МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1980

УДК 532.516

О ВЛИЯНИИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ НА ЗАТУХАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

НГО ЗУЙ КАН

(Воронеж)

В работе проводится численный расчет малых колебаний вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей наполовину цилиндрический горизонтальный канал, с учетом и без учета поверхностного натяжения. Результаты расчета показывают, что учет поверхностного натяжения приводит к увеличению затухания колебаний.

Общие свойства задач о нормальных колебаниях тяжелой и капиллярной вязкой несжимаемой жидкости изучались в [1–3], где указана возможность применения метода Бубнова – Галеркина к этим задачам. Метод расчета колебаний вязкой несжимаемой частично заполняющей произвольный сосуд жидкости при больших числах Рейнольдса развит в [3–5].

1. Постановка задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет наполовину цилиндрический горизонтальный канал. Предполагается, что свободная поверхность жидкости плоская, т. е. число Бонда $B_0 \gg 1$ [6]. Уравнения малых колебаний жидкости в безразмерной форме имеют вид [3–5]

(1.1) $$\lambda \mathbf{u} = \nabla p - R^{-1}\Delta \mathbf{u}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \quad \text{в } \Omega, \quad \mathbf{u}=0 \quad \text{на } S$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial y} = 0,$$

$$\lambda\left(-p + 2R^{-1}\frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z}\right) = F^{-1}\mathbf{u}_z - B_0^{-1}\Delta_1 \mathbf{u}_z \quad \text{на} \quad \Gamma$$

$$R = \nu^{-1}\omega_1 L^2, \quad F = g^{-1}\omega_1^2 L, \quad B_0 = \sigma^{-1}\rho L^3 \omega_1^2$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор скорости частиц жидкости; $p = p_1 - F^{-1}z$, p_1 – давление в жидкости; Ω – область, занимаемая жидкостью; S – смоченная твердая стенка; Γ – свободная поверхность жидкости; λ – комплексное число, его вещественная часть называется фактором затухания; R – число Рейнольдса, F – число Фруда, в качестве характерного линейного масштаба L выбрана ширина свободной поверхности жидкости, в качестве характерного времени величина ω_1^{-1}, ω_1 – частота колебаний первого тона свободных колебаний идеальной тяжелой жидкости в данном сосуде, ν – кинематический коэффициент вязкости, g – ускорение силы тяжести, σ – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность жидкости, $\Delta_1 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Используя формулу Грина для уравнения Навье – Стокса [7]

$$\int_\Omega (-R^{-1}\Delta\mathbf{u} + \nabla p)\mathbf{v}\, d\Omega = R^{-1}E(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \int_\Gamma \left[R^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial z}\right)\mathbf{v}_x + \right.$$
$$\left. + R^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial y}\right)\mathbf{v}_y + \left(-p + 2R^{-1}\frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z}\right)\mathbf{v}_z \right] d\Gamma,$$

задачу (1.1) можно привести к задаче о нахождении параметра λ, удовлетворяющего уравнению

(1.2) $$R^{-1}E(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \lambda\int_\Omega \mathbf{u}\mathbf{v}\, d\Omega - \lambda^{-1}\left(F^{-1}\int_\Gamma \mathbf{u}_z\mathbf{v}_z\, d\Gamma - B_0^{-1}\int_\Gamma \Delta_1\mathbf{u}_z\mathbf{v}_z\, d\Gamma\right) = 0$$

$$E(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_\Omega \left[2\frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x} + 2\frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial y} + 2\frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z}\frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial z} + \right.$$

$$+\left(\frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial y}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial z}\right)\Bigg]\, d\Omega$$

Здесь $E(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – билинейный функционал.

Если считать, что жидкость не обладает поверхностным натяжением, то из (1.2) получаем

$$R^{-1}E(\mathbf{u},\mathbf{v})-\lambda\int_\Omega \mathbf{u}\mathbf{v}\, d\Omega-\lambda^{-1}F^{-1}\int_\Gamma \mathbf{u}_z\mathbf{v}_z\, d\Gamma=0 \tag{1.3}$$

Будем применять метод Бубнова – Галеркина для приближенного вычисления параметра λ в уравнениях (1.2) и (1.3).

2. **Уравнения частот колебаний вязкой жидкости.** За систему координатных функций выберем собственные функции задачи о колебаниях вязкой жидкости, целиком заполняющей неподвижный горизонтальный канал [8]

$$\psi=\{J_s^{-1}(k_i^s)J_s(k_i^s r)-r^s\}\left\{\begin{matrix}\cos s\theta\\ \sin s\theta\end{matrix}\right\},\qquad \mathbf{u}_r=-r^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\qquad \mathbf{u}_\theta=\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{u}_n$, $\mathbf{u}_\theta$ – безразмерные составляющие вектора скорости жидкости $\mathbf{u}$ в цилиндрической системе координат, J_s – функции Бесселя целого порядка s, k_i^s – корни функции Бесселя J_{s+1}, r – безразмерный радиус.

Ищем решения уравнений (1.2) (1.3) в виде

$$\mathbf{u}=\sum_{i,s=1}^{\infty} C_i^s(u_r\gamma_r+u_\theta\gamma_\theta) \tag{2.2}$$

Здесь γ_r, γ_θ – единичные векторы осей цилиндрической системы координат.

Подставляя (2.2) в уравнения (1.2), (1.3) в цилиндрической системе координат, придем к линейной однородной алгебраической системе уравнений. Приравнивая нулю определитель этой системы, получим уравнения для частот колебаний вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей наполовину цилиндрический горизонтальный канал

$$\begin{aligned}&R^{-1}A_{n,m}-\lambda B_{n,m}-\lambda^{-1}(F^{-1}C_{n,m}-B_0^{-1}D_{n,m})=0\\ &R^{-1}A_{n,m}-\lambda B_{n,m}-\lambda^{-1}F^{-1}C_{n,m}=0\end{aligned} \tag{2.3}$$

Для приближенного расчета λ положим в (2.3) $s=1, 2\ldots S$, $i=1, 2,\ldots I$, тогда $n=1, 2,\ldots. I, I+1,\ldots. SI$; $m=1, 2\ldots I, I+1,\ldots. SI$.

Отметим, что координатные функции (2.1) образуют полные ортогональные системы в двух взаимно ортогональных подпространствах. Поэтому будем решать задачу в каждом из подпространств. Примем, что в H_1 входят все четные по θ функции, а в H_2 входят все нечетные функции. Можно получить

$$A_{i+i(s-1),j+j(k-1)}=4sk\int_\pi^{2\pi}\int_0^1\left\{\frac{J_s(k_i^s r)}{rJ_s(k_i^s)}-r^{s-1}\right\}\left\{\frac{J_k(k_j^k r)}{rJ_k(k_j^k)}-r^{k-1}\right\}\times$$

$$\times\left\{\begin{matrix}\sin s\theta\sin k\theta\\ \cos s\theta\cos k\theta\end{matrix}\right\} r\,dr\,d\theta+\int_\pi^{2\pi}\int_0^1\left\{\frac{(k_i^s)^2J_s''(k_i^s r)}{J_s(k_i^s)}-\frac{k_i^sJ_s'(k_i^s r)}{rJ_s(k_i^s)}+\right.$$

$$\left.+\frac{s^2J_s(k_i^s r)}{r^2J_s(k_i^s)}-2s(s-1)r^{s-2}\right\}\left\{\frac{(k_j^k)^2J_k''(k_j^k r)}{J_k(k_j^k)}-\frac{k_j^kJ_k'(k_j^k r)}{rJ_k(k_j^k)}+\right.$$

$$\left.+\frac{k^2J_k(k_j^k r)}{r^2J_k(k_j^k)}-2k(k-1)r^{k-2}\right\}\left\{\begin{matrix}\cos s\theta\cos k\theta\\ \sin s\theta\sin k\theta\end{matrix}\right\} r\,dr\,d\theta$$

$$B_{i+i(s-1),j+j(k-1)}=\int\limits_{\pi}^{2\pi}\int\limits_{0}^{1}\left\{\frac{J_s(k_i^s r)}{rJ_s(k_i^s)}-r^{s-1}\right\}\left\{\frac{J_k(k_j^k r)}{rJ_k(k_j^k)}-r^{k-1}\right\}\times$$

$$\times\left\{\begin{matrix} sk\sin s\theta\sin k\theta \\ sk\cos s\theta\cos k\theta\end{matrix}\right\}r\,dr\,d\theta+\int\limits_{\pi}^{2\pi}\int\limits_{0}^{1}\left\{\frac{k_i^sJ_s'(k_i^s r)}{J_s(k_i^s)}-sr^{s-1}\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{k_j^sJ_k'(k_j^k r)}{J_k(k_j^k)}-kr^{k-1}\right\}\left\{\begin{matrix}\cos s\theta\cos k\theta\\ \sin s\theta\sin k\theta\end{matrix}\right\}r\,dr\,d\theta$$

Воспользовавшись рекуррентными соотношениями между функциями Бесселя

$$J_s'(z)=sz^{-1}J_s(z)-J_{s+1}(z)$$

$$J_s''(z)-sz^{-1}J_s'(z)+sz^{-2}J_s(z)=-J_{s+1}'(z)$$

можно показать, что [9]

$$A_{i+i(s-1),j+j(k-1)}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}(k_i^s)^4, & \text{если}\quad i=j,\quad s=k\\ 0, & \text{если}\quad i\neq j,\quad \text{или}\quad s\neq k\end{cases}\tag{2.4}$$

$$B_{i+i(s-1),j+j(k-1)}=\begin{cases}0, & \text{если}\quad i\neq j\quad\text{или}\quad s\neq k\\ \dfrac{\pi}{4}(k_i^s)^2, & \text{если}\quad i=j,\quad s=k\end{cases}$$

Легко видеть, что в H_2 элементы матриц $C_{n,m}$ и $D_{n,m}$ равны нулю, а в H_1 они равны

$$C_{i+i(s-1),j+j(k-1)}=\begin{cases}0, & \text{если}\quad s\neq k\\ 2\displaystyle\int\limits_0^1\left\{\frac{k_i^sJ_s'(k_i^s r)}{J_s(k_i^s)}-sr^{s-1}\right\}\left\{\frac{k_j^kJ_k'(k_j^k r)}{J_k(k_j^k)}-kr^{k-1}\right\}dr, & \text{если}\quad s=k\end{cases}\tag{2.5}$$

$$D_{i+i(s-1),j+j(k-1)}=\begin{cases}0, & \text{если}\quad s\neq k\\ 2\displaystyle\int\limits_0^1\left\{\frac{(k_i^s)^3J_s'''(k_i^s r)}{J_s(k_i^s)}-s(s-1)(s-2)r^{s-3}\right\}\left\{\frac{k_j^kJ_k'(k_j^k r)}{J_k(k_j^k)}-kr^{k-1}\right\}dr, & \text{если}\quad s=k\end{cases}$$

Таким образом, задача сводится к нахождению собственных чисел матричных уравнений (2.3).

В подпространстве H_2 оба уравнения (2.3) приводятся к линейному уравнению относительно λ с диагональными матрицами, собственные числа которого легко вычисляются

$$\lambda_m=R^{-1}(k_m^s)^2\tag{2.6}$$

В подпространстве H_1 получаются нелинейные относительно λ матричные уравнения. Однако при помощи преобразования, указанного в [9], их можно привести к матричным уравнениям, линейным относительно параметра $\mu=\lambda+\lambda^{-1}$

$$H_{2n,2m}-\mu K_{2n,2m}=0\tag{2.7}$$

В случае, когда поверхностное натяжение не учитывается, матрицы $H_{2n,2m}$, $K_{2n,2m}$ имеют вид

$$H_{2n,2m}=\begin{pmatrix}R^{-1}A_{n,m} & B_{n,m}-F^{-1}C_{n,m}\\ F^{-1}C_{n,m}-B_{n,m} & R^{-1}A_{n,m}\end{pmatrix},\qquad K_{2n,2m}=\begin{pmatrix}B_{n,m} & 0\\ 0 & F^{-1}C_{n,m}\end{pmatrix}\tag{2.8}$$

В случае, когда поверхностное натяжение учитывается, матрицы $H_{2n,2m}$, $K_{2n,2m}$ равны

$$H_{2n,2m}=\begin{pmatrix}R^{-1}A_{n,m} & B_{n,m}-F^{-1}C_{n,m}+B_0^{-1}D_{n,m}\\ F^{-1}C_{n,m}-B_{n,m}-B_0^{-1}D_{n,m} & R^{-1}A_{n,m}\end{pmatrix},\tag{2.9}$$

$$K_{2n,2m}=\begin{pmatrix} B_{n,m} & 0 \\ 0 & F^{-1}C_{n,m}B_0^{-1}D_{n,m}\end{pmatrix}$$

3. Численные результаты. При численном решении уравнений (2.7) принималось, что $I=3$, $S=3$. Приведем некоторые численные результаты. В таблице даются пять первых факторов затухания, вычисленных при постоянных значениях числа Фруда $F=1.44066$ и числа Бонда $B_0=1867.47437$ без учета и с учетом поверхностного натяжения.

R	$\mathrm{Re}(\lambda_1)$	$\mathrm{Re}(\lambda_2)$	$\mathrm{Re}(\lambda_3)$	$\mathrm{Re}(\lambda_4)$	$\mathrm{Re}(\lambda_5)$
		$\sigma=0$			
118898.18	0.00006	0.00015	0.00017	0.00020	0.00022
99081.87	0.00008	0.00018	0.00021	0.00024	0.00028
84927.31	0.00009	0.00021	0.00024	0.00028	0.00031
74311.37	0.00010	0.00023	0.00027	0.00032	0.00035
66054.56	0.00011	0.00026	0.00031	0.00036	0.00039
59449.15	0.00013	0.00029	0.00034	0.00040	0.00044
		$B_0=1867.47437$			
118898.18	0.00014	0.00016	0.00019	0.00021	0.00028
99081.87	0.00015	0.00017	0.00020	0.00021	0.00029
84927.31	0.00017	0.00020	0.00023	0.00025	0.00030
74311.37	0.00020	0.00023	0.00026	0.00028	0.00033
66054.56	0.00022	0.00026	0.00029	0.00032	0.00037
59449.12	0.00025	0.00029	0.00033	0.00035	0.00041

На фиг. 1 представлены зависимости первого фактора затухания колебаний от числа Рейнольдса при различных числах Бонда. Кривая *1* соответствует случаю без учета поверхностного натяжения ($\sigma=0$, $B_0=\infty$), *2* – $B_0=4712.2578$, *3* – $B_0=1867.477$, *4* – $B_0=942.451$.

Видно, что при увеличении поверхностного натяжения (число Бонда при этом уменьшается) факторы затухания увеличиваются, т. е. колебания в жидкости затухают быстрее.

В случае отсутствия поверхностного натяжения при больших числах Рейнольдса удобно определять факторы затухания колебаний вязкой несжимаемой жидкости по асимптотической формуле [5]

$$\mathrm{Re}(\lambda_m)={}^1/_2(2R)^{-1/2}F^{-1}\omega_m^{-3/2}\int\limits_S(\nabla\Phi_m)^2\,dS\left(\int\limits_\Gamma\Phi_m^2\,d\Gamma\right)^{-1} \tag{3.1}$$

Здесь ω_m, Φ_m являются собственными числами и собственными функциями задачи о свободных колебаниях тяжелой идеальной жидкости в сосуде данной формы

$$\Delta\Phi_m=0,\qquad \frac{\partial\Phi_m}{\partial n}=0 \text{ на } S,\qquad \frac{\partial\Phi_m}{\partial n}=F\omega_m\Phi_m \text{ на } \Gamma \tag{3.2}$$

При решении задачи (3.2) для горизонтального цилиндрического канала применим метод малого параметра, изложенный в [10].

Пусть величины

$$\mu_m=F^{-1}\pi m\,\mathrm{th}\,(\pi m),\quad \psi_m=\cos m\pi y\,\mathrm{ch}\,m\pi(z+1)\,(\mathrm{ch}\,m\pi)^{-1}$$

$$\mu_m=F^{-1}\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\mathrm{th}\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi,$$

$$\psi_m=\sin\left(\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)y\,\mathrm{ch}\left(\left(m-\frac{1}{2}\right)(z+1)\right)\left[\mathrm{ch}\,\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\right.$$

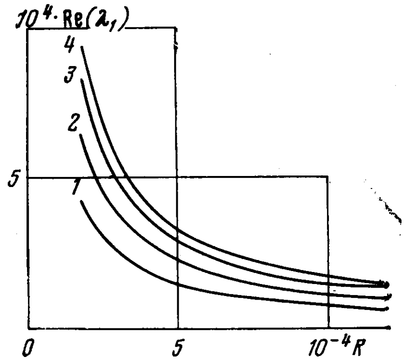
являются собственными числами и собственными функциями задачи (3.2) для прямоугольного горизонтального канала, тогда величины ω_m, Φ_m для цилиндрического канала можно найти по приближенным формулам [10]

$$\omega_m=\mu_m+F^{-1}\int\limits_S\psi_m\frac{\partial\psi_m}{\partial n}\,dS,\quad \Phi_m=\psi_m+\sum_{\substack{s=1\\ s\neq m}}^{N}F^{-1}(\mu_m-\mu_s)^{-1}\psi_s\int\limits_S\psi_s\frac{\partial\psi_m}{\partial n}\,dS, \tag{3.3}$$

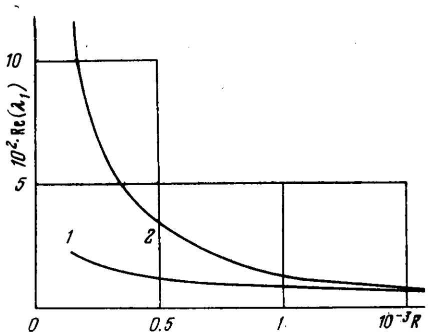
Результаты, вычисленные по формуле (3.1) и по решению уравнения (2.7) (2.8), показаны кривыми *1*, *2* на фиг. 2.

Все расчеты проведены на ЭВМ ЕС 1020 Вычислительного центра Воронежского с.-х. ин-та.

Автор искренне благодарит С. Г. Крейна за постановку задачи и ценные указания, Ф. Л. Черноусько, А. Т. Листрова, О. Б. Иевлеву за помощь и обсуждение результатов.



Фиг. 1



Фиг. 2

Поступила 2 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн С. Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 2.
2. *Аскеров Н. К., Крейн С. Г., Лаптев Г. И.* Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения. Функциональный анализ и его приложения, 1968, т. 2, № 2.
3. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. М., «Наука», 1976.
4. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
5. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., ВЦ АН СССР, 1968.
6. *Моисеев Г. А.* Движение твердого тела, имеющего полость, целиком заполненную двумя несмешивающимися жидкостями. В сб.: Матем .физика, вып. 11. Киев, «Наукова думка», 1972.
7. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.
8. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.– Л., Гостехиздат, 1947.
9. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1965.
10. *Моисеев Н. Н., Петров А. А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М., ВЦ АН СССР, 1966.

УДК 532.516.5

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МЯГКОЙ ОБОЛОЧКИ С ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

М. М. СУЛЕЙМАНОВА

(Казань)

В работе методом конечных разностей на неравномерной сетке изучается нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости, вызываемое бегущими осесимметричными упругими волнами вдоль по поверхности мягкой цилиндрической оболочки. Определяются поле скоростей, завихренностей, функций тока и гидродинамические силы, действующие на тело, а также перемещения и скорости точек обо-