

О ДВИЖЕНИИ КЛИНА С ПЕРЕМЕННОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ В ПОКОЯЩЕМСЯ ГАЗЕ

Б. М. БУЛАХ

(Ленинград)

Рассмотрено влияние ускорения клина, движущегося с переменной сверхзвуковой скоростью в покоящемся однородном невязком газе, на поле давления и другие параметры. Дана оценка погрешности полученных формул, показывающая их высокую точность в широком диапазоне значений ускорения клина и производной ускорения по времени.

Решение задачи о движении клина (конуса) с постоянной сверхзвуковой скоростью в покоящемся газе хорошо известны. Если скорость движения тела зависит от времени t , то как постановка задачи, так и ее решение численными методами значительно усложняется (см., например, [1]). Представляет интерес получение приближенных аналитических решений нестационарной задачи, которая ранее изучалась либо в линейном приближении, [2], либо в приближении гиперзвуковой теории (например, [3]).

В данной работе задача о движении клина с произвольной сверхзвуковой скоростью в невязком покоящемся газе рассматривается при условии, что поток за головной ударной волной сверхзвуковой (звуковой) по отношению к клину. Переход к системе отсчета Oxy , связанной с телом, и использование в качестве независимой переменной вместо времени t числа Маха движения тела M_e приводит к уравнениям, в которых после перехода к безразмерной форме появляется малая величина $\varepsilon = \varepsilon(M_e) = LW_e U_e^{-2}$ (L — характерный размер тела; U_e, W_e — скорость и ускорение тела по отношению к покоящемуся газу), которая является множителем при производных искомого функциях по M_e . Вследствие этого искомые газодинамические параметры в случае $W_e = \text{const}$ могут быть представлены в виде асимптотического ряда по степеням ε :

$$f(x, y, M_e) = f_0(M_e) + \sum_n f_n(x, y, M_e) [\varepsilon(M_e)]^n$$

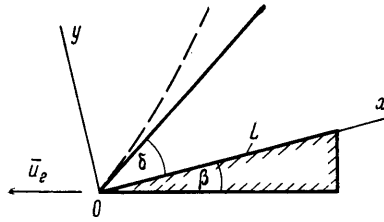
где f_0 — величина f при стационарном движении клина с числом Маха M_e , а $|f_n| < \text{const}$. В работе в замкнутой форме получены функции $f_1(x, y, M_e)$ (ввиду громоздкости формул выписаны только выражения для давления), т.е. значения f определены с ошибкой $O(\varepsilon^2)$. В случае $W_e = W_e(t)$ дана оценка погрешности результата, показывающая его высокую точность и для «больших» значений dW_e/dt и W_e .

1. Рассмотрим клин, движущийся со скоростью $U_e = U_e(t)$ в покоящемся однородном невязком газе, в котором скорость звука равна a_e , плотность — ρ_e , удельная энтропия — S_e , давление — p_e . Одна щека клина направлена по скорости его движения, а другая, имеющая длину L , составляет с ней угол β (фигура). Предполагается, что $M_e = U_e a_e^{-1} > 1$ и что при стационарном обтекании клина однородным потоком газа с числом Маха $M_e(t)$, где значение t фиксированно, поток за плоской головной ударной волной, составляющей угол δ с осью x (фигура), будет сверхзвуковым (звуковым). Уравнения неразрывности, Эйлера, энергии для движения газа относительно системы отсчета Oxy , связанной с клином, имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u\rho) + \frac{\partial}{\partial y} (v\rho) = 0$$

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + W_e \cos \beta \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - W_e \sin \beta \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь ρ , p , S — плотность, давление, удельная энтропия газа, который предполагается совершенным и имеющим адиабатический индекс γ ; u , v — проекции скорости на оси x , y .



Перейдем в системе уравнений (1.1) к безразмерным переменным по формулам

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u &= U_e u^\circ, \quad v = U_e v^\circ, \quad \rho = \rho_e \rho^\circ, \quad p = \rho_e U_e^2 p^\circ \\ S &= S_e S^\circ, \quad x = L x^\circ, \quad y = L y^\circ \end{aligned}$$

Здесь f° — обозначает безразмерную величину.

2. Вместо времени t в качестве независимой переменной введем число Маха движения клина $M_e = M_e(t)$, что позволяет оценить производные искомых функций по t . В результате из (1.1) получим систему уравнений

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon \left(M_e \frac{\partial \rho^\circ}{\partial M_e} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\circ} (\rho^\circ u^\circ) + \frac{\partial}{\partial y^\circ} (\rho^\circ v^\circ) &= 0 \\ \varepsilon \left[\frac{\partial (M_e u^\circ)}{\partial M_e} - \cos \beta \right] + u^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial x^\circ} + v^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial y^\circ} &= -\frac{1}{\rho^\circ} \frac{\partial p^\circ}{\partial x^\circ} \\ \varepsilon \left[\frac{\partial (M_e v^\circ)}{\partial M_e} + \sin \beta \right] + u^\circ \frac{\partial v^\circ}{\partial x^\circ} + v^\circ \frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} &= -\frac{1}{\rho^\circ} \frac{\partial p^\circ}{\partial y^\circ} \\ \varepsilon \left(M_e \frac{\partial S^\circ}{\partial M_e} \right) + u^\circ \frac{\partial S^\circ}{\partial x^\circ} + v^\circ \frac{\partial S^\circ}{\partial y^\circ} &= 0 \\ \varepsilon = L W_e U_e^{-2} = \varepsilon(M_e), \quad S^\circ = \ln p^\circ - \gamma \ln \rho^\circ \end{aligned}$$

Условие безотрывного обтекания клина есть

$$(2.2) \quad v^\circ = 0, \quad y^\circ = 0$$

Условия совместимости на головной ударной волне (обозначенной на фигуре штриховой линией) имеют вид

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \rho_- \theta_- V_{n+} &= p_+ - p_-, \quad V_{\tau+} = 0 \\ \rho_- \theta_- &= \rho_+ \theta_+ \\ \rho_- \theta_- \frac{V_{n+}^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} (p_+ \theta_+ - p_- \theta_-) &= p_+ V_{n+} \end{aligned}$$

Индексами «минус» и «плюс» отмечены величины до и после скачка уплотнения; V_n, V_τ — проекции скорости частиц газа на нормаль и касательную к ударной волне в системе отсчета, связанной с покоящимся газом; θ — скорость распространения ударной волны по частицам газа (см. [4] или [5]). Величины V_n, V_τ, θ вычисляются путем представления движения частиц газа и ударной волны как составных движений, причем за абсолютную систему отсчета принимается система, связанная с покоящимся газом, а за подвижную — система Oxy .

3. При обычных условиях полета тел в атмосфере Земли ε является малой величиной. Например, при $L=10$ м, $U_e=330$ м/сек, $W_e=100$ м/сек², $\varepsilon \approx 10^{-2}$. Кроме того, при $W_e = \text{const}$

$$(3.1) \quad M_e d\varepsilon/dM_e = -2\varepsilon$$

Начальные условия в рассматриваемой задаче несущественны. Из сказанного следует, что решение задачи о движении клина в случае $W_e = \text{const}$ можно искать в виде асимптотического ряда по степеням ε :

$$(3.2) \quad f^\circ(x^\circ, y^\circ, M_e) = f^\circ(M_e) + \sum_n [\varepsilon(M_e)]^n f_n^\circ(x^\circ, y^\circ, M_e)$$

Здесь $f^\circ = u^\circ, v^\circ, p^\circ, \rho^\circ, S^\circ$; $f_0^\circ(M_e)$ — значение f при стационарном движении клина с числом Маха, равным M_e .

Уравнение головной ударной волны также ищется в виде

$$(3.3) \quad y^\circ = y_0^\circ(x^\circ, M_e) = \text{tg } \delta x^\circ + \sum_n \varepsilon^n \Psi_n(x^\circ, M_e)$$

Подставляя разложения (3.2), (3.3) в уравнения (2.1) и граничные условия (2.2), (2.3), с учетом (3.1) приравнивая в этих выражениях нулю суммы членов с одинаковыми степенями ε , получим уравнения и краевые условия для функций $f_n^\circ(x^\circ, y^\circ, M_e)$. Ввиду малости ε ограничимся нахождением функций $f_1^\circ(x^\circ, y^\circ, M_e)$, для которых уравнения и краевые условия имеют вид

$$(3.4) \quad \begin{aligned} M_e \frac{d\rho_0^\circ}{dM_e} + \frac{\partial}{\partial x^\circ} (\rho_0^\circ u_1^\circ + \rho_1^\circ u_0^\circ) + \rho_0^\circ \frac{\partial v_1^\circ}{\partial y^\circ} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^\circ} \left(u_0^\circ u_1^\circ + \frac{1}{\rho_0^\circ} p_1^\circ \right) &= \cos \beta - \frac{d}{dM_e} (M_e u_0^\circ) \\ u_0^\circ \frac{\partial v_1^\circ}{\partial x^\circ} - \frac{1}{\rho_0^\circ} \frac{\partial p_1^\circ}{\partial y^\circ} - \sin \beta, \quad M_e \frac{dS_0^\circ}{dM_e} + u_0^\circ \frac{\partial S_1^\circ}{\partial x^\circ} &= 0 \end{aligned}$$

$$S_1^\circ = p_1^\circ (p_0^\circ)^{-1} - \gamma \rho_1^\circ (\rho_0^\circ)^{-1}, \quad S_0^\circ = \ln p_0^\circ - \gamma \ln \rho_0^\circ$$

$$u_0^\circ = \frac{\cos(\delta + \beta)}{\cos \delta}, \quad \rho_0^\circ = \text{ctg } \delta \text{ tg }(\delta + \beta)$$

$$p_0^\circ = \frac{1}{\gamma M_0^2} + \frac{\sin \beta \sin(\delta + \beta)}{\cos \delta}$$

$$M_e^2 = \frac{\cos \delta}{\sin(\delta + \beta)} \left[\sin \delta \cos(\delta + \beta) - \frac{\gamma - 1}{2} \sin \beta \right]^{-1}$$

При $y^\circ = \text{tg } \delta x^\circ$ должны выполняться условия

$$u_1^\circ \cos \delta + v_1^\circ \sin \delta = \cos \delta \sin \delta \frac{d\Psi_1}{dx^\circ}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin(\delta + \beta)} N + u_1^\circ \sin \delta - v_1^\circ \cos \delta + \rho_1^\circ \text{tg}^2 \delta \frac{\cos^2(\delta + \beta)}{\sin(\delta + \beta)} = 0$$

$$\begin{aligned}
 p_1^\circ &= \sin(\delta + \beta) (v_1^\circ \cos \delta - u_1^\circ \sin \delta) + \sin \beta N \\
 (3.5) \quad p_1^\circ &[\sin \delta \cos(\delta + \beta) - (\gamma - 1) \sin \beta] - \\
 &- (v_1^\circ \cos \delta - u_1^\circ \sin \delta) \left[\sin \beta \sin(\delta + \beta) + \frac{\cos \delta}{M_e^2} \right] + \\
 &+ \sin \beta N \left[\frac{\gamma - 1}{2} \sin \beta + \cos \delta \sin(\delta + \beta) \right] = 0 \\
 N &= \frac{M_e}{\cos^2 \delta} \frac{d\delta}{dM_e} x^\circ - \frac{d\Psi_1}{dx^\circ} \cos(\delta + \beta) \cos \delta \\
 (3.6) \quad y^\circ &= 0, v_1^\circ = 0
 \end{aligned}$$

4. В систему уравнений (3.4) величина M_e входит в качестве параметра (f_0° — известные функции M_e), и эта система легко приводится к неоднородному одномерному волновому уравнению. Общее решение системы (3.4) находится в замкнутом виде и содержит четыре произвольные функции. С учетом краевых условий (3.5), (3.6) для этих функций и производной $d\Psi_1/dx^\circ$ (см. (3.3)) определяется система пяти функциональных уравнений, которая удовлетворяется линейными функциями своих аргументов, т. е. задача сводится к решению системы пяти линейных алгебраических уравнений для коэффициентов линейных функций.

Ввиду громоздкости формул приводим результат только для давления

$$\begin{aligned}
 p_1^\circ &= p_{11}^\circ x^\circ + p_{12}^\circ y^\circ \\
 p_{11}^\circ &= \frac{\sin(\delta + \beta) \sin \beta}{\cos \delta} \left(\frac{2}{\cos \beta K} \left\{ \frac{\sin 2\delta}{2M_e^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \sin 2\beta + \right. \right. \\
 &+ \sin(\delta + \beta) \cos(\delta - \beta) + \cos(\delta + \beta) \cos \delta \left[\cos \delta \sin(\delta + \beta) - \frac{\gamma - 1}{2} \sin \beta \right] \left. \right\} - \\
 &- \left\{ \frac{\sin^2 \delta}{\sin(\delta + \beta)} + \frac{2 \sin \delta \cos(\delta + \beta) \sin^2(\delta + \beta) M_e^2}{K[\cos \delta + \gamma M_e^2 \sin \beta \sin(\delta + \beta)]} - \frac{2 \sin \delta}{\cos \delta K} \right\} \times \\
 &\times \left[\frac{\gamma + 1}{2} \sin(\delta + \beta) \sin \beta + \frac{K \cos \delta}{M_e^2} \right] + \frac{\cos \delta}{\cos(\delta + \beta)} \left\{ \sin \delta \cos(\delta + 2\beta) + \right. \\
 &+ \frac{\gamma - 1}{2} [\cos(\delta + \beta) \cos \delta \sin \beta - \sin 2\beta] - \frac{\sin 2\delta}{2M_e^2} + \frac{1}{2} \cos^2 \delta \sin(\delta + \beta) \left. \right\} \times \\
 &\times \left(\sin \delta \cos(\delta + 2\beta) \left[\frac{\cos 2\delta}{2} + m_0^2 \sin^2 \delta \right] \sin 2(\delta + \beta) - \frac{\gamma - 1}{4} \sin 2\beta \right)^{-1} \\
 K &= 1 + M_e^2 \sin^2(\delta + \beta), p_{12}^\circ = \rho_0^\circ \sin \beta \\
 m_0^2 \sin^2 \delta &= \frac{1 + (\gamma - 1)/2 M_e^2 \sin^2(\delta + \beta)}{\gamma M_e^2 \sin^2(\delta + \beta) - (\gamma - 1)/2} - \sin^2 \delta
 \end{aligned}$$

Формула (4.1) имеет довольно сложный вид, поэтому выпишем асимптотические выражения для p_1° для двух случаев. При $M_e \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow 1$, $y^\circ = 0$ найдем

$$p_1^\circ \approx \sin^2 \beta (\cos \beta)^{-1} x^\circ$$

Эта формула совпадает с соответствующей формулой в работе [3], если ограничиться там членами $O(\epsilon)$. Если число Маха потока за плоской головной ударной волной при стационарном обтекании клина с числом Маха M_e равно единице, а $\beta \rightarrow 0$, то

$$y^\circ = 0, \quad p_1^\circ \approx (2\gamma + 3) \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/2} \beta^{3/2} x^\circ$$

5. Так как все функции f_i° линейно зависят от x° , y° , то формулу (3.2) можно переписать в виде

$$(5.1) \quad \begin{aligned} f^\circ(x^\circ, y^\circ, M_e) &= f_0^\circ(M_e) + f_{11}^\circ(M_e)x' + f_{12}^\circ(M_e)y' + R^\circ \\ x' &= \varepsilon x^\circ = xW_e U_e^{-2}, \quad y' = \varepsilon y^\circ = yW_e U_e^{-2} \end{aligned}$$

Здесь R° — остаток.

Рассмотрим теперь случай $W_e = W_e(t)$ и оценим R° в выражении (5.1) (при $W_e = \text{const}$, $R^\circ = O(\varepsilon^2)$). Перейдем в системе уравнений (2.2) и граничных условиях (2.3), (2.4) к независимым переменным x' , y' , M_e (см. (5.1)) и представим уравнение головной ударной волны в виде

$$(5.2) \quad y' = y_s'(x', M_e) = \text{tg } \delta x' + k_2(M_e)x'^2 + k_3(M_e)x'^3 + O(x'^4)$$

Подставляя выражения (5.1), (5.2) в преобразованные уравнения, получим

$$(5.3) \quad \begin{aligned} R^\circ &= O[(x'^2 + |x'y'| + y'^2)\Phi(M_e)] \\ \Phi(M_e) &= \frac{M_e}{W_e} \frac{dW_e}{dM_e} - 2 = \frac{U_e}{W_e^2} \frac{dW_e}{dt} - 2 \end{aligned}$$

Для клина с длиной щеки L найдем при $y^\circ = 0$, что

$$(5.4) \quad R^\circ = O\left(\frac{L^2}{U_e^3} \frac{dW_e}{dt}\right) + O\left(\frac{L^2 W_e^2}{U_e^4}\right)$$

Отсюда следует, что $|R^\circ| \ll 1$ и для «больших» значений dW_e/dt и W_e .

Отметим, что коэффициенты при квадратичных членах в R° в (5.3) при необходимости могут быть вычислены.

6. Для случая осесимметричного движения кругового конуса с углом полураствора β аналогом формулы (5.1) служит формула (6.1)

$$(6.1) \quad f^\circ(\varphi, r^\circ, M_e) = f_0^\circ(\varphi, M_e) + r' f_{11}^\circ(\varphi, M_e) + R^\circ, \quad r' = rW_e U_e^{-2}$$

Здесь r , φ — полярный радиус и угол в сферической системе координат с началом в вершине конуса, причем угол φ отсчитывается от оси симметрии конуса.

Оценка остатка R° при $\varphi = \beta$, $r \leq L$ дается формулой (5.4). Отметим, что производные по φ от S , ρ скорости частиц газа вблизи вершины конуса ведут себя как $(\varphi - \beta)^{-1/2}$ при $\varphi \rightarrow \beta$.

Поступила 24 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Русанов В. В., Шаракшанэ А. А. Нестационарные модели обтекания конических тел. М., 1978 (Ин-т прикл. матем. АН СССР, Препринт, № 27.)
2. Франкль Ф. И., Карпович Е. А. Газодинамика тонких тел, ГИТТЛ. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
3. Богатко В. И. О нестационарном обтекании клина и конуса при гиперзвуковом движении. Вестн. Ленингр. ун-та Матем. мех., астр., 1974, № 7, вып. 2.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
5. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.