

УСТОЙЧИВОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ОТСОСОМ К ВОЗМУЩЕНИЯМ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

А. М. ЛИФШИЦ

(Новосибирск)

В работе проводится моногармонический анализ нелинейной устойчивости асимптотического пограничного слоя с отсосом. Найлены критические значения параметров, анализируется форма нейтральной поверхности, профилей средней и пульсационной скоростей в сравнении с экспериментальными результатами.

Отсасывание пограничного слоя широко применяется для снижения потерь на сопротивление давления и трения путем предотвращения отрыва пограничного слоя и затягивания ламинарного режима обтекания [1]. Достаточно подробный обзор работ по данному вопросу можно найти в [1, 2]. Наиболее полному теоретическому анализу поддается случай асимптотического пограничного слоя, т. е. установившееся плоское течение над бесконечной пластиной с равномерным отсосом. В работе [3] была построена нейтральная кривая для такого течения и найдено критическое число Рейнольдса, уточненное значение которого $R_* = 5.65 \cdot 10^4$. Однако, согласно эксперименту [2] и теоретическому анализу ветвления вторичных режимов от нейтральной кривой [4], характер потери устойчивости для данного течения относится к жесткому типу, т. е. в некоторой области чисел Рейнольдса, где малые возмущения, согласно линейной теории, затухают, может развиваться вторичный режим, порожденный возмущениями достаточно большой амплитуды. Одна из основных задач нелинейной теории устойчивости — нахождение области существования таких режимов, в том числе и минимального числа Рейнольдса из этого интервала.

Немногие известные результаты по оценке нелинейного критического числа Рейнольдса для некоторых плоскопараллельных течений получены методом Галеркина с использованием небольшого количества базисных функций в виде гармоник по однородным переменным [5–8]. В монографии [9] предложен эскалаторный метод последовательного усложнения аппроксимации пульсационного движения. Простейшей в этом ряду является моногармоническая модель, где для описания скорости возмущений используется одна гармоника, комплексная амплитуда которой должна удовлетворять уравнениям Рейнольдса и Орра — Зоммерфельда. Впервые такой подход был использован в [5]. В результате решения этой задачи может быть построена нейтральная поверхность в пространстве $\{R, I, \alpha\}$ (число Рейнольдса потока, интенсивность и волновое число пульсаций), которая при $I=0$ переходит в классическую нейтральную кривую. Возникающие трудности связаны с необходимостью решать задачу на собственные значения для системы нелинейных уравнений с малым параметром при старшей производной. Процедура типа простой итерации расходится уже при малых значениях интенсивности. В этих условиях хорошо себя зарекомендовал метод Ньютона — Канторовича, который был использован для нелинейного анализа течения Пуазейля [10].

В случае асимптотического пограничного слоя с отсосом, считая течение плоским, представим мгновенную скорость в виде

$$u_x(x, y, t) = U(y) + J \sqrt{\frac{\alpha}{2R}} [u(y) e^{i\omega} + v^* e^{-i\omega^*}] \quad (1)$$

$$u_y(x, y, t) = -V + J \sqrt{\frac{\alpha}{2R}} [v(y) e^{i\omega} + v^* e^{-i\omega^*}]$$

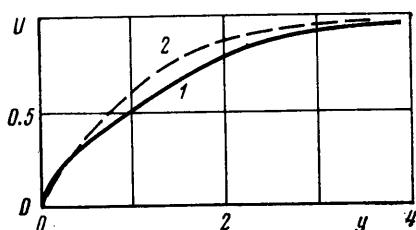
$$\omega = \alpha(x - Ct)$$

Тогда из уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости, после проектирования их на нулевую и первую гармоники, т. е. действуя по методу Галеркина, и некоторых преобразований получим соответственно уравнения Рейнольдса и Орра — Зоммерфельда, несколько модифицированное наличием члена, учитывающего отсос

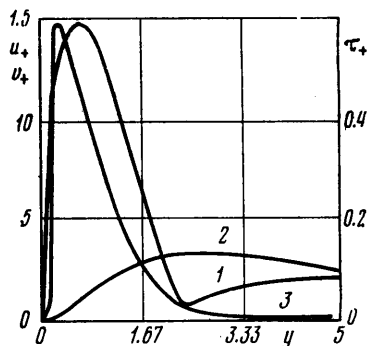
$$U'' + U' - \tau' = 0, \quad \tau = J^2 (v_i v_r' - v_r v_i') \quad (2)$$

$$\theta'' + \theta' - [\alpha^2 + i\alpha R(U - C)] \theta + i\alpha R U'' v = 0, \quad \theta = v'' - \alpha^2 v$$

Здесь τ — напряжения Рейнольдса, индексы r и i , как и везде ниже, обозначают действительную и мнимую часть комплексной величины, $R = U_\infty / V$. В сравнении с R_0 — критерием Рейнольдса, построенным по толщине вытеснения, $R = R_0 (\delta_{1L} / \delta_1)$,



Фиг. 1



Фиг. 2

где $\delta_{1L} = \nu/V$ — толщина вытеснения ламинарного пограничного слоя [1]. Масштабы для скорости и длины выбираются так, что $U_\infty = 1$, и $\delta_{1L} = 1$. На стенке ставятся однородные граничные условия, вдали от стенки требуется минимальный рост возмущений. Полагая $U = 1$, $U'' = 0$, найдем решение последнего уравнения из (2) в виде [4]

$$(3) \quad \begin{aligned} v &= C_1 \exp(-\alpha y) + C_2 \exp(-\gamma y) \\ \gamma_r &= 0.5 + \kappa, \quad \kappa = \sqrt{0.5(a + \gamma a^2 + b^2)} \\ \gamma_i &= b/(2\kappa), \quad a = \alpha^2 + 0.25, \quad b = \alpha R(1 - C) \end{aligned}$$

С учетом такого характера затухания граничные условия на внешней границе записываются как

$$\theta' + \gamma\theta = 0, \quad v' + \frac{\theta}{\alpha + \gamma} + \alpha v = 0$$

В результате приходим к задаче

$$(4) \quad \begin{aligned} \theta'' &= -\theta' + [\alpha^2 + i\alpha R(U - C)]\theta - i\alpha R U'' v, \quad v'' = \theta + \alpha^2 v \\ U'' &= -U' + J^2(v_i \theta_r - v_r \theta_i), \quad U = v = v' = 0 \quad (y = 0) \\ U &= 1, \quad \theta' + \gamma\theta = 0, \quad v' + \frac{\theta}{\alpha + \gamma} + \alpha v = 0 \quad (y = y_k) \end{aligned}$$

Величина параметра J зависит от нормировки v . Для определенности принимает-ся $\theta(0) = 1$. Интенсивность пульсационного движения, определенная как

$$I = J \sqrt{\frac{\alpha}{R}} \left[\int_0^\infty (|v'|^2 + \alpha^2 |v|^2) dy \right]^{1/2}$$

не зависит от нормировки, и поэтому результаты целесообразнее относить именно к интенсивности I . При $I = 0$ приходим к линейной задаче устойчивости [3]. Нелинейная задача решается методом Ньютона в сочетании с процедурой «движения по непрерывности» от уже найденного решения, которое берется в качестве начального приближения для искомого.

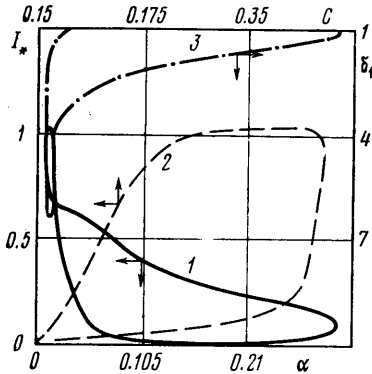
Пусть для набора параметров $\Pi_0 = \{\alpha, R, C, J\}$ известно решение задач (4) $W_0 = \{\theta_0(y), v_0(y), U_0(y)\}$ и требуется найти решение для $\Pi = \Pi_0 + \delta\Pi$ при условии $\|\delta\Pi\| \ll \|\Pi_0\|$, причем только две компоненты Π задаются произвольно, остальные две определяются условиями нормировки и нетривиальной разрешимости задачи на собственные значения. Решение W разыскивается при помощи итеративной процедуры $W_{n+1} = W_n + W_*$, где W_* удовлетворяет системе

$$(5) \quad W_*'' - A_1(W_n)W_*' - A_2(W_n)W_* = P(W_n)$$

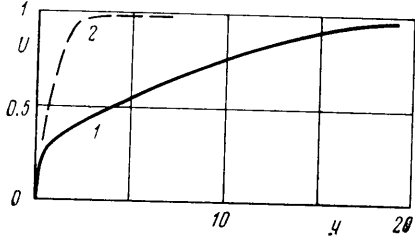
в которой A_1 и A_2 — линейные операторы, являющиеся производными в смысле Френе от правой части (4) по W' и W соответственно, а P — вектор невязок (4) при $W = W_n$. Если вектор P линеаризовать по зависимым компонентам Π и определять их из условия нормировки W_{n+1} , то W и Π разыскиваются в рамках единой итеративной процедуры.

Линейная система (5) решалась методом разностной прогонки на составной сетке с крупным и мелким равномерными шагами во внешней и пристенной зонах соответственно. Ширина пристенного участка выбиралась в 3–2,5 раза больше, чем расстояние от стенки до критической точки u_c , где $U(u_c) = C$. Общая длина интервала интегрирования y_h определялась исходя из величины α (как видно из (3)), быстрота затухания пульсаций с удалением от стенки обратно пропорциональна α , не меньше толщины пограничного слоя, т. е. так, чтобы увеличение y_h не приводило к изменению профиля средней скорости.

Минимальное число Рейнольдса, при котором существует автоколебательный режим, $R_* = 4840$ достигается при значениях параметров: $\alpha = 0.15$; $C = 0.42$; $I_* = I/\alpha =$



Фиг. 3



Фиг. 4

$= 0.284$ ($I = 0.043$). Фигура 1 дает представление о характере деформации профиля средней скорости при этих значениях параметров (кривая 1) в сравнении с ламинарным режимом при том же отсосе (кривая 2), координата y обезразмерена в соответствии с выбранным масштабом. Кривые 1, 2, 3 на фиг. 2 соответствуют составляющим пульсационной скорости $u_+ = |u|/v_*$, $v_+ = |v|/v_*$ и формируемому ими напряжению Рейнольдса $\tau_+ = \tau/v_*^2$, $v_* = \sqrt{U'(0)R}$ — динамическая скорость. Сечением нейтральной поверхности $F(I, R, \alpha) = 0$ при $R = 5.65 \cdot 10^4$, проходящем через носик нейтральной кривой при $I = 0$, является замкнутый контур, нанесенный на фиг. 3 линией 1. Максимально устойчивым режимом в данном случае является режим с максимальной интенсивностью. Каждой точке контура соответствует свой профиль $U(y)$, для которого можно построить нейтральную кривую и найти критическое значение R_{1*} . На всем контуре $R_{1*} \leq R$, причем равенство достигается при $I = 0$ и в точке, о которой идет речь. На фиг. 3 показано также изменение вдоль контура фазовой скорости колебаний (линия 2) и толщины вытеснения (линия 3), величина которой характеризует степень деформации профиля средней скорости. Как видно, наибольшая деформация соответствует максимуму интенсивности пульсаций. Профиль средней скорости в этой точке нанесен кривой 1 на фиг. 4, кривая 2 — ламинарный профиль. Характерным для данного типа течения является совпадение ламинарного и турбулентного профилей в пристенной зоне наряду с присутствием в последнем случае значительных по интенсивности пульсаций. Тот же эффект при наличии установившегося асимптотического пограничного слоя отмечается во всех экспериментальных измерениях [2, 11–13]. Количественное сравнение затруднительно, так как опыты ставились при параметрах отсоса $A = R^{-1}$, на порядок и более превосходящих тот, при котором проводились данные расчеты. В работе [12] замечено хорошее совпадение в логарифмической области экспериментальных профилей с зависимостью для дефекта скорости

$$1 - \frac{U}{U_\infty} = \frac{A}{k^2} \ln \left(\frac{y}{\delta} \right)$$

при $k = 0.23 - 0.225$. Обсуждаемый здесь профиль также имеет явно выраженный логарифмический отрезок, но значение $k \approx 0.016$.

Ламинарный асимптотический пограничный слой над плоской пористой поверхностью устанавливается при минимальном отсосе $A \approx 0.0007$ [12, 13]. Это значение следует сравнивать с критериями устойчивости для профилей Иглиша [14] (течение на входном участке, предшествующее асимптотическому), так как для их устойчивости необходим больший отсос, чем в случае асимптотического пограничного слоя. По результатам линейного анализа для устойчивости течения Иглиша требуется $A = 0.000118 - 0.00017$ [15–17].

Что касается устойчивости по отношению к возмущениям произвольно большой амплитуды, требуемая величина отсоса оценивается как $A \approx 0.001 - 0.006$ [2, 18]. Это по крайней мере в пять раз превосходит критическое значение для параметра отсоса, полученное в данной работе. Такое расхождение, по-видимому, объясняется не только грубостью моногармонического приближения, но и недостаточной длиной рабочего участка в опытах. Ламинарный асимптотический пограничный слой устанавливается при $R_x > 4/A^2$ [1]. Вблизи границы потери устойчивости (когда отсос несколько больше критического, при котором уже развивается вторичный режим) параметры возмущений, доминирующих в потоке, близки к нейтральным, т. е. декременты загухания малы, а следовательно, длина участка, необходимая для установления асимптотического режима, увеличивается еще больше. Поэтому экспериментальные результаты по величине отсоса, стабилизирующего любые привносимые возмущения, полученные для конечного значения R_x (в опытах R_x не превосходит 10^7), следует рассматривать как некоторое приближение сверху к критическому значению.

Аналогичная картина относительно темпов развития возмущений вниз по потоку имеет место при отсосах, несколько меньших критического. Небольшое различие профилей скорости турбулентных течений с малым отсосом и без него, наблюдаемое в эксперименте, есть следствие этого эффекта, свидетельство того, что процесс установления асимптотического режима находится в самой ранней стадии развития.

Автор благодарит М. А. Гольдштика и В. Н. Штерна за внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 31 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
2. Simpson R. L., Kays W. M., Moffat R. Y. The Turbulent Boundary Layer on a Porous Plate: an Experimental Study of the Dynamics with Injection and Suction. Report N HNT-2, Stanford, California, 1967, p. 173.
3. Bussmann K., Münz H. Die Stabilität der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. Jb. dt. Luftfahrtforschung 1. Flugwerk. Berlin, 1942.
4. Лихачев О. А. Автоколебательное течение в асимптотических пограничных слоях. ПМТФ, 1976, № 2.
5. Meksyn D., Stuart J. T. Stability of viscous motion between parallel flows for finite disturbances. Proc. Roy. Soc., London, 1951, vol. A208, No. 1095.
6. Kuwabara S. Nonlinear instability of plane Couette flow. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 9, pt 2.
7. Grohne D. Die Stabilität der ebenen Kanalströmung gegenüber dreidimensionalen Störungen von endlicher Amplitude. AVA Göttingen Rep, 1969, No. 69-A-30.
8. Zahn J.-P., Toomre J., Spiegel E. A., Gough D. O. Nonlinear cellular motions in Poiseuille channel flow. J. Fluid. Mech., 1974, vol. 64, No. 2.
9. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск, «Наука», 1977.
10. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Модельные автоколебания и турбулентность. В кн.: Проблемы теплофизики и физической гидродинамики. Новосибирск, «Наука», 1974.
11. Favre A., Dumas R., Verollet E., Coantic M. Couche limite turbulente sur paroi poreuse avec aspiration. J. Mecanique, 1966, vol. 5, No. 1.
12. Kay J. M. Boundary-layer flow along a flat plate with uniform suction. A. R. C., R. and M., 1948, No. 2628.
13. Head M. R. The boundary layer distributed suction. A. R. C., R. and M., 1955, No. 2783.
14. Iglisch R. Exact calculation of the laminar boundary layer in longitudinal flow over a flat plate with homogeneous suction. N. A. C. A., T. M., 1949, No. 1205.
15. Ulrich A. Theoretical investigation of drag reduction by Maintaining the laminar boundary layer by suction. N. A. C. A., T. M., 1947, No. 1121.
16. Hahneman E., Freeman J. C., Finston M. Stability of boundary layers and of flow in the entrance section of a channel. J. Aeronaut. Sci., 1948, vol. 15, No. 8.
17. Burrows D. L., Braslow A. L., Tetervin N. Experimental and theoretical studies of area suction for the control of the laminar boundary layer on a porous Bronze NASA 64A010 aerofoil. N. A. C. A., T. N., 1949, No. 1905.
18. Gregory N., Walker W. S., Devereux A. M. Wind tunnel test on the 30 per cent summerical griffith aerofoil with distributed suction over the nose. A. R. C., R. and M., 1953, No. 2647.