

НАЧАЛЬНАЯ СТАДИЯ ОТРАЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ЦИЛИНДРА, СФЕРЫ И ЭЛЛИпсоИДА ВРАЩЕНИЯ

Н. И. НОСЕНКО, Н. Н. СЫСОЕВ, Ф. В. ШУТАЕВ

(Москва)

Рассматривается стадия регулярного отражения плоской ударной волны от затупленного тела (цилиндра, сферы и эллипсоида вращения). В точке пересечения отраженной ударной волны с поверхностью тела найдены аналитические выражения для производной от числа Маха волны по времени, кривизны волны, производных по нормали от плотности и давления, производной от числа Маха вдоль фронта волны. Показано, что течение имеет особенность при $\alpha = \alpha_* < \alpha_{**}$ (α_{**} — предельный угол [1] регулярного отражения ударной волны от твердой поверхности). Найдено распределение параметров в области между отраженной ударной волной и поверхностью тела с точностью до членов третьего порядка по времени. Экспериментально измерено распределение плотности за отраженной ударной волной, а также форма отраженной волны в различные моменты времени.

Отражение плоской ударной волны от затупленных тел экспериментально исследовалось в [2-4]. В [4, 5] предложены полуэмпирические формулы для движения отраженной ударной волны на оси симметрии. В [6, 7] приводятся результаты численного расчета начальной стадии отражения ударной волны от сферы.

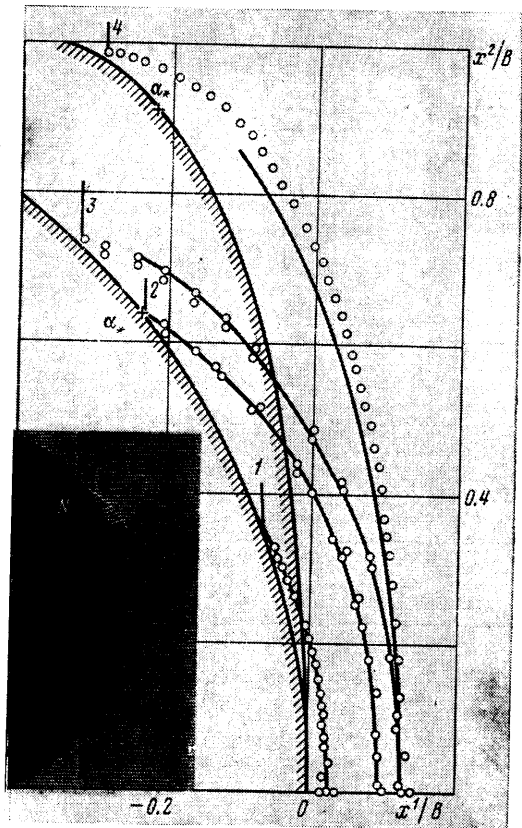
Ниже на основе условий совместности второго и третьего порядков [8-10] получены аналитические выражения для различных характерных величин потока за ударной волной, отраженной от затупленного тела. Использовано разложение в ряд по t (где t — время) с точностью до малых третьего порядка в окрестности точки пересечения отраженной волны с поверхностью тела. Ранее аналогичный прием был применен в [11] для точки, расположенной на оси симметрии течения.

1. Пусть плоская ударная волна, движущаяся со скоростью G_∞ в совершенном газе ($\gamma = c_p/c_v = \text{const}$), отражается от эллипсоида вращения с отношением полуосей $B/A = m$. Поместим начало координат в точку торможения O тела (фиг. 1). Ось x^i совпадает с осью симметрии течения. Будем отсчитывать время от момента прихода волны в точку O .

Определим течение в окрестности точки N пересечения ударной волны с поверхностью тела. Координаты отраженной волны равны

$$\begin{aligned}
 X^i &= x_0^i + v^i \Delta t + \Delta a^i, \quad \Delta t = t - t_0, \quad t_0 = -x_0^i / G_\infty \\
 (1.1) \quad \Delta a^i &= G(\alpha, t_0) v^i(\alpha, t_0) \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \left\{ \frac{dG}{dt}(\alpha, t_0) v^i(\alpha, t_0) + \right. \\
 &\quad \left. + G(\alpha, t_0) \frac{dv^i}{dt}(\alpha, t_0) \right\} + \dots \\
 \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + G \frac{\partial}{\partial v} \quad \frac{\partial}{\partial v} = v^i \frac{\partial}{\partial a^i}
 \end{aligned}$$

Здесь a^i — лагранжевы переменные, v^i — компоненты внешней единичной нормали к поверхности отраженной волны, G — скорость отраженной ударной волны относительно газа перед волной, v^i — компоненты скорости газа за падающей волной ($v^1 = -v$, $v^2 = v^3 = 0$), x_0^i — координаты точки N ,



Фиг. 1

α — угол падения волны. Используя выражение [8] для dv^i/dt , получим из (1.1) значение средней кривизны H отраженной ударной волны в точке N

$$H = -\frac{\sqrt{e}}{2Bm} \left\{ \left(\frac{e}{D} + 1 \right) \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{DG_\infty} \left(2e \frac{dG_0}{d\alpha} - \frac{Bm \sin \alpha}{G_\infty \sqrt{e}} \frac{dG}{dt} \right) \right\}$$

(1.2)

$$e = \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha, \quad D = 1 + \sin^2 \alpha \{ (v^2 - G^2) / G_\infty^2 - 2v / G_\infty \}$$

$$G_0(\alpha) = G(\alpha, t_0)$$

Здесь β — угол отражения.

Пусть частица газа в момент времени t находилась на фронте отраженной ударной волны. Координаты частицы в момент $t + \Delta t$ равны

$$x_2^i(a^1, a^2, a^3, t + \Delta t) = x_1^i(a^1, a^2, a^3, t + \Delta t) + \\ + \Delta t \left[\frac{\partial x^i}{\partial t} \right] + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} \right] + \frac{\Delta t^3}{6} \left[\frac{\partial^3 x^i}{\partial t^3} \right] + \dots$$

$$[z] = z_2 - z_1$$

Индексы 1 и 2 относятся к состоянию перед волной и за волной соот-

ветственно. Выражения для величин в квадратных скобках определяются из кинематических условий совместности.

Для частицы газа на поверхности тела имеем

$$\begin{aligned}
 x_2^i &= x_0^i + c_1 \Delta t \left\{ \frac{v^i}{c_1} + \frac{2(M^2-1)}{(\gamma+1)M} v^i \right\} - c_1^2 \Delta t^2 \left(\frac{1}{2\rho_1 c_1^2} \frac{\partial p_2}{\partial v} v_i + \right. \\
 &+ B_1 g^{\lambda\mu} \frac{\partial x_1^i}{\partial u^\lambda} \frac{\partial M}{\partial u^\mu} \left. \right) + \frac{c_1^3 \Delta t^3}{6} \left(B_2 v_i + g^{\lambda\mu} \frac{\partial x_1^i}{\partial u^\lambda} E_\mu \right) \\
 (1.3) \quad B_1 &= 2M^{-1} f (\gamma+1)^{-2}, \quad f = (\gamma-1)M^2 + 2 \\
 B_2 &= -\frac{1}{\rho_1 c_1^3} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_2}{\partial v} + \frac{M}{\rho_1 c_1^2} \frac{\partial^2 p_2}{\partial v \partial v} + 2HM(1-\varepsilon) \frac{1}{\rho_1 c_1^2} \frac{\partial p_2}{\partial v} - \\
 &- \frac{4\{(\gamma^2+7)M^2 - 2(\gamma+5)\}}{(\gamma+1)^3 M} g^{\lambda\mu} \frac{\partial M}{\partial u^\lambda} \frac{\partial M}{\partial u^\mu} \\
 \varepsilon &= \rho_1 / \rho_2, \quad M = G/c_1 \\
 E_\mu &= -\frac{1}{c_1^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial u^\mu} \right) + \frac{\lambda}{\rho_1 c_1^2} \frac{\partial p_2}{\partial v} \frac{\partial M}{\partial u^\mu} - \frac{M}{\rho_2^2 c_2^2} \frac{\partial p_2}{\partial u^\mu} \frac{\partial \rho_2}{\partial v} - \\
 &- \frac{M}{\rho_1 c_1^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u^\mu} \frac{\partial p_2}{\partial v} + \frac{\varepsilon M}{\rho_1 c_1^2} \frac{\partial}{\partial u^\mu} \left(\frac{\partial p_2}{\partial v} \right) - \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{\rho_1 c_1^2} M g^{\kappa\tau} b_{\mu\kappa} \frac{\partial p_2}{\partial u^\tau}
 \end{aligned}$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, c — скорость звука, $g^{\lambda\mu}$ — компоненты метрического тензора поверхности фронта волны, u^1, u^2 — внутренние координаты поверхности фронта волны, $b_{\mu\kappa}$ — коэффициенты второй квадратичной формы на фронте волны. Входящие в (1.3) производные по нормали от давления и плотности определяются из граничных условий на поверхности тела. В частности, граничное условие поверхности сферы можно записать в виде (R — радиус сферы)

$$(x_2^1 + R)^2 + (x_2^2)^2 = R^2, \quad x_2^3 = 0$$

или

$$L_1 \Delta t + L_2 \Delta t^2 + L_3 \Delta t^3 + \dots = 0$$

Приравнявая нулю величину L_2 , учитывая (1.2) и значение производной от числа Маха вдоль луча [9, 10] $\frac{dM}{dt} = c_1 \Phi \left(M, \gamma, p_1^{-1} \frac{\partial p_2}{\partial v}, H \right)$, найдем выражение для dM/dt в точке N :

$$\begin{aligned}
 (1.4) \quad \frac{Bm}{c_1} \frac{dM}{dt} &= -\sqrt{e} (M^2-1) \left\{ F_1 - \frac{c_1}{G_\infty} \frac{M^2-1}{\sqrt{D}} \sin \alpha (F_2 + 2M \operatorname{tg} \beta) \right\}^{-1} \times \\
 &\times \left\{ \frac{2(M^2-1)^2}{f \cos^2 \alpha \cos \beta} [\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha+\beta) + (m^2-1) \times \right. \\
 &\times (\cos \alpha \cos(\alpha+\beta) - \cos \beta)^2] + \frac{h}{\gamma+1} \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha} \left(\frac{m^2 - (m^2-1) \cos^2 \alpha}{D} + 1 \right) + \\
 &\left. + \frac{2e}{\sqrt{D}} \frac{dM_0}{d\alpha} (M \operatorname{tg} \beta + F_2) \right\}
 \end{aligned}$$

$$F_1 = f^{-1} \{ 2(2\gamma-1)M^4 + (\gamma+5)M^2 - \gamma + 1 \}, \quad F_2 = \frac{h}{\gamma+1} \frac{c_1}{G_\infty} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{D}}, \quad h = 2\gamma M^2 - \gamma + 1$$

Производная по нормали от давления за волной записывается так:

$$(1.5) \quad \frac{A}{p_1} \frac{\partial p_2}{\partial n} =$$

$$= \frac{4\gamma M \sqrt{e}}{(\gamma+1) f k_1} \left\{ \frac{(M^2-1)^2}{M} \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha+\beta)}{\cos^2 \alpha} + A k_2 \frac{\partial M}{\partial l} \right\}$$

$$k_1 = \cos \beta + (m^2-1) \sin \alpha \sin(\alpha+\beta),$$

$$k_2 = \sin \beta - (m^2-1) \sin \alpha \cos(\alpha+\beta)$$

$$\frac{\partial M}{\partial l} = \left(e^{3/2} \frac{dM_0}{d\alpha} - \frac{1}{G_\infty} \frac{dM}{dt} B m \sin \alpha \right) / (B m D^{1/2})$$

$$\partial/\partial n = n^i \partial/\partial x^i$$

где n^i — проекции единичной нормали в эйлеровых переменных, $\partial M/\partial l$ — производная числа Маха вдоль фронта волны. Значение производной по нормали от плотности за волной можно найти из выражения

$$(1.6) \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial n} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial p_2}{\partial n} - \frac{4(\gamma^2-1)(M^2-1)^2 \rho_1}{f^2 h c_1} \frac{dM}{dt}$$

Аналогичным способом определяются производные $d^2 M/dt^2$, $\partial^2 \rho_2/\partial n \partial v$, $d/dt(\partial \rho_2/\partial v)$, $\partial^2 p_2/\partial v \partial v$, $d/dt(\partial p_2/\partial v)$. Знание этих величин позволяет найти распределение параметров потока за отраженной ударной волной. Если рассматривается падение плоской ударной волны на цилиндр, то изменится только выражение для средней кривизны волны.

Значения dM/dt и H при $\alpha=0$ и $t=0$ для волны, отраженной от сферы, содержатся в [5].

Отметим один интересный факт. В выражение (1.4) входит величина $dM_0/d\alpha$, неограниченно возрастающая при $\alpha \rightarrow \alpha_{**}$. Однако на самом деле величина dM/dt , как и все остальные производные и H , обращается в бесконечность при меньшем значении угла, а именно при $\alpha = \alpha_* < \alpha_{**}$, вследствие того что становится равным нулю выражение

$$F_1 - \frac{c_1}{G_\infty} \frac{M^2-1}{\sqrt{D}} \sin \alpha (F_2 + 2M \operatorname{tg} \beta)$$

Ниже приводятся в градусах значения α_* и α_{**} при различных числах M_∞ ($\gamma=1.4$):

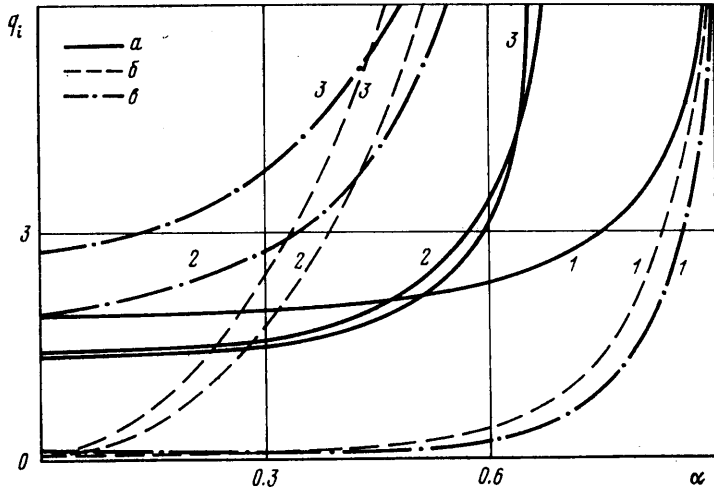
M_∞	1.2	1.6	2.0	2.8	3.6	4.0	5.2
α_*	46.580	40.409	39.408	39.261	39.417	39.490	39.652
α_{**}	46.468	40.363	39.381	39.246	39.406	39.480	39.643

Величина α_* больше α_0 , исключая числа Маха M_∞ , близкие к 1.47 (α_0 — угол, при котором становится возможным [1] маховое отражение).

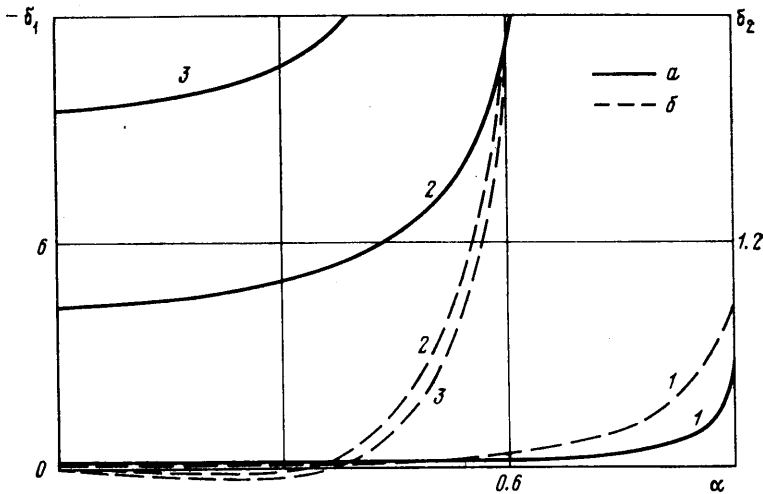
По вышеприведенным формулам были произведены расчеты различных величин, характеризующих поток, и найдено поле течения в области за отраженной волной. Данные на фиг. 2–4 относятся к отражению ударной волны от сферы ($\gamma=1.4$). На фиг. 2 нанесены значения $q_1 = -HR$ (линии a), $q_3 = (R/\rho_1) \partial \rho_2/\partial n$ (линии e), $q_2 = (R/p_1) \partial p_2/\partial n$ (линии b). Цифры 1–3 относятся к значениям числа M_∞ , равным 1.1, 4, 8. Производные давления и плотности по нормали положительны и возрастают с увеличением угла α , как и абсолютная величина кривизны H . Значения производных от числа Маха отраженной волны $\delta_1 = (R/c_\infty) dM/dt$ (линии a) и $\delta_2 = -R \partial M/\partial l$ (линии b) показаны на фиг. 3. Видно, что число Маха отражен-

ной волны возрастает при приближении к телу при больших углах α . При малых углах и $M_\infty > 3$ величина δ_2 отрицательна.

Производные вдоль луча от $\partial p_2/\partial n$ и $\partial \rho_2/\partial n$ всегда отрицательны, исключая числа M_∞ , близкие к единице. На фиг. 4 приведены линии равного давления $p_{21} = p_2/p_1 = \text{const}$ (фиг. 4, а), плотности $\rho_{21} = \rho_2/\rho_1 = \text{const}$ (4, б) и энтропийной функции $\sigma = p_{21}\rho_{21}^{-\gamma} = \text{const}$ (4, в) при $M_\infty = 2$ и $\tau = R^{-1}t_\infty = 0.065063$. Плотность всюду возрастает в направлении от тела к волне. Возрастание плотности от тела к волне на оси симметрии отмечено в [12].



Фиг. 2



Фиг. 3

В области $0 < \alpha < \alpha_*$ имеется минимум давления и плотности. Сравнение приведенных данных с результатами работы [7] показывает, что они практически совпадают.

2. Для экспериментальной проверки некоторых из полученных соотношений были проведены опыты в ударной трубе.

Труба имела прямоугольное сечение размером 40×61 мм². Длина камеры низкого давления — 3200 мм, высокого 1400 мм. В рабочей секции трубы помещалась модель (цилиндр диаметром $d = 20$ мм, сфера, $d = 10$ и 16 мм; эллипсоид вращения.

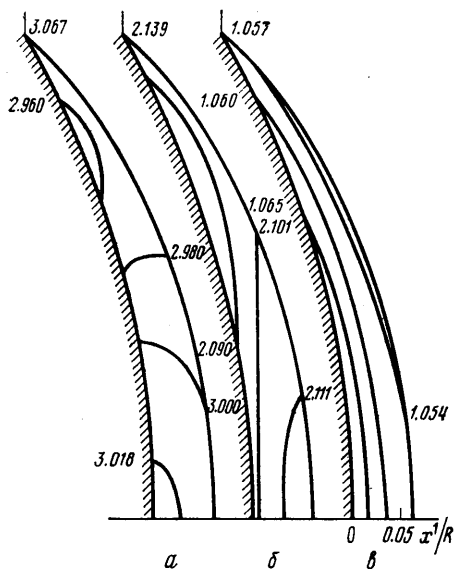
$m=2.27$, $B=15.6$ м. В качестве рабочего газа был взят азот. Числа Маха падающей волны изменялись в пределах $M_\infty=1.5-5$. Средняя скорость падающей ударной волны измерялась по сигналам с двух пьезодатчиков, установленных в рабочей секции. Непрерывная регистрация скоростей падающих и отраженных ударных волн осуществлялась теневым методом с помощью фоторегистратора ЖФР. Источником света при этом служил рубиновый ОКГ, работавший в квазистационарном режиме. Ошибка в определении скорости падающей ударной волны не превышала 2.5%.

Для измерения плотности газа применялся интерферометр Маха - Цендера. Снимки различных стадий процесса были получены с помощью импульсного рубинового ОКГ, работавшего в режиме модулированной добротности. Модуляция добротности осуществлялась электрооптическим затвором на основе кристалла KDP. Съемка проводилась прибором СФР-2М. Применяемая методика позволяла получать за один эксперимент серию кадров с регулируемым интервалом 5-15 мксек при экспозиции 50 мсек. Точность определения плотности по интерферограмме в осесимметричном случае составляет около 15%. В плоском случае (отражение от цилиндра) точность значительно выше.

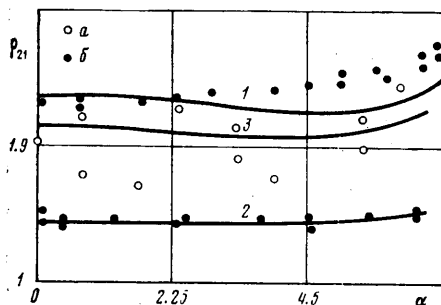
Типичный снимок дается на фиг. 1. Здесь же приведены положения отраженной от сферы и эллипсоида волны в различные моменты времени ($M_\infty=2$; точки - эксперимент, сплошные кривые - расчет).

Цифры 1-4 соответствуют значениям τ , равным 0.0298, 0.113, 0.156, 0.174. Как видно, положения волны, найденные из расчета, неплохо согласуются с экспериментальными данными. Заметим, что в окрестности оси симметрии выражение (1) справедливо для поздних моментов времени, когда угол падения волны больше α_* (кривые 3, 4 на фиг. 1).

На фиг. 5 приведено расчетное распределение плотности вдоль поверхности цилиндра (кривая 1 - $M_\infty=2.17$, $\tau=0.1035$; 2 - $M_\infty=1.3$, $\tau=0.164$) и сферы (кривая 3 - $M_\infty=2.0$, $\tau=0.1009$). Здесь же на-



Фиг. 4



Фиг. 5

несены экспериментальные значения плотности вдоль поверхности цилиндра (а) и сферы (б). Видно, что плотность вдоль поверхности тела при $\alpha \rightarrow \alpha_*$ возрастает.

При набегаии плоской ударной волны на цилиндр или сферу угол падения волны непрерывно меняется. В некоторый момент времени регулярное отражение должно смениться маховским. В литературе высказывались мнения, что этот переход может произойти [13, 14] либо при $\alpha = \alpha_{**}$, либо при $\alpha = \alpha_0$.

В случае отражения ударной волны от сферы и цилиндра при $\alpha > \alpha_*$, как было показано выше, регулярное отражение невозможно. Поэтому можно ставить вопрос о том, происходит ли переход от одного типа отражения к другому при $\alpha = \alpha_0$ или при $\alpha_0 < \alpha \leq \alpha_*$.

В зависимости от того, когда произойдет переход к маховскому отражению, распределение плотности и давления вдоль поверхности будет иметь различный характер. Если маховское отражение возникает при $\alpha = \alpha_0$, то плотность вдоль поверхности тела будет падать [7]. Если переход происходит при $\alpha = \alpha_*$, то при приближении к этой точке плотность должна возрастать. Наши данные свидетельствуют о том, что переход, по-видимому, происходит при $\alpha = \alpha_*$.

Таким образом, получены аналитические выражения для производной по времени от числа M отраженной ударной волны, распределения давления и плотности за волной вблизи точки пересечения отраженной волны с поверхностью тела и кривизны волны. Сравнение с экспериментом показывает, что эти формулы остаются справедливыми в течение всей стадии регулярного отражения. Найденное из эксперимента распределение плотности свидетельствует о том, что переход от регулярного к маховскому отражению, по-видимому, происходит при $\alpha = \alpha_*$.

Поступила 3 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
2. Bryson A. E., Gross R. W. Diffraction of strong shocks by cones, cylinders and spheres. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, pt 1.
3. Жмаева Е. А., Харитонов А. И. Формирование головного скачка около затупленных тел, помещенных в ударной трубе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.
4. Браславец В. А., Жмаева Е. А., Харитонов А. И. К вопросу об изменении плотности, давления и отхода при воздействии ударной волны на неподвижное затупленное тело. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
5. Полубояринов А. К. О движении ударного фронта, отраженного от затупленного тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.
6. Moran J. P., Van Moorhet W. K. Diffraction of a plane shock by an analytic blunt body. J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 1.
7. Грудницкий В. Г., Прохорчук Ю. А. Расчет взаимодействия ударной волны с затупленным телом. В сб.: Числ. методы мех. сплошной среды, т. 6, № 4. Новосибирск, 1975.
8. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
9. Шугаев Ф. В. О движении ударных волн в газе с переменными параметрами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 3.
10. Пискарева М. В., Шугаев Ф. В. О дифференциальных соотношениях на нестационарной ударной волне. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 5.
11. Васильев М. М. Об отражении сферической ударной волны от плоскости. В сб.: Вычисл. математика, сб. 6. М., 1960.
12. Знаменская И. А., Рязин А. П., Шугаев Ф. В. Об особенностях распределения параметров газа на начальной стадии отражения ударной волны от сферы и цилиндра. Изв. АН СССР, МЖГ, № 3, 1979.
13. Henderson L. F., Lozzi A. Experiments on transition to Mach reflection. J. Fluid Mech., 1975, vol. 68, pt 1.
14. Jahn R. G. Transition processes in shock wave interactions. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, pt 1.