

где  $K_0$ ,  $K_1$  — стандартные обозначения функций Бесселя. Асимптотическое представление решения при  $t \rightarrow \infty$  имеет вид

$$p(t, \rho) \approx - \frac{Q\eta_1}{4\pi kh} \left[ \ln \frac{1.26\kappa T}{\rho^2} \right] + \int_0^t \frac{1 - \exp(-\tau/T)}{T} d\tau$$

Таким образом, при любом значении времени релаксации асимптотическое поведение решения отличается от случая фильтрации в равновесных условиях.

Поступила 15 XII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И., Степанова Г. С. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М., «Недра», 1968.
2. Розенберг М. Д., Кундин С. А. Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа. М., «Недра», 1976.
3. Ахмедов К. А. О применении идентификационных моделей при расчете фазовых превращений. Изв. вузов, Нефть и газ, 1978, № 6.
4. Аметов И. М., Ахмедов К. А., Басович И. Б. О расчете фонтанного подъема с учетом неравновесности фазовых переходов. Сб. тр. ВНИИ, 1978, вып. 66, Интенсификация добычи нефти.
5. Гроот С. Р. де, Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967.
7. Миллионщиков М. Д. Движение газированной нефти в пористой среде. Инж. сб., 1949, т. 5, вып. 2.
8. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
9. Аметов И. М. Метод построения оценок решения уравнений фильтрации газированной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3.
10. Аметов И. М. О влиянии погрешности измерений на точность определения параметров пласта по кривой восстановления давления. Изв. вузов, Нефть и газ, 1975, № 5.
11. Николаевский В. Н. и др. Механика насыщения пористых сред. М., «Недра», 1970.

УДК 533.6.014

#### ПРАВИЛО ПЛОЩАДЕЙ ДЛЯ СЛЕДА ЗА ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ТЕЛОМ

Н. Н. ПИЛЮГИН, С. Г. ТИХОМИРОВ, С. Ю. ЧЕРНЯВСКИЙ

(Москва)

В пространственных течениях локальные характеристики среды в следе за телом, летящим с гиперзвуковой скоростью при числах Рейнольдса  $Re \geq 5 \cdot 10^4$ , зависят сложным образом от координат. Однако в ряде случаев важно знать лишь параметры среды, осредненные по поперечному сечению следа. Например, при диагностике плазмы следа за телом с помощью СВЧ-резонаторов изменяют среднюю по сечению концентрацию электронов [1]. Также в осредненном виде получают величину хемилюминесцентного излучения следа [2]. В связи с этим представляет интерес получение средних характеристик среды без детального изучения локальных параметров.

В данной работе установлено правило, позволяющее использовать результаты, полученные для дальнего вязкого следа за осесимметричным телом, в случае следа за трехмерным телом, близким к осесимметричному, при аналогичных условиях обтекания. Трехмерный след рассматривается до расстояний, на которых он не вырождается в осесимметричный.

Под следом понимается область за трехмерным телом, близким к осесимметричному, образованная газом, прошедшим через пограничный слой на теле. Поперечный размер дальнего вязкого следа для любого газодинамического параметра определяется условием изменения этого параметра в  $e$  раз по сравнению с его значением на оси. Для скорости газа такое определение размера следа введено в [3], для остальных параметров — в [4].

Рассмотрим величину

$$\Phi = \int_{\Sigma} f d\sigma$$

где  $\Sigma$  — площадь поперечного сечения следа за трехмерным телом, близким к осесимметричному;  $f(r, x, \varphi)$  — любая ограниченная физическая величина в следе, например, поток массы, концентрация химических компонентов или электронов, плотность излучения, размер и т. д.;  $r, x, \varphi$  — цилиндрические координаты. В дальнейшем ограничимся телами, полное сопротивление которых близко к волновому. Значительное число примеров таких тел дано в [5], причем в большинстве практически важных случаев отличие полного сопротивления от волнового не более 10%.

Согласно «правилу площадей» для волнового сопротивления тел [6], различие в их коэффициентах сопротивления является величиной более высокого порядка малости  $\varepsilon^2$ , чем отличие поперечных размеров  $\varepsilon$  при одинаковой длине тел и осевом распределении площади их поперечного сечения. Средняя по углу  $\varphi$  ширина следа за указанными выше телами определяется коэффициентом сопротивления и практически не зависит от  $\text{Re}$  при  $\text{Re} \approx (0.1-4) \cdot 10^6$  [7, 8]. Для конуса, летящего под углом атаки, это подтверждено в [8]. Тогда получим соотношения

$$(1) \quad \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r_i^2 d\varphi - \pi r_0^2 \sim \varepsilon^2 \pi r_0^2, \quad r_i = r_0(x) + \varepsilon r_1(x, \varphi), \quad \varepsilon \ll 1$$

где  $r_i, r_0$  — радиусы поперечных сечений трехмерного и осесимметричного следов. Из соотношений (1) следует оценка

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} r_1(x, \varphi) d\varphi \sim \varepsilon$$

Запишем выражение для функции  $\Phi$  в цилиндрических координатах

$$(3) \quad \Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_i} f(r, x, \varphi) r dr d\varphi$$

Введем функцию  $\Phi_0$  для следа за осесимметричным телом. Произведем оценку разности  $\Phi - \Phi_0$

$$(4) \quad \begin{aligned} \Phi - \Phi_0 &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{r_i} f r dr - \int_0^{r_0} f_0 r dr \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{r_0} (f - f_0) r dr + \int_{r_0}^{r_i} f r dr \right] d\varphi \end{aligned}$$

Так как возмущение контура осесимметричного следа равно  $\varepsilon r_1$ , естественно представить функцию  $f$  в виде

$$(5) \quad f(r, x, \varphi) = f_0(r, x) + \varepsilon r_1 f_1(r, x, \varphi) + \dots$$

где функция  $f_1(r, x, \varphi)$  учитывает отличие от осесимметричного случая. Подставляя (5) в (4), изменяя порядок интегрирования и ограничиваясь линейными членами

по  $\varepsilon$ , получим

$$(6) \quad \Phi - \Phi_0 = \varepsilon \int_0^{r_0} r dr \int_0^{2\pi} r_1 f_1 d\varphi + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_0}^{r_1} fr dr$$

Для оценки интегралов используем обобщенную теорему о среднем

$$(7) \quad \Phi - \Phi_0 \sim \varepsilon \int_0^{r_0} \langle f_1 \rangle r dr \int_0^{2\pi} r_1 d\varphi + \varepsilon r_0 \langle f \rangle \int_0^{2\pi} r_1 d\varphi$$

где  $\langle f_1 \rangle$ ,  $\langle f \rangle$  — средние значения функций  $f_1$  и  $f$  в интервалах  $[0, 2\pi]$  и  $[0, 2\pi; r_0, r_0 + \varepsilon r_1]$  соответственно. С помощью соотношения (2) получим окончательную оценку разности  $\Phi - \Phi_0 = O(\varepsilon^2)$ .

Полученный результат дает возможность сформулировать следующее правило площадей для следа: отличие в осредненных по поперечному сечению дальнего следа параметрах среды за осесимметричным и близким к нему трехмерным телами, имеющими одинаковую длину и осевое распределение площадей поперечного сечения, при аналогичных условиях обтекания имеет более высокий порядок малости, чем отличие их поперечных размеров. Данное правило площадей позволяет определять осредненные по площади сечения параметры следа за трехмерным телом по аналогичным величинам за эквивалентным осесимметричным телом, для которого имеются асимптотические осевые и радиальные распределения [4]. Оно является обобщением известных правил площадей для волнового сопротивления [6, 9] и теплового потока к лобовой поверхности тел [10, 11] на широкий круг физических параметров в следе за телом. Хотя справедливость правила площадей доказана для малых отличий трехмерного следа от осесимметричного, по-видимому, его применимость значительно шире, о чем говорит опыт применения подобного правила для коэффициентов сопротивления [9] и теплообмена [11]. Отметим, что правило площадей справедливо для осредненных характеристик неосесимметричных струйных течений, если в приведенном доказательстве заменить соответственно тела отверстиями.

Авторы признательны Г. Ю. Степанову и Э. З. Апштейну за полезные советы при обсуждении результатов работы.

Поступила 25 VII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баулин Н. Н., Дмитриев А. К., Иванчинов-Маринский Н. Н., Лопатин В. Е., Пилюгин Н. Н., Черняевский С. Ю. Исследование течения за сферой при гиперзвуковой скорости полета в воздухе открытым СВЧ-резонатором. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 4.
2. Reis V. H. Chemiluminescent radiation from the far wake of hypersonic spheres. AIAA Journal, 1967, vol. 5, № 11.
3. Lahaye C. Velocity distribution of sphere wakes. Canad. J. Phys., 1974, vol. 52, № 12.
4. Пилюгин Н. Н., Тихомиров С. Г., Черняевский С. Ю. Исследование распределения параметров газа и интенсивности его излучения в дальнем следе за телом. 6-я Всес. конференция по динамике разрежен. газов. Тезисы докл. Новосибирск, 1979.
5. Теория оптимальных аэродинамических форм. Под ред. А. Миеле. М., «Мир», 1969.
6. Коган М. Н. О сопротивлений тел, близких к телам вращения. Инж. ж., 1961, № 3.
7. Черняевский С. Ю. Исследование размеров следа за конусом, летящим с гиперзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 6.
8. Чжен П. Отрывные течения. т. 2. М., «Мир», 1973.
9. Дворецкий В. М., Иванов М. Я., Коняев Б. А., Крайко А. Н. О правиле «эквивалентности» для течений идеального газа. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
10. Апштейн Э. З., Пилюгин Н. Н., Тирский Г. А., Унос массы и изменение формы трехмерного тела при движении  $\xi_0$  траектории в атмосфере Земли. Космические исследования, 1979, т. 17, вып. 2.
11. Апштейн Э. З., Пилюгин Н. Н. Правило площадей для коэффициента теплообмена пространственных аблирующих тел при тепловых потоках, локально зависящих от угла наклона поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 2.