МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1980

УДК 538.4

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ И КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ЗАРЯЖЕННОЙ СМЕСИ ГАЗОВ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

Ю. А. НАГЕЛЬ

(Москва)

Рассматривается модель газовой смеси, одна из компонент которой может нести электрический заряд и претерпевать фазовые превращения. При ряде предположений выписываются кинетические уравнения Больцмана и определяется вид интегралов столкновений. Записываются уравнения сохранения для компонент смеси.

Уравнения сохранения для заряженной смеси газов в отсутствие фазовых превращений обсуждались в работе [1]. Вывод интегралов столкновений для реагирующей газовой смеси при химических реакциях бимолекулярного типа, описываемой кинетическими уравнениями Больцмана, дан в работе [2].

1. Модель газовой смеси. Рассмотрим смесь газа с частицами микроскопического размера, составленную из молекул двух веществ. Молекулы первого вещества не несут электрического заряда и не обладают способностью образовывать молекулярные комплексы, а молекулы второго вещества, напротив, могут иметь равный электрический заряд одного знака и способны конденсироваться и формировать таким образом микроскопические капельки. Предположим, что образование капелек происходит только на заряженных молекулах второго вещества, заряд их остается постоянным, масса капелек лежит в пределах $km_2 \leqslant m_i \leqslant lm_2$ (l и k — фиксированные целые числа, m_2 — масса молекул второго вещества), капельки достаточно малы и могут быть отождествлены с молекулами. Тогда подобная среда может рассматриваться как реагирующая газовая смесь, состоящая из N компонент ($N=l-k+3$): нейтральных молекул 1-го и 2-го сорта и заряженных молекул j-го сорта ($3 \leqslant j \leqslant N$), в которой происходят реакции типа

$$(1.1) \qquad m_\nu + m_2 \rightleftarrows m_{\nu+1} \quad (3 \leqslant \nu \leqslant N-1)$$

Допустим, что имеют место следующие неравенства, накладывающие ограничение сверху на диаметр молекул j-го сорта

$$(1.2) \qquad \frac{n_j}{n_1} \ll \frac{W_{11}}{W_{1j}} \sim \frac{\sigma^2}{\sigma_j^2}, \qquad \frac{n_j}{n_2} \ll \frac{W_{12}}{W_{2j}} \sim \frac{\sigma^2}{\sigma_j^2}$$

$$(1.3) \qquad \frac{\sigma}{\sqrt{2}\,\pi\lambda} \ll \frac{\sigma^2}{\sigma_j^2}, \qquad j \geqslant 3$$

Здесь n — концентрация, W_{nm} — сечение взаимодействия молекул n-го и m-го сорта, σ_j, σ — диаметр молекул (считаем $\sigma_1 \sim \sigma_2 = \sigma$), λ — средняя длина свободного пробега в смеси из молекул 1-го и 2-го сорта.

Для выполнения (1.2) необходимо, чтобы величины n_j/n_1, n_j/n_2 были малы. Это условие хорошо выполняется на практике: максимальная величина отношения концентрации одноименно заряженных частиц к концентрации нейтральных (в данном случае $\sum_{j=3}^{j=N} n_j/(n_1+n_2)$) имеет порядок 10^{-8} [3]. Неравенство (1.3) определяет условие, при котором среднее время между столкновениями молекулы j-го сорта с молекулами 1-го или 2-го сорта (порядка $\lambda_j/\langle v_{1j}\rangle$, $\lambda_j/\langle v_{2j}\rangle$) велико по сравнению с временем взаимодействия (порядка $\sigma/\langle v_{1,2}\rangle$) и можно пренебречь тройными столкновениями.

Воспользуемся для описания смеси кинетическими уравнениями Больцмана, предполагая, что правая часть уравнений представляет собой сумму двух членов: интеграла упругих столкновений и интеграла столкновений, учитывающего реакции (1.1).

Произведем оценку порядка членов в правых частях уравнений Больцмана, имея в виду (1.2), (1.3) и полагая, что при столкновении молекул 1-го сорта с молекулами любого сорта интеграл столкновений записывается в обычной форме [4], а при столкновении между собой заряженных молекул — в форме Ландау [5]

$$\Gamma_{1j}^+ - \Gamma_{1j}^- = \int (f_1'f_j'-f_1f_j)\,g_{1j}b_{1j}\,db_{1j}\,d\varepsilon\,d\mathbf{p}_j, \tag{1.4}$$

$$\Gamma_{ij}^+ - \Gamma_{ij}^- = \frac{\partial}{\partial p_{i,k}}\frac{1}{8\pi\varepsilon_0^2}e_i^2e_j^2L_{ij}\times \tag{1.5}$$

$$\times\int d\mathbf{p}_j\frac{g_{ij}^2\delta_{kl}-(\mathbf{g}_{ij})_k(\mathbf{g}_{ij})_l}{g_{ij}^3}\left\{\frac{\partial f_i}{\partial p_{i,l}}f_j-f_i\frac{\partial f_j}{\partial p_{j,l}}\right\},\quad i,j\geqslant 3$$

Принимая при оценке $f_1'\approx f_1^{(0)}(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{p}_1)$, где $f_1^{(0)}$ — локальная функция распределения Максвелла, и обозначая нижним индексом нуль характерные величины, имеем

$$\Gamma_{1j}^+ - \Gamma_{1j}^- \sim g_{1j,0}W_{1j,0}\left(f_1^{(0)}\int f_j'\,d\mathbf{p}_j-f_1\int f_j\,d\mathbf{p}_j\right)\simeq$$

$$\simeq (f_1^{(0)}-f_1)\,g_{1j,0}W_{1j,0}n_{j,0}$$

Откуда в силу (1.2) получаем

$$(\Gamma_{1j}^+-\Gamma_{1j}^-)/(\Gamma_{1i}^+-\Gamma_{1i}^-)\ll 1,\ j\geqslant 3,\ i=1,\ 2 \tag{1.6}$$

Согласно [5], подынтегральная функция в (1.5) имеет порядок величины

$$(f_i'f_j'-f_if_j)\left(\frac{m_j+m_i}{m_im_j}\right)^2 p_{i,0}$$

Поэтому, как и выше, имеем

$$\Gamma_{ij}^+ - \Gamma_{ij}^- \sim (f_i^{(0)}-f_i)\,g_{ij,0}n_{j,0}\frac{e_0^4L_{ij}}{32\pi\varepsilon_0^2}\left(\frac{3}{2}kT_{i,0}\right)^{-2}$$

Откуда следует, что

$$\frac{\Gamma_{ij}^+ - \Gamma_{ij}^-}{\Gamma_{i1}^+ - \Gamma_{i1}^-}\leqslant\frac{n_j}{n_1}\frac{1}{W_{11}}\frac{e_0^4L_{ij}}{32\pi\varepsilon_0^2}\left(\frac{3}{2}kT_{i,0}\right)^{-2},\quad i,j\geqslant 3 \tag{1.7}$$

При значениях величин, представляющих практический интерес ($n_j/n_1\leqslant 10^{-8}$, $e_0\sim 1.6\cdot 10^{-19}\,K$, $T_{i,0}\sim 10^3\,{}^\circ$K), правая часть неравенства (1.7) имеет порядок $\leqslant 10^{-4}$. Таким образом, в силу (1.6), (1.7) уравнения Больцмана для компонент смеси можем записать в виде

$$\frac{d}{dt}f_1=\sum_{j=1}^{j=2}(\Gamma_{1j}^+-\Gamma_{1j}^-),\qquad \frac{d}{dt}f_2=\sum_{j=1}^{j=N}(\Gamma_{2j}^+-\Gamma_{2j}^-)$$

(1.8)

$$\frac{d}{dt}f_i=\sum_{j=1}^{j=2}(\Gamma_{ij}^+-\Gamma_{ij}^-),\quad i\geqslant 3,\qquad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}_i\partial}{m_i\partial\mathbf{r}}+\mathbf{X}_i\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_i}$$

В этих уравнениях неизвестна пока форма записи членов

$$\sum_{j=3}^{j=N}(\Gamma_{2j}^+-\Gamma_{2j}^-)\text{ и }\Gamma_{i2}^+-\Gamma_{i2}^-,\qquad i\geqslant 3$$

учитывающих вклад столкновений с реакциями типа (1.1). Форма записи остальных членов аналогична (1.4).

Для определения вида искомых членов необходимо знать изменения импульсов и энергий сталкивающихся частиц, а также образующихся в результате реакций (1.1). Взаимодействие частиц 2-го и ν-го сорта может, очевидно, иметь характер упругого или неупругого столкновения. Вероятность каждого из указанных актов определяется соотношением между временем пребывания частицы 2-го сорта на поверхности ν-частицы $\tau_{\nu+1}$ (т. е. временем существования ($\nu+1$)-частицы) и временем столкновения τ_c. Экспериментально найдено, что среднее время жизни τ атомов благородных газов в адсорбированном состоянии на металлической поверхности $\tau\sim 10^{-9}-10^{-7}$ *сек* [6]. Такой же порядок имеет величина времени релаксации (время, по истечении которого разность температур между адсорбированным атомом и поверхностью снизится в e раз). Поскольку теплота адсорбции благородных газов на поверхности металлов по порядку величин соизмерима с теплотой конденсации веществ, то на основании формулы Френкеля для времени испарения атома с поверхности [7] можно ожидать, что среднее время жизни частицы ($\nu+1$)-го сорта и время релаксации будут также порядка $\sim 10^{-9}-10^{-7}$ *сек*. Эта величина существенно больше времени столкновения τ_c (порядка $10^{-13}-10^{-12}$ *сек*).

Поэтому возьмем за основу простейшую модель взаимодействия частиц 2-го и ν-го сорта: будем считать, что при их столкновении с вероятностью 1 образуется частица ($\nu+1$)-сорта и что условия повторного испарения частицы 2-го сорта не зависят от условий ее конденсации. Т. е. скорость ($\nu+1$)-частицы в лабораторной системе координат примем равной

(1.9) $\qquad \mathbf{v}_{\nu+1}=(m_2\mathbf{v}_2+m_\nu\mathbf{v}_\nu)/(m_2+m_\nu)$

а скорости частиц, образовавшихся при распаде ($\nu+1$)-частицы (обратный ход реакции (1.1)), равными [8]

(1.10) $\qquad \mathbf{v}_2=\mathbf{v}_{\nu+1}+\boldsymbol{\omega}I_{\nu+1}/m_2,\ \mathbf{v}_\nu=\mathbf{v}_{\nu+1}-\boldsymbol{\omega}I_{\nu+1}/m_\nu$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — случайный единичный вектор, $I_{\nu+1}^2/2m_{2\nu}$ — энергия распада, $1/m_{2\nu}=1/m_2+1/m_\nu$, $m_{2\nu}$ — приведенная масса.

2. Интегралы столкновений. Члены типа Γ_{2j}^+ (или Γ_{2j}^-) представляют собой число молекул 2-го сорта, прибывающих (убывающих) за единицу времени в единицу объема пространства $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}_2$ в результате реакций типа (1.1). Этим членам, а также Γ_{i2}^+ и Γ_{i2}^- соответствуют следующие реакции:

$$\Gamma_{2j}^+: m_{j+1}\to m_2+m_j,\ 3\leqslant j\leqslant N-1;\ \Gamma_{2j}^-: m_2+m_j\to m_{j+1},\ 3\leqslant j\leqslant N-1$$

$$\Gamma_{i2}^+=\Gamma_{i2,1}^+ +\Gamma_{i2,2}^+,\quad \Gamma_{i2,1}^+: m_{i+1}\to m_i+m_2,\quad 3\leqslant i\leqslant N-1$$

$$(2.1)\qquad \Gamma^{+}_{i2,2}: m_{i-1}+m_2 \to m_i,\quad 4\leqslant i\leqslant N$$

$$\Gamma_{i2}^{-}=\Gamma^{-}_{i2,1}+\Gamma^{-}_{i2,2},\quad \Gamma^{-}_{i2,1}: m_i+m_2\to m_{i+1},\quad 3\leqslant i\leqslant N-1$$

$$\Gamma^{-}_{i2,2}: m_i\to m_{i-1}+m_2,\quad 4\leqslant i\leqslant N$$

$$(2.2)\qquad \Gamma_{2N}^{+}=\Gamma_{2N}^{-}=\Gamma^{+}_{N2,1}=\Gamma^{-}_{N2,1}=\Gamma^{+}_{32,2}=\Gamma^{-}_{32,2}\equiv 0$$

Члены Γ_{2j}^{-} и $\Gamma^{-}_{i2,1}$, соответствующие прямым столкновениям частиц, можно записать так же, как и интегралы прямых упругих столкновений в уравнении Больцмана (см. (1.4)). Чтобы найти $\Gamma^{-}_{i2,2}$, положим, что вероятность распада молекулы i-го сорта равна $w_i(\mathbf{r}, t)$. Тогда

$$(2.3)\qquad \Gamma^{-}_{i2,2}=w_i f_i$$

Величину Γ_{2j}^{+} определяем так. Число молекул 2-го сорта, образовавшихся за время dt в объеме $d\mathbf{r}$ в результате распада молекул $(j+1)$-го сорта, обладающих скоростью в интервале $\mathbf{v}_{j+1}$, $\mathbf{v}_{j+1}+d\mathbf{v}_{j+1}$, равно $w_{j+1}f_{j+1}d\mathbf{r}d\mathbf{v}_{j+1}dt$. Поскольку скорость молекул 2-го сорта связана со скоростью распадающихся молекул $(j+1)$-го сорта соотношением (1.10), то для того, чтобы найти полное число молекул 2-го сорта, образующихся за время dt в объеме $d\mathbf{r}$ и имеющих скорость в интервале $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2+d\mathbf{v}_2$, предыдущее выражение необходимо умножить на величину (см., например, [2])

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=3}\left[X\left(v_{2,\nu}+dv_{2,\nu}-v_{j+1,\nu}-\frac{\omega_\nu I_{j+1}}{m_2}\right)-\right.$$
$$\left.-X\left(v_{2,\nu}-v_{j+1,\nu}-\frac{\omega_\nu I_{j+1}}{m_2}\right)\right]\frac{1}{4\pi}W_{j+1}(I_{j+1})$$

и полученный результат проинтегрировать по всем возможным значениям I_{j+1}, $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_{j+1}$, т. е.

$$\Gamma_{2j}^{+}\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}_2\,dt=d\mathbf{r}\,dt\int w_{j+1}f_{j+1}\prod_{\nu=1}^{\nu=3}\left[X\left(v_{2,\nu}+dv_{2,\nu}-v_{j+1,\nu}-\frac{\omega_\nu I_{j+1}}{m_2}\right)-\right.$$
$$\left.-X\left(v_{2,\nu}-v_{j+1,\nu}-\frac{\omega_\nu I_{j+1}}{m_2}\right)\right]W_{j+1}\frac{1}{4\pi}d\mathbf{v}_{j+1}\,dI_{j+1}\,d\boldsymbol{\omega}$$

Здесь индексом ν обозначены проекции на оси координат; $X(x)$ — функция Хевисайда [9]; $W_{j+1}(I_{j+1})$ — плотность вероятности величины I_{j+1}, причем $\int W_{j+1}dI_{j+1}=1$; $1/4\pi$ — плотность распределения единичного вектора $\boldsymbol{\omega}$, так что $\int d\boldsymbol{\omega}=4\pi$. Учитывая, что $d\mathbf{v}_2=\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=3}dv_{2,\nu}$, находим

$$(2.4)\qquad \Gamma_{2j}^{+}=w_{j+1}\int f_{j+1}\prod_{\nu=1}^{\nu=3}\delta_\nu\left(v_{2,\nu}-v_{j+1,\nu}-\frac{\omega_\nu I_{j+1}}{m_2}\right)\frac{W_{j+1}}{4\pi}d\mathbf{v}_{j+1}\,dI_{j+1}\,d\boldsymbol{\omega}$$

где $\delta(x)$ — обобщенная функция Дирака, являющаяся производной от функции Хевисайда [9].

В аналогичной форме записывается член $\Gamma^{+}_{i2,1}$, имеющий согласно (2.1) такую же структуру, как и член Γ_{2j}^{+}. При помощи тех же рассуждений, которые были проведены при выводе (2.4), получаем также

$$\Gamma^{+}_{i2,2}=\int f_2 f_{i-1}\prod_{\nu=1}^{\nu=3}\delta_\nu\left(v_{i,\nu}-\frac{m_2}{m_i}v_{2,\nu}-\right.\tag{2.5}$$

$$\left.-\frac{m_{i-1}}{m_i}v_{i-1,\nu}\right)g_{i-1,2}\,d\mathrm{v}_2\,d\mathrm{v}_{i-1}\,b_{i-1,2}\,db_{i-1,2}\,d\varepsilon$$

Таким образом, согласно (1.4), (2.2)–(2.5), уравнения (1.8) можем записать в виде

$$\frac{d}{dt}f_1=\sum_{j=1}^{j=2}\int(f_1'f_j'-f_1f_j)g_{1j}b_{1j}\,db_{1j}\,d\varepsilon\,d\mathrm{v}_j$$

$$\frac{d}{dt}f_2=\sum_{j=1}^{j=2}\int(f_2'f_j'-f_2f_j)g_{2j}b_{2j}\,db_{2j}\,d\varepsilon\,d\mathrm{v}_j+\tag{2.6}$$

$$+\sum_{j=3}^{j=N-1}\left\{\frac{w_{j+1}}{4\pi}\int f_{j+1}\prod_{\nu=1}^{\nu=3}\delta_\nu\left(v_{2,\nu}-v_{j+1,\nu}-\frac{\omega_\nu I_{j+1}}{m_2}\right)W_{j+1}\,dI_{j+1}\,d\mathrm{v}_{j+1}\,d\omega-\right.$$

$$\left.-\int f_2 f_j g_{2j}b_{2j}\,db_{2j}\,d\varepsilon\,d\mathrm{v}_j\right\}$$

$$\frac{d}{dt}f_3=\int(f_3'f_1'-f_3f_1)g_{31}b_{31}\,db_{31}\,d\varepsilon\,d\mathrm{v}_1-$$

$$-\int f_3f_2g_{32}b_{32}\,db_{32}\,d\varepsilon\,d\mathrm{v}_2+$$

$$+\frac{w_4}{4\pi}\int f_4\prod_{\nu=1}^{\nu=3}\delta_\nu\left(v_{3,\nu}-v_{4,\nu}+\frac{\omega_\nu I_4}{m_3}\right)W_4\,dI_4\,d\mathrm{v}_4\,d\omega$$

$$\frac{d}{dt}f_i=\int(f_i'f_1'-f_if_1)g_{i1}b_{i1}\,db_{i1}\,d\varepsilon\,d\mathrm{v}_1-\int f_if_2g_{i2}b_{i2}\,db_{i2}\,d\varepsilon\,d\mathrm{v}_2-$$

$$-w_if_i+\frac{w_{i+1}}{4\pi}\int f_{i+1}\prod_{\nu=1}^{\nu=3}\delta_\nu\left(v_{i,\nu}-v_{i+1,\nu}+\frac{\omega_\nu I_{i+1}}{m_i}\right)\times$$

$$\times W_{i+1}\,dI_{i+1}\,d\mathrm{v}_{i+1}\,d\omega+\int f_2f_{i-1}\prod_{\nu=1}^{\nu=3}\delta_\nu\left(v_{i,\nu}-\frac{m_2}{m_i}v_{2,\nu}-\right.$$

$$\left.-\frac{m_{i-1}}{m_i}v_{i-1,\nu}\right)g_{i-1,2}b_{2,i-1}\,db_{2,i-1}\,d\varepsilon\,d\mathrm{v}_2\,d\mathrm{v}_{i-1},\quad N>i>3$$

$$\frac{d}{dt}f_N=\int(f_N'f_1'-f_Nf_1)g_{N1}b_{N1}\,db_{N1}\,d\varepsilon\,d\mathrm{v}_1-w_Nf_N+$$

$$+\int f_2f_{N-1}\prod_{\nu=1}^{\nu=3}\delta_\nu\left(v_{N,\nu}-\frac{m_2}{m_N}v_{2,\nu}-\frac{m_{N-1}}{m_N}v_{N-1,\nu}\right)\times$$

$$\times g_{N-1,2}b_{N-1,2}\,db_{N-1,2}\,d\varepsilon\,d\mathrm{v}_2\,d\mathrm{v}_{N-1}$$

Соотношения (2.6) можно использовать в качестве исходной системы уравнений для нахождения текущих значений концентрации заряженных частиц, спектра распределения их по размерам и других параметров. Для этого необходимо, чтобы были известны функции w_j и W_j, характеризующие процесс распада молекул j-го сорта. Их нельзя определить в рамках рассматриваемой модели смеси. Для этого должны быть привлечены дополнительные соображения относительно механизма распада, что представляет собой самостоятельную задачу (например, [10]).

3. Свойство интегралов столкновений. Уравнения переноса. Соотношения (2.6) позволяют также получить макроскопические уравнения переноса для каждой из компонент смеси. В этом случае при выписывании их правых частей не возникнет необходимости в использовании (кроме величин w_j и W_j) каких-либо дополнительных функций или феноменологических выражений. Кроме того, используя свойство интегралов столкновений, можно строго записать уравнения переноса смеси в целом.

Учитывая известные свойства δ-функции [9]

$$\delta(ax)=\frac{1}{a}\delta(x),\qquad a>0;\qquad \delta(-x)=\delta(x)$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\delta(x-a)\,dx=f(a),\qquad \alpha<a<\beta$$

легко найти

$$\int f_{i+1}(t,\mathbf{r},\mathbf{v}_{i+1})\prod_{\nu=1}^{\nu=3}\delta_\nu\left(v_{i,\nu}-v_{i+1,\nu}+\frac{\omega_\nu I_{i+1}}{m_i}\right)d\mathbf{v}_{i+1}=$$

$$=f_{i+1}\left(t,\mathbf{r},\mathbf{v}_i+\frac{\omega I_{i+1}}{m_i}\right)$$

(3.1)
$$\int f_{i-1}(t,\mathbf{r},\mathbf{v}_{i-1})\prod_{\nu=1}^{\nu=3}\delta_\nu\left(v_{i,\nu}-\frac{m_2}{m_i}v_{2,\nu}-\frac{m_{i-1}}{m_i}v_{i-1,\nu}\right)g_{i-1,2}\,d\mathbf{v}_{i-1}=$$

$$=\frac{m_i}{m_{i-1}}f_{i-1}\left(t,\mathbf{r},\frac{m_i}{m_{i-1}}\mathbf{v}_i-\frac{m_2}{m_{i-1}}\mathbf{v}_2\right)\times$$

$$\times g_{i-1,2}\left(\frac{m_i}{m_{i-1}}\mathbf{v}_i-\frac{m_2}{m_{i-1}}\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2\right)$$

Рассмотрим величину Г, представляющую собой сумму правых частей уравнений (2.6), умноженных соответственно на некоторые функции скорости и внутренней энергии молекул i-го сорта $\psi_i(\mathbf{v}_i, u_i)$ и проинтегрированных по всем возможным скоростям $\mathbf{v}_i$. Ее можно представить в виде $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$

$$\Gamma_1=\sum_{i=1}^{i=N}\int\psi_i\,d\mathbf{v}_i\int(f_i'f_1'-f_if_1)\,g_{i1}b_{i1}\,db_{i1}\,d\varepsilon\,d\mathbf{v}_1+$$

$$+\sum_{j=1}^{j=2}\int\psi_j\,d\mathbf{v}_j\int (f_j'f_2'-f_jf_2)g_{i2}b_{i2}\,db_{i2}\,d\varepsilon\,d\mathbf{v}_2$$

$$\Gamma_2=\sum_{i=3}^{i=N-1}\int\psi_i\,d\mathbf{v}_i\left\{\frac{w_{i+1}}{4\pi}\int f_{i+1}\prod_{\nu=1}^{\nu=3}\delta_\nu\left(v_{i,\nu}-v_{i+1,\nu}+\frac{\omega_\nu I_{i+1}}{m_i}\right)\times\right. \tag{3.2}$$

$$\left.\times W_{i+1}\,dI_{i+1}\,d\mathbf{v}_{i+1}\,d\omega-\int f_if_2g_{i2}b_{i2}\,db_{i2}\,d\varepsilon\,d\mathbf{v}_2\right\}+$$

$$+\sum_{i=4}^{i=N}\int\psi_i\,d\mathbf{v}_i\left\{\int f_2f_{i-1}\prod_{\nu=1}^{\nu=3}\delta_\nu\left(v_{i,\nu}-\frac{m_2}{m_1}v_{2,\nu}-\frac{m_{i-1}}{m_i}v_{i-1,\nu}\right)\times\right.$$

$$\left.\times g_{i-1,2}\,b_{2,i-1}\,db_{2,i-1}\,d\varepsilon\,d\mathbf{v}_2\,d\mathbf{v}_{i-1}-w_if_i\right\}+$$

$$+\int\psi_2\,d\mathbf{v}_2\sum_{j=3}^{j=N-1}\left\{\frac{w_{j+1}}{4\pi}\int f_{j+1}\prod_{\nu=1}^{\nu=3}\delta_\nu\left(v_{2,\nu}-v_{j+1,\nu}-\frac{\omega_\nu I_{j+1}}{m_2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times W_{j+1}\,dI_{j+1}\,d\mathbf{v}_{j+1}\,d\omega-\int f_2f_jg_{2j}b_{2j}\,db_{2j}\,d\varepsilon\,d\mathbf{v}_j\right\}$$

Здесь член Γ_1 соответствует упругим столкновениям, а Γ_2 — столкновениям, при которых имеют место реакции (1.1).

Используя равенство

$$\int\psi_{i+1}w_{i+1}f_{i+1}\,d\mathbf{v}_{i+1}=\int\psi_{i+1}w_{i+1}f_{i+1}W_{i+1}\,d\mathbf{v}_{i+1}\,dI_{i+1}\frac{d\omega}{4\pi}$$

и соотношения (3.1), заменяя во втором слагаемом выражения (3.2) для Γ_2 индекс i на $i+1$, а в третьем — j на i и изменяя соответственно пределы суммирования, имея также в виду, что $g_{ij}=g_{ji}$ и полагая, что $\int b_{ij}\,db_{ij}=\int b_{ji}\,db_{ji}$, получаем

$$\Gamma_2=\sum_{i=3}^{i=N-1}\int\left\{\psi_{i+1}\left(\frac{m_2}{m_{i+1}}\mathbf{v}_2+\frac{m_i}{m_{i+1}}\mathbf{v}_i,u_{i+1}\right)-\psi_i(\mathbf{v}_i,u_i)-\right. \tag{3.3}$$

$$\left.-\psi_2(\mathbf{v}_2,u_2)\right\}f_2f_ig_{i,2}\,d\mathbf{v}_2\,d\mathbf{v}_i\,b_{i,2}\,db_{i,2}\,d\varepsilon+$$

$$+\sum_{i=3}^{i=N-1}\int\left\{\psi_i\left(\mathbf{v}_{i+1}-\frac{\omega I_{i+1}}{m_i,u_i}\right)+\psi_2\left(\mathbf{v}_{i+1}+\frac{\omega I_{i+1}}{m_2,u_2}\right)-\right.$$

$$\left.-\psi_{i+1}(\mathbf{v}_{i+1},u_{i+1})\right\}w_{i+1}f_{i+1}W_{i+1}\,d\mathbf{v}_{i+1}\,dI_{i+1}\frac{d\omega}{4\pi}$$

Из соотношений (1.9), (1.10) и (3.3) следует, что при

$$\psi_i=\left(m_i;\ m_i\mathbf{V}_i;\ \frac{1}{2}m_iV_i^2+u_i\right)$$

$$\mathbf{V}_i=\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_0,\qquad \mathbf{v}_0=\sum_{i=1}^{i=N} n_i m_i \langle \mathbf{v}_i \rangle \Big/ \sum_{i=1}^{i=N} n_i m_i$$

в силу законов сохранения массы, импульса и энергии при столкновении молекул имеет место тождество $\Gamma_2=0$. Справедливость тождества $\Gamma_1=0$ (упругие столкновения) следует из работы [4]. Таким образом

$$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2\equiv 0 \tag{3.4}$$

Уравнения сохранения массы, импульса и энергии для молекул i-го сорта можно получить из общего уравнения переноса для произвольной функции $\psi_i(\mathbf{v}_i, u_i)$ Энскога [11]. Проделывая эту операцию для случая $\mathbf{X}_i=\mathbf{X}_i(\mathbf{r}, t)$, находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_i+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\rho_i(\mathbf{v}_0+\langle \mathbf{V}_i\rangle)=k_i^m \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_i\langle \mathbf{V}_i\rangle+\rho_i\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_0+(\mathbf{v}_0+\langle \mathbf{V}_i\rangle)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v}_0-\frac{1}{m_i}\mathbf{X}_i\right]+ \tag{3.6}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{P}_i+\rho_i\mathbf{v}_0\langle \mathbf{V}_i\rangle)=k_i^i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_i U_i+\rho_i\langle \mathbf{V}_i\rangle\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_0+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\rho_i U_i\mathbf{v}_0+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{q}_i+\mathbf{P}_i:\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v}_0+ \tag{3.7}$$

$$+\rho_i\mathbf{v}_0\left[\langle \mathbf{V}_i\rangle\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v}_0+\langle \mathbf{V}_i\rangle\times\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\times\mathbf{v}_0\right)\right]-n_i\mathbf{X}_i\langle \mathbf{V}_i\rangle=k_i^e$$

Здесь $\mathbf{P}_i=\rho_i\langle \mathbf{V}_i\mathbf{V}_i\rangle$ – тензор давления; $\rho_i U_i=\rho_i\langle V_i^2\rangle/2+n_i u_i$; $\mathbf{q}_i=$ $=\rho_i\langle V_i^2\mathbf{V}_i\rangle/2+n_i u_i\langle \mathbf{V}_i\rangle$ – тепловой поток; верхними индексами m, i, e обозначены значения k, соответствующие $\psi_i=m_i$, $m_i\mathbf{V}_i$, $m_iV_i^2/2+u_i$.

Согласно (2.6)

$$k_1=\sum_{j=1}^{j=2}\int \psi_1(f_1'f_j'-f_1f_j)\,g_{1j}b_{1j}\,db_{1j}\,d\varepsilon\,d\mathbf{v}_1\,d\mathbf{v}_j \tag{3.8}$$

$$k_2=\sum_{j=1}^{j=2}\int \psi_2(f_2'f_j'-f_2f_j)\,g_{2j}b_{2j}\,db_{2j}\,d\varepsilon\,d\mathbf{v}_2\,d\mathbf{v}_j+ \tag{3.9}$$

$$+\sum_{j=3}^{j=N-1}\left\{\frac{w_{j+1}}{4\pi}\int \psi_2 f_{j+1}\left(\mathbf{v}_2-\frac{\omega I_{j+1}}{m_2}\right)W_{j+1}\,dI_{j+1}\,d\omega\,d\mathbf{v}_2-\right.$$

$$\left.-\int \psi_2 f_2 f_j g_{2j}b_{2j}\,db_{2j}\,d\varepsilon\,d\mathbf{v}_2\,d\mathbf{v}_j\right\}$$

$$k_i=\int \psi_i(f_i'f_1'-f_if_1)\,g_{i1}b_{i1}\,db_{i1}\,d\varepsilon\,d\mathbf{v}_1\,d\mathbf{v}_i+ \tag{3.10}$$

$$+\frac{w_{i+1}}{4\pi}\int \psi_i f_{i+1}\left(\mathbf{v}_i+\frac{\omega I_{i+1}}{m_i}\right) W_{i+1}\, dI_{i+1}\, d\omega\, d\mathbf{v}_i +$$

$$+\int \psi_i f_2 f_{i-1}\left(\frac{m_i}{m_{i-1}}\mathbf{v}_i-\frac{m_2}{m_{i-1}}\mathbf{v}_2\right)\frac{m_i}{m_{i-1}} g_{i-1,2}\left(\frac{m_i}{m_{i-1}}\mathbf{v}_i-\right.$$

$$\left.-\frac{m_2}{m_{i-1}}\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\right) b_{2,i-1}\, db_{2,i-1}\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_2\, d\mathbf{v}_i -$$

$$-\int \psi_i f_i f_2 g_{i,2} b_{i,2}\, db_{i,2}\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_2\, d\mathbf{v}_i-\int \psi_i w_i f_i\, d\mathbf{v}_i, \quad N>i>3$$

При $i=3$ в соотношении (3.10) будут отсутствовать третье и пятое слагаемые, а при $i=N$ — второе и четвертое.

Уравнения сохранения для смеси можно получить почленным сложением уравнений (3.5)—(3.7), имея в виду тождество (3.4) и равенство $\sum_{i=1}^{i=N}\rho\langle\mathbf{V}_i\rangle=0$, а также полагая $\mathbf{P}=\sum_i \mathbf{P}_i$, $\rho U=\sum_i \rho_i U_i$, $\mathbf{q}=\sum_i \mathbf{q}_i$. Они запишутся в общеизвестной форме [4]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\rho\mathbf{v}_0=0$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_0\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{r}}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{P}-\sum_{i=1}^{i=N} n_i\mathbf{X}_i=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho U+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\rho U\mathbf{v}_0+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{q}+\mathbf{P}:\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v}_0-\sum_{i=1}^{i=N} n_i\mathbf{X}_i\langle\mathbf{V}_i\rangle=0$$

Соотношения (3.5)—(3.7), а также уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_e+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{j}=0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{D}=\rho_e, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\times\mathbf{E}=0, \quad \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\rho_e=e\sum_{i=3}^{i=N} n_i, \quad \mathbf{j}=e\sum_{i=3}^{i=N} n_i\langle\mathbf{v}_i\rangle$$

которые следуют из уравнений электродинамики Максвелла при малости действующих магнитных сил по сравнению с электрическими, и исключения из рассмотрения высокочастотных процессов [3] образуют замкнутую систему уравнений, если известны величины $\langle\mathbf{v}_i\rangle$, $\langle\mathbf{V}_i\rangle$, $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{q}_i$, k_i. Перечисленные величины могут быть определены путем решения уравнений Больцмана для f_i.

Поступила 8 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е.* Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
2. *Рыков В. А.* О кинетических уравнениях химически реагирующих газовых смесей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.

3. *Нагель Ю. А.* Плоское одномерное стационарное течение идеального заряженного газа в собственном электрическом поле. ПМТФ, 1971, № 1.
4. *Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
5. *Силин В. П.* Введение в кинетическую теорию газов. М., «Наука», 1971.
6. *Каминский М.* Атомные и ионные столкновения на поверхности металла. М., «Мир», 1967.
7. *Френкель Я. И.* Кинетическая теория жидкостей. М.– Л., Изд-во АН СССР, 1945.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М., «Наука», 1973.
9. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. М., «Наука», 1968.
10. *Блох А. Г., Базаров С. М., Варварин С. В.* Размер зародышей конденсации и рост капель в перенасыщенном паре. Инж.-физ. ж., 1970, т. 19, № 5.
11. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М., «Мир», 1976.