результаты вычислений показали, что начиная с $Kn = 0.01$, отношение q_y/q_x вне кнудsenовских слоев практически совпадает с барнеттовским значением этого отношения.

Введем в рассмотрение величину

$$Q = \int_0^1 q_y dx / q_y^*$$

Эта величина пропорциональна полному потоку тепла в продольном направлении. На фиг. 3 показана зависимость Q от переменной $z = Kn / (1 + Kn)$ (барнеттовское значение нанесено штриховой линией).

Из представленных результатов видно, что для чисел Кнудсена меньше 0.05 барнеттовское значение полного потока тепла в продольном направлении совпадает с этим значением, полученным из решений кинетических уравнений.

В работе [5] утверждается, что уравнения Барнетта, которые получаются как высшие приближения метода Чепмена — Энскога, в отличие от уравнений Навье — Стокса не описывают реальных движений газа. Пример течения Куэтта показывает, что это не так. Барнеттовский член в выражении для продольного потока тепла оказывается главным и полностью определяет перенос тепла в этом направлении, что находится в соответствии с асимптотикой кинетического уравнения. Другие примеры движений, где барнеттовские члены становятся сравнимы с навье-стоксовскими, рассмотрены в [6].

В заключение авторы выражают благодарность О. С. Рыжову и А. Т. Онуфриеву за обсуждения, которые привели к написанию данной статьи.

Поступила 9 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
2. Шахов Е. М. Метод аппроксимации кинетического уравнения Больцмана. В сб. Числ. методы в теории разреженных газов. М., ВЦ АН СССР, 1969.
3. Шахов Е. М. Задача Куэтта для обобщенного уравнения Крука. Эффект максимума напряжения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
4. Бишаев А. М., Рыков В. А. Решение стационарных задач кинетической теории газов при умеренных и малых числах Кнудсена методом итераций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 1.
5. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М., «Мир», 1978.
6. Коган М. Н., Галкин В. С., Фридлиндер О. Г. О напряжениях, возникающих в газах вследствие неоднородности температуры и концентраций. Новые типы свободной конвекции. Усп. физ. наук, 1976, т. 119, вып. 1.