УДК 533.6.011.8

СИЛЫ И МОМЕНТЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ТЕЛА, ВРАЩАЮЩИЕСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ СИММЕТРИИ В СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОМ ПОТОКЕ

С. Г. ИВАНОВ, А. М. ЯНШИН

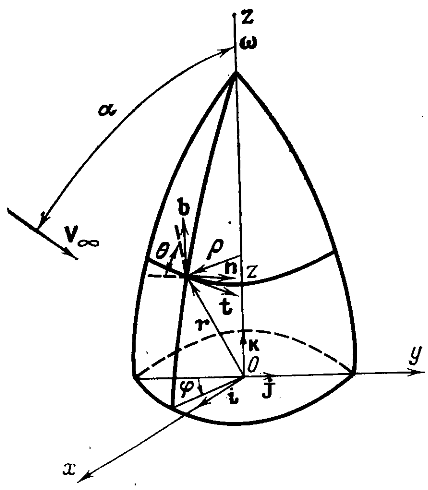
(Днепропетровск)

Аналитически определяются силы и моменты, действующие на симметрично вращающиеся выпуклые тела вращения, движущиеся в свободномолекулярном потоке разреженного газа при следующих допущениях. Функция распределения по скоростям молекул набегающего потока – максвелловская. Схема взаимодействия падающих молекул с поверхностью тела – диффузно-зеркальная. Для тел с произвольной кусочно-гладкой образующей найдены в квадратурах общие выражения составляющих аэродинамических сил и моментов. Для диска, сферы, цилиндрической и конической поверхностей интегрирование сил и моментов, зависящих от вращения тела, проведено до конца. Для моментов сил представлены графики погрешностей гипертеплового приближения в зависимости от скоростного отношения.

Влияние вращения тела на его аэродинамические характеристики рассматривалось в работах [1–4]. В [1, 2] получены общие выражения сил и моментов для произвольно вращающихся выпуклых осесимметричных тел соответственно в случаях гипертеплового и шрелловского приближений.

В [3, 4] исследования проведены при произвольных значениях скоростного отношения соответственно для симметрично вращающихся выпуклых тел и для сферы с осью вращения, перпендикулярной набегающему потоку.

Рассмотрим выпуклое тело вращения, закрученное относительно оси симметрии с угловой скоростью ω. Однородный свободномолекулярный поток обтекает тело со среднемассовой скоростью V_∞ под углом α к оси вращения.



Фиг. 1

Введем следующие системы координат (см. фиг. 1).

Неподвижную xyz с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, осью z, направленной по оси вращения тела, и осью y, направленной таким образом, чтобы вектор $\mathbf{V}_\infty$ лежал в плоскости zy. На поверхности тела в точке с координатами ρ, z, φ построим связанную с центром площадки ds локальную систему координат с ортами $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{t}$, заданными следующим образом: $\mathbf{n}$ – внутренняя нормаль к поверхности тела, $\mathbf{t}$ направлен по вектору $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$, $\mathbf{b}=[\mathbf{t}\mathbf{n}]$. Тогда

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{k},\qquad \alpha=\arccos\left(\frac{-\mathbf{V}_\infty}{V_\infty}\mathbf{k}\right),\qquad \mathbf{V}_\infty=V_\infty(\sin\alpha\mathbf{j}-\cos\alpha\mathbf{k})$$

$$\mathbf{n}=-\sin\theta\sin\varphi\mathbf{i}+\sin\theta\cos\varphi\mathbf{j}-\cos\theta\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b}=-\cos\theta\sin\varphi\mathbf{i}+\cos\theta\cos\varphi\mathbf{j}+\sin\theta\mathbf{k}$$

$$\mathbf{t}=\cos\varphi\mathbf{i}+\sin\varphi\mathbf{j},\qquad \theta=\arccos(-\mathbf{n}\mathbf{k})$$

Скорость встречи элементарной площадки ds с набегающим потоком равна $\mathbf{V}=\mathbf{V}_\infty-[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$.

Тогда максвелловская функция распределения молекул по скоростям имеет вид

$$f=n_\infty(2\pi RT_\infty)^{-3/2}\exp\{-1/2RT_\infty[(c_n-\mathbf{V}\mathbf{n})^2+(c_b-\mathbf{V}\mathbf{b})^2+(c_t-\mathbf{V}\mathbf{t})^2]\}$$

где n_∞, T_∞ – концентрация и температура падающего потока, c_n, c_b, c_t – проекции молекулярных скоростей на оси локальной системы координат.

Давление P_{ni} и касательные напряжения P_{bi}, P_{ti}, создаваемые падающими молекулами, равны

$$P_{ni}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dc_t\int\limits_{-\infty}^{\infty}dc_b\int\limits_{0}^{\infty}mfcn^2\,dc_n=A\xi(sn)$$

$$P_{bi}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dc_t\int\limits_{-\infty}^{\infty}dc_b\int\limits_{0}^{\infty}mfc_nc_b\,dc_n=A(sb)\chi(sn)$$

(1)

$$P_{ti}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dc_t\int\limits_{-\infty}^{\infty}dc_b\int\limits_{0}^{\infty}mfc_nc_t\,dc_n=A(st)\chi(sn)$$

$$\mathbf{sn}=\mathbf{s}_\infty\mathbf{n}=s_\infty(\sin\alpha\sin\theta\cos\varphi+\cos\alpha\cos\theta)=a\cos\varphi+c$$

$$\mathbf{st}=\mathbf{s}_\infty\mathbf{t}-[\mathbf{\Omega r}]\mathbf{t}=s_\infty\sin\alpha\sin\varphi-\Omega\rho$$

$$\mathbf{sb}=\mathbf{s}_\infty\mathbf{b}=s_\infty(\sin\alpha\cos\theta\cos\varphi-\cos\alpha\sin\theta)$$

$$\chi(x)=e^{-x^2}+x\sqrt{\pi}[1+\mathrm{erf}(x)],\quad \xi(x)=\chi(x)x+{}^1/_2\sqrt{\pi}[1+\mathrm{erf}(x)]$$

$$A=\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2\sqrt{\pi}\,s_\infty^2},\quad \mathbf{s}_\infty=\frac{\mathbf{V}_\infty}{\sqrt{2RT_\infty}},\quad \mathbf{s}=\frac{\mathbf{V}}{\sqrt{2RT_\infty}},\quad \Omega=\frac{\omega}{\sqrt{2RT_\infty}}$$

Здесь m, ρ – масса и плотность набегающих молекул.

Учитывая вклад отраженных молекул, в рамках зеркально-диффузной схемы имеем

$$P_n=(2-\sigma_n)P_{ni}+\sigma_nP_w,\qquad P_t=\sigma_tP_{ti}$$

$$P_b=\sigma_\tau P_{bi},\qquad P_w=\frac{A\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_w}{T_\infty}}\chi(sn)$$

Здесь σ_n, σ_τ – коэффициенты аккомодации нормального и касательного импульсов, а индексы i, r, w относятся соответственно к параметрам падающего и отраженного потоков и к параметрам на поверхности тела.

Таким образом, вследствие симметричного вращения тела изменяется только касательное напряжение P_t на величину

$$P_t(\omega)=A\sigma_\tau\chi(\mathbf{sn})\{-[\mathbf{\Omega r}]\mathbf{t}\}$$

Выражения для силы и момента, действующих на элементарную площадку ds, имеют вид

(2)

$$d\mathbf{F}=\mathbf{P}ds=(P_n\mathbf{n}+P_t\mathbf{t}+P_b\mathbf{b})ds,\qquad d\mathbf{M}=[\mathbf{r}d\mathbf{F}]=[\mathbf{rP}ds]$$

$$\mathbf{r}=\rho\sin\varphi\mathbf{i}-\rho\cos\varphi\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

Используя (1), представим (2) в проекциях на неподвижные оси координат и проинтегрируем по всей поверхности тела. Получим

$$F_x=A\int\limits_Z\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}[-E\sin\theta\sin\varphi+K(N\cos\varphi-s_\infty H\cos\theta\sin\varphi)]ds$$

$$F_y=A\int\limits_Z\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}[E\sin\theta\cos\varphi+K(N\sin\varphi+s_\infty H\cos\theta\cos\varphi)]ds$$

$$F_z=A\int\limits_Z\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}(-E\cos\theta+Ks_\infty H\sin\theta)ds$$

(3)

$$M_x=A\int\limits_Z\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}[E\rho_1\cos\varphi-K(Nz\sin\varphi+s_\infty H\rho_2\cos\varphi)]ds$$

$$M_y = A \int\limits_Z \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} [E\rho_1 \sin\varphi + K(Nz\cos\varphi - s_\infty H\rho_2 \sin\varphi)]\, ds$$

$$M_z = A \int\limits_Z \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} KN\rho\, ds$$

$$E = \left[(2-\sigma_n)\,\xi\,(a\cos\varphi + c) + \sigma_n \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{T_w}{T_\infty}}\, \chi\,(a\cos\varphi + c) \right]$$

$$K = \sigma_\tau \chi\,(a\cos\varphi + c), \qquad N = s_\infty \sin\alpha \sin\varphi - \Omega\rho$$

$$H = \sin\alpha\cos\theta\cos\varphi - \cos\alpha\sin\theta, \qquad ds = \frac{\rho}{\sin\theta}\, d\varphi\, dz$$

$$\rho_1 = \rho\cos\theta - z\sin\theta, \qquad \rho_2 = \rho\sin\theta + z\cos\theta$$

Используя четность функций $\chi(a\cos\varphi+c)$ и $\xi(a\cos\varphi+c)$, нетрудно доказать следующие соотношения

$$\int\limits_0^{2\pi} \chi\,(a\cos\varphi + c)\sin\varphi\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \xi\,(a\cos\varphi + c)\sin\varphi\, d\varphi = 0$$

(4)

$$\int\limits_0^{2\pi} \chi\,(a\cos\varphi + c)\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = 0$$

Определению сил и моментов невращающихся симметричных тел посвящена работа [5]. Поэтому, используя (4), выпишем только составляющие компонент сил и моментов, зависящие от угловой скорости вращения тела. Получим

$$F_x(\omega) = -A \int\limits_Z \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_\tau \chi\,(a\cos\varphi + c)\, \frac{\Omega\rho^2}{\sin\theta} \cos\varphi\, d\varphi\, dz$$

$$F_y(\omega) = F_z(\omega) = M_x(\omega) = 0$$

$$M_y(\omega) = -A \int\limits_Z \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_\tau \chi\,(a\cos\varphi + c)\, \frac{\Omega\rho^2 z}{\sin\theta} \cos\varphi\, d\varphi\, dz$$

$$M_z(\omega) = -A \int\limits_Z \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_\tau \chi\,(a\cos\varphi + c)\, \frac{\Omega\rho^3}{\sin\theta}\, d\varphi\, dz$$

Следовательно, симметричное вращение тела не влияет на лобовое сопротивление, подъемную силу и восстанавливающий момент.

В работе [3] для аналогичных условий показано, что симметричное вращение тела приводит к появлению добавочных сил и моментов $F_y(\omega)$, $F_z(\omega)$ и $M_x(\omega)$, зависящих от вращения тела и пропорциональных $|[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]|/V_\infty$. Использование же соотношений (4) показывает, что $F_y(\omega)$, $F_z(\omega)$ и $M_x(\omega)$ тождественно равны нулю.

В работе [4] для частного случая $(\boldsymbol{\omega}\perp\mathbf{V}_\infty)$ свободномолекулярного обтекания вращающейся сферы показано, что сила $F_x(\omega)$ направлена по $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{V}_\infty]$. Там же указано, что если бы сфера обтекалась континуальным потоком, то $F_x(\omega)$ была бы направлена в противоположную сторону (эффект Магнуса). В связи с этим докажем знакоопределенность $F_x(\omega)$ для произвольного выпуклого тела вращения и произвольного α.

Имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} \chi\,(a\cos\varphi + c)\cos\varphi\, d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi} \chi\,(a\cos\varphi + c)\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \chi(a\cos\varphi+c)\cos\varphi\, d\varphi - 2\int_0^{\pi/2} \chi(-a\cos\varphi+c)\cos\varphi\, d\varphi$$

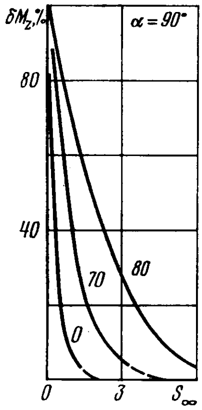
Так как $s_\infty>0$ и $\alpha, \theta\in[0, \pi]$, то $a=s_\infty \sin\alpha\sin\theta\geqslant 0$ $\chi(x)$ является положительной монотонно возрастающей функцией x, следовательно

$$B(z)=\int_0^{2\pi} \chi(a\cos\varphi+c)\cos\varphi\, d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} [\chi(a\cos\varphi+c)-\chi(-a\cos\varphi+c)]\cos\varphi\, d\varphi\geqslant 0$$

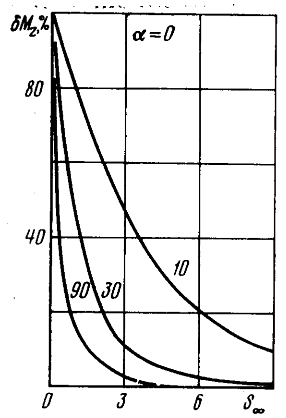
Отсюда для любых z имеем

$$\int_z B(z)\rho^2(z)\frac{dz}{\sin\theta}\geqslant 0$$

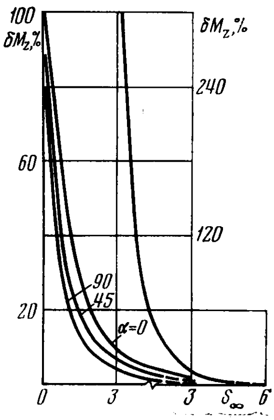
Таким образом, $F_x(\omega)$ действует в направлении $[\omega V_\infty]$, т. е. свободномолекулярный эффект Магнуса противоположен по знаку обычному эффекту в континуальной области.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Ниже выражения (3) проинтегрированы для ряда простейших геометрических тел: диска, сферы, цилиндрической и конической поверхностей. Для диска, цилиндра и сферы моменты сил рассмотрены относительно их геометрического центра, для конуса – относительно середины основания. Для конуса интегралы (3) аналитически берутся только в предельных случаях продольного и поперечного обтекания.

Для диска

$$F_x(\omega)=M_y(\omega)=0,\quad M_z(\omega)=-\frac{\pi}{2}DR^4[\chi(s_\infty\cos\alpha)+\chi(-s_\infty\cos\alpha)]$$

$$M_z{}^{\Gamma}(\omega)=-\pi^{3/2}DR^4 s_\infty\cos\alpha,\qquad M_z{}^{\circ}(\omega)=-\pi DR^4$$

Для цилиндра

$$F_x(\omega)=-\pi^{3/2}DLR^2 s_\infty \sin\alpha$$

$$M_z(\omega)=-2\pi DLR^3\exp(-s_1)[(1+2s_1)I_0(s_1)+2s_1I_1(s_1)]$$

$$M_z{}^{\Gamma}(\omega)=-4\sqrt{\pi}DLR^3 s_\infty\sin\alpha,\qquad M_z{}^{\circ}(\omega)=-2\pi DLR^3$$

Для конуса

$$\alpha=0:\quad F_x(\omega)=M_y(\omega)=0,\quad M_z(\omega)=-\frac{\pi}{2}DLR^3\frac{\chi(s_\infty\sin\beta)}{\cos\beta}$$

$$M_z{}^{\Gamma}(\omega)=-\pi^{3/2}DLR^3 s_\infty \operatorname{tg}\beta,\qquad M_z{}^{\circ}(\omega)=-\frac{\pi}{2}DLR^3$$

$$\alpha=\pi/2: \quad F_x(\omega)=-\frac{\pi^{3/2}}{3}DLR^2s_\infty, \qquad M_y(\omega)=-\frac{\pi^{3/2}}{12}DL^2R^2s_\infty$$

$$M_z(\omega)=-\frac{\pi}{2}DLR^3\frac{1}{\cos\beta}\exp(-s_2)\left[(1+2s_2)I_0(s_2)+2s_2I_1(s_2)\right]$$

$$M_z{}^{\Gamma}(\omega)=-\sqrt{\pi}\,DLR^3s_\infty, \qquad M_z{}^{\circ}(\omega)=-\frac{\pi}{2}DLR^3$$

Для сферы

$$F_x(\omega)=-{}^4/_3\pi^{3/2}DR^3s_\infty\sin\alpha, \qquad M_y(\omega)=2\pi DR^4\cos\alpha\sin\alpha C$$

$$M_z(\omega)=-2\pi DR^4(B+C\cos^2\alpha), \qquad M_y{}^{\Gamma}(\omega)=-\frac{\pi^{3/2}}{2}DR^4\cos\alpha\sin\alpha s_\infty$$

$$M_y{}^{\circ}(\omega)=0, \qquad M_z{}^{\Gamma}(\omega)=-\frac{\pi^{3/2}}{2}DR^4(3-\cos^2\alpha)s_\infty, \qquad M_z{}^{\circ}(\omega)=-\frac{8}{3}\pi DR^4$$

$$B={}^1/_2s_\infty{}^{-3}[{}^1/_2\exp(-s_\infty{}^2)s_\infty(3s_\infty{}^2-{}^1/_2)+{}^1/_2\sqrt{\pi}(3s_\infty{}^4+s_\infty{}^2+{}^1/_4)\operatorname{erf}s_\infty]$$

$$C={}^1/_2s_\infty{}^{-3}[{}^1/_2\exp(-s_\infty{}^2)s_\infty(-s_\infty{}^2+{}^3/_2)+{}^1/_2\sqrt{\pi}(-s_\infty{}^4+s_\infty{}^2-{}^3/_4)\operatorname{erf}s_\infty]$$

$$D=A\sigma_\tau\Omega, \qquad s_1=s_\infty{}^2\frac{\sin^2\alpha}{2}, \qquad s_2=s_\infty{}^2\frac{\cos^2\beta}{2}$$

Здесь R – радиус диска, сферы, цилиндра и основания конуса; L – высота цилиндра и конуса; β – угол полураствора конуса; I_0, I_1 – модифицированные функции Бесселя; $M^{\Gamma}(\omega)$ – гипертепловые значения моментов; $M^{\circ}(\omega)$ – значения моментов при $s_\infty=0$. При $\alpha=\pi/2$ $F_x(\omega)$ для сферы совпадает с выражением работы [4].

На фиг. 2–4 представлены графики относительной погрешности гипертеплового приближения для моментов сил при чисто диффузной схеме отражения ($\sigma_\tau=1$): $\delta M(\omega)=[M(\omega)-M^{\Gamma}(\omega)]/M(\omega)$ 100% в зависимости от скоростного отношения s_∞ для различных углов атаки.

На фиг. 2 δM_z для диска; на фиг. 3 δM_z для цилиндра; на фиг. 4 δM_z и δM_y для сферы.

Из графиков видно, что для натурных условий, когда $s_\infty\approx6$, гипертепловое приближение имеет погрешность: для диска – 4% при $\alpha=80°$; для цилиндра $\delta M_z=20\%$ при $\alpha=10°$ и $\delta M_z=3.5\%$ при $\alpha=30°$. Для сферы зависимость δM_z от α слабая, и при $s_\infty=6$ $\delta M_z=2.7\%$ при любых α. δM_y для сферы от α не зависит. При $s_\infty=6$ $\delta M_y=2\%$; при $s_\infty\to0$, $\delta M_y\to\infty$.

В заключение еще раз отметим, что в рамках принятых допущений симметричное вращение тела не влияет на силу сопротивления, подъемную силу и восстанавливающий момент, а приводит только к появлению боковой силы, демпфирующего и прецессирующего моментов. При этом боковая сила $F_x(\omega)$ направлена по вектору $[\omega\mathbf{V}_\infty]$, т. е. противоположна по направлению силе Магнуса, которая действовала бы на тело при его вращении в континуальном потоке.

Поступила 27 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В. В.* Эволюция вращения динамически симметричного спутника. Космич. исследования, 1963, т. 1, № 3.
2. *Галкин В. С.* Определение моментов и сил, действующих на вращающиеся тела в свободномолекулярном потоке и в потоке света. Инж. ж., 1965, т. 5, № 5.
3. *Яскевич Э. П., Филатов Е. И.* Дополнительные аэродинамические силы и моменты, действующие на тело вращения, закрученное относительно оси симметрии в свободномолекулярном потоке. В сб.: Гидроаэромех. и теория упругости. Респ. межвед. науч-техн. сб., вып. 6. Харьков, Изд-во Харьковск. ун-та, 1967.
4. *Wang Ch. T.* Free molecular flow over a rotating sphere. AIAA Journal, 1972, vol. 10, No. 5.
5. *Баранцев Р. Г., Цзжень-юй У.* Силы и моменты, действующие на тело вращения в свободномолекулярном потоке. Вестн. Ленинградск. ун-та, Сер. матем., мех., астрон., вып. 3, 1961, № 13.