

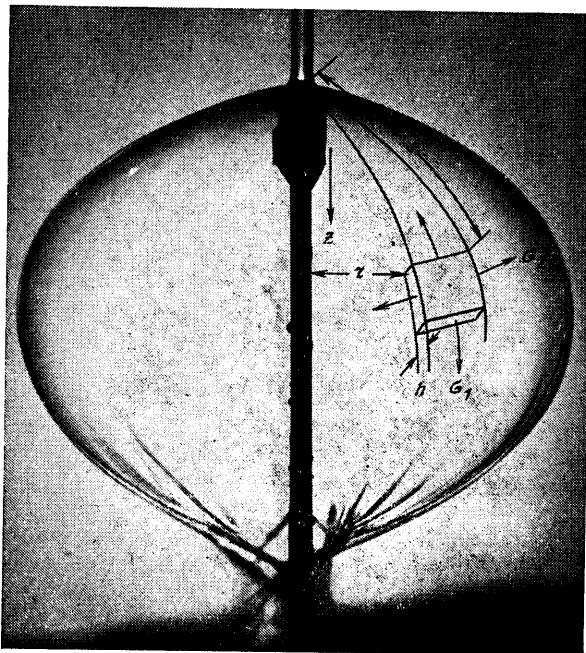
О ДИНАМИЧЕСКОЙ ФОРМЕ РАВНОВЕСИЯ ПЛЕНКИ ВЯЗКОЙ И УПРУГОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. М. ЕНТОВ, Х. С. КЕСТЕНБОЙМ, А. Н. РОЖКОВ,
Л. И. ШАРЧЕВИЧ

(Москва)

Теоретически и экспериментально исследована форма динамического равновесия осесимметричной пленки жидкости, образующейся при натекании струи на преграду. Показано, что на размеры пленки растворов полимеров заметно влияют напряжения, обусловленные упругой деформацией жидкости, и из обработки экспериментальных данных оценены значения модулей упругости растворов полиоксиэтилена (ПОЭ) и полиакриламида (ПАА).

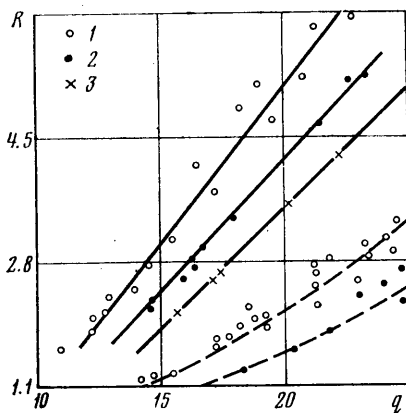
1. Источник высокоскоростных деформаций. В гидродинамике полимерных растворов в последние годы все большее внимание привлекают так называемые «интенсивные течения» («strong flows») (например, [1-3]), в которых высокоскоростное гидродинамическое растяжение элементов жидкости приводит к ориентационной вытяжке полимерных молекул с заметным изменением макрохарактеристик раствора. К числу таких течений относится и рассматриваемое ниже течение жидкости в пленке (коль-



Фиг. 1

цевой струе), образующейся при натекании струи жидкости на коническое препятствие (см. фиг. 1). Формы динамического равновесия таких пленок в случае идеальной жидкости изучены в работах [4-6]. Вязкость жидкости в работах [6, 7] учтена в приближении теории пограничного слоя.

Элементы жидкости в кольцевой струе подвергаются весьма простому типу деформации: сильному растяжению вдоль «параллелей» пленки и сжатию в направлении ее толщины при относительном сохранении размеров вдоль линии тока. Легко получить пленку радиусом 10 см из струйки радиусом 1 мм при скорости порядка нескольких метров в секунду, так



Фиг. 2

что элемент жидкости удлиняется в десятки и сотни раз за сотые доли секунды. Естественно ожидать, что если в качестве рабочей жидкости использовать упруговязкую жидкость, то упругие свойства ее должны проявиться достаточно сильно и указанный эксперимент можно использовать для исследования упругих жидкостей. При этом существенно то обстоятельство, что информацию о напряжениях в пленке можно извлечь из анализа ее формы, подобно тому, как в работе [8] натяжение в криволинейной струйке полимерного раствора было рассчитано по форме ее оси. О чувствительности формы пленки к свойствам рабочей жидкости свидетельствует фигура 2. Здесь показана зависимость максимального радиуса пленки R от расхода q жидкости в струе, набегающей на препятствие, для воды (кривая 1), 0.05%-ного раствора полиоксизетилена (2) и 0.05%-ного раствора полиакриламида (3). В качестве препятствия использовался диск ($\psi_0 = \pi/2$, сплошные кривые) и конус ($\psi_0 = \pi/4$, пунктир). Отчетливо видно заметное уменьшение радиуса кольцевой струи при переходе к полимерным растворам. Ниже показано, что это свидетельствует о наличии в исследованных разбавленных растворах значительных упругих напряжений.

2. Постановка задачи. Приведем общую систему уравнений динамического равновесия осесимметричной стационарной тонкой пленки жидкости. За основные переменные удобно принять длину дуги образующей s , угол ψ между касательной к образующей и осью симметрии z , скорость $v(s)$ вдоль пленки, продольное σ_1 и окружное σ_2 растягивающие напряжения (фиг. 1).

Проектируя уравнения баланса импульсов элемента пленки на нормаль и касательную к образующей, легко получить уравнения динамического равновесия пленки в виде

$$(2.1) \quad d(-\rho v^2 r h + \sigma_1 r h + 2\alpha r) / ds - (\sigma_2 h + 2\alpha) \sin \psi + \rho g r h \cos \psi = 0$$

$$(2.2) \quad (\rho v^2 r h - \sigma_1 r h - 2\alpha r) d\psi / ds + (\sigma_2 h + 2\alpha) \cos \psi + \rho g r h \sin \psi = 0$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, направленное вдоль оси z , α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости, h — толщина пленки, r — радиус кольцевой струи.

Эти уравнения дополняются очевидными соотношениями

$$(2.3) \quad dr/ds = \sin \psi, \quad dz/ds = \cos \psi$$

$$(2.4) \quad 2\pi r h v = q = \text{const}$$

Исключим толщину пленки из системы (2.1)–(2.4) и запишем ее в безразмерном виде, приняв в качестве масштаба длины r_0 , скорости v_0 , напряжений ρv_0^2 . Сохраняя для безразмерных величин прежние обозначения, получим

$$(2.5) \quad \frac{d}{ds} \left(-v + \frac{\sigma_1}{v} \right) - \frac{\sigma_2}{rv} \sin \psi + \frac{H}{v} \cos \psi = 0$$

$$(2.6) \quad \left(-v + \frac{\sigma_1}{v} + \frac{2r}{Q} We \right) \frac{d\psi}{ds} - \left(\frac{\sigma_2}{rv} + \frac{2We}{Q} \right) \cos \psi - \frac{H}{v} \sin \psi = 0$$

$$(2.7) \quad dr/ds = \sin \psi, \quad dz/ds = \cos \psi$$

$$We = \alpha (\rho r_0 v_0^2)^{-1}; \quad Q = \frac{1}{2\pi} q (v_0 r_0^2)^{-1}; \quad H = g r_0 v_0^{-2}$$

Постановка задачи завершается заданием краевых условий и реологических соотношений, связывающих напряжения σ_1 и σ_2 с кинематическими переменными. Имея в виду исследование пленок упруговязких жидкостей, рассмотрим вначале два предельных случая: эластичного упругого тела и вязкой жидкости. Они отвечают соответственно асимптотикам $\theta \gg \tau$ и $\theta \ll \tau$, где θ — время релаксации жидкости, а τ — время движения элемента жидкости в пленке.

3. Упругое тело. Для несжимаемого упругого тела имеется известная связь (например, [9]) между тензором напряжения σ и тензором конечных деформаций Коши — Грина B

$$(3.1) \quad \sigma + p\delta = 2[W, {}_1B - W, {}_2B^{-1}]$$

Упругий потенциал W далее берется в форме Муни — Ривлина

$$(3.2) \quad W = G[(I_1 - 3) + \gamma(I_2 - 3)], \quad \gamma \ll 1$$

Здесь I_1 и I_2 — первый и второй инварианты тензора B , G (модуль сдвига) и γ — постоянные.

Напряженно-деформированное состояние тонкой пленки является локально плоским. Главные оси $(I-3)$ тензоров σ и B направлены по меридиану, параллели и нормали к пленке, причем $\sigma_3 = 0$. Последнее обстоятельство позволяет выразить давление p через компоненты λ_1^2 , λ_2^2 и λ_3^2 тензора Коши — Грина, после чего из (3.1) находятся компоненты σ_1 и σ_2 . Величины же λ_i равны относительным удлинениям элементов материала по главным осям деформации и находятся из кинематики.

В результате имеем

$$(3.3) \quad \sigma_1 = 2S(1 + \gamma\lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2), \quad \sigma_2 = 2S(1 + \gamma\lambda_1^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2), \quad S = G/\rho v_0^2$$

$$(3.4) \quad \lambda_1 = v, \quad \lambda_2 = r/r_1, \quad \lambda_3 = r_1/(vr)$$

где $r_1 = a/r_0$ — безразмерный радиус струи, из которой формируется пленка.

Уравнения (2.5)–(2.7) с учетом (3.3) и (3.4) образуют систему дифференциальных уравнений первого порядка, которая должна быть проинтегрирована при естественных краевых условиях, соответствующих заданию скорости и угла схода пленки жидкости на кромке направляющего конуса

$$(3.5) \quad r=1, \quad \psi=\psi_0, \quad v=1, \quad z=\text{ctg } \psi_0 \quad (s=0)$$

Ниже будут приведены результаты соответствующих численных расчетов. Пока же заметим, что при достаточно естественных упрощающих допущениях можно получить аналитическое решение задачи. Рассмотрим движение, когда максимальный радиус пленки много больше радиуса на-

правляющего конуса. При этом в основной части пленки удлинение элементов материала в окружном направлении λ_2 значительно превышает относительное удлинение в продольном направлении $\lambda_1 \sim 1$. Поэтому в первом приближении можно положить

$$(3.6) \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 2S(r/r_1)^2$$

Из уравнений (2.5)–(2.6) легко получить два интеграла движения при условии, что $r \gg 1$

$$(3.7) \quad \cos \psi (v - 2r \text{We}/Q) - HT = \cos \psi_0$$

$$v^2 + 2 \int_1^r r^{-1} \sigma_2(r) dr - 2Hz = 1, \quad T = \int_0^s v^{-1} ds$$

Здесь T – безразмерное время пролета частицы в пленке до точки с координатой s .

С учетом (3.6) имеем из (3.7)

$$(3.8) \quad \frac{2r \text{We}}{Q} =$$

$$= \frac{\{\cos^2 \psi + K [\cos^2 \psi - (\cos \psi_0 + HT)^2] + (1+K) 2zH \cos^2 \psi\}^{1/2} - \cos \psi_0 - HT}{(1+K) \cos \psi}$$

$$K = \frac{SQ^2}{2 \text{We}^2 r_1^2} = \frac{\rho q^2 G}{8\pi^2 \alpha^2 a^2}$$

Оценка дает следующий порядок значений величин HT и H_z :

$$(3.9) \quad HT \sim Hz \sim \rho g q (4\alpha \nu_0)^{-1} = \kappa$$

При $\kappa \ll 1$ сила тяжести не влияет на зависимость $r(\psi)$ в окрестности точки $\psi = 0$, т. е. в области максимального радиуса $r = R$, и формула (3.8) в этом случае дает

$$(3.10) \quad \frac{2R \text{We}}{Q} = \frac{(1+K \sin^2 \psi_0)^{1/2} - \cos \psi_0}{1+K}; \quad \frac{R}{R_0} = \frac{(1+K \sin^2 \psi_0)^{1/2} - \cos \psi_0}{(1+K)(1 - \cos \psi_0)}$$

где $R_0 = Q(1 - \cos \psi_0)/(2\text{We})$ – максимальный радиус кольцевой струи идеальной жидкости ($K=0$).

Из (3.10) видно, что наличие в пленке упругих напряжений приводит к уменьшению разлета пленки ($R < R_0$) по сравнению с пленкой идеальной жидкости.

4. Вязкая жидкость. В этом случае тензор напряжений связан с тензором скоростей деформаций \mathbf{D} соотношением

$$(4.1) \quad \boldsymbol{\sigma} + p\boldsymbol{\delta} = 2\eta \mathbf{D}$$

Здесь η – вязкость, тензор \mathbf{D} имеет диагональную структуру.

Компоненты тензора \mathbf{D} выражаются через распределение скорости, давление p исключается из соотношений (4.1), так же, как в предыдущем пункте, с помощью граничных условий на поверхности пленки. В итоге находим следующие соотношения для безразмерных напряжений σ_1, σ_2 :

$$(4.2) \quad \sigma_1 = \varepsilon \left(2 \frac{dv}{ds} + \frac{v}{r} \sin \psi \right), \quad \sigma_2 = \varepsilon \left(\frac{dv}{ds} + \frac{2v}{r} \sin \psi \right); \quad \varepsilon = \frac{2\eta}{\rho \nu_0 r_0}$$

Для полной постановки задачи необходимо сформулировать граничные условия. Поскольку в систему (2.5)–(2.7) с учетом соотношений (4.2)

входит дифференциальное уравнение второго порядка для v , то для этой функции нужно задать два граничных условия: на «ближнем» и «дальнем» концах кольцевой струи. При этом возникают некоторые трудности, так как для постановки краевого условия на «дальнем» конце струи нет определенных физических предпосылок.

Если рассматривать течение достаточно маловязкой жидкости, то можно показать, что у «дальней» границы струи имеет место экспоненциальный пограничный слой с ограниченной областью влияния шириной порядка ε . Последнее обстоятельство подтверждается также опытными данными: если ниже максимального радиуса кольцевой струи расположить препятствие, то это не окажет заметного влияния на форму поверхности пленки (в частности, на величину R). Таким образом, при расчете струи маловязкой жидкости, вообще говоря, можно опустить краевое условие при $s=s_\infty$ и ограничиться воспроизведением внешнего решения системы (2.5)–(2.7) для идеальной жидкости ($\varepsilon=0$). Однако своеобразие данной задачи состоит в том, что из-за особенности при $r=0$ в решении имеется еще одна зона неравномерности, примыкающая к точке схода кольцевой струи с мишенью. В этой зоне скорость жидкости уменьшается под влиянием вязкости от начального значения до некоторой величины v_* .

Рассмотрим асимптотику уравнений (2.5)–(2.6) при малых r . Введем преобразование $\xi=s\varepsilon^{-1}$, $\zeta=r\varepsilon^{-1}$. Тогда нулевой член внутреннего разложения решения по ε будет удовлетворять следующей системе уравнений:

$$(4.3) \quad \frac{dv}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{\sin \psi}{v} \left(2 \frac{dv}{d\zeta} + \frac{v}{\zeta} \right) \right] - \frac{\sin \psi}{\zeta v} \left(\frac{dv}{d\zeta} + \frac{2v}{\zeta} \right)$$

$$(4.4) \quad d\zeta/d\xi = \sin \psi$$

$$(4.5) \quad \left[v - \frac{\sin \psi}{v} \left(2 \frac{dv}{d\zeta} + \frac{v}{\zeta} \right) \right] \frac{d\psi}{d\zeta} + \frac{\cos \psi}{\zeta v} \left(\frac{dv}{d\zeta} + \frac{2v}{\zeta} \right) = 0$$

Для малых, но конечных значений r величина ζ при $\varepsilon \rightarrow 0$ может быть сделана достаточно большой. Это соображение позволяет упростить асимптотический анализ, пренебрегая вторым слагаемым в уравнении (4.5). При этом течение в малой окрестности точки схода кольцевой струи имеет конечный характер: $\psi = \text{const} = \psi_0$. Из (4.3) при аналогичном предположении выводится уравнение для скорости v

$$(4.6) \quad v - \left(2 \frac{dv}{d\zeta} + \frac{v}{\zeta} \right) \frac{\sin \psi_0}{v} = v_* = \text{const}$$

Постоянная интегрирования v_* равна предельному значению скорости при $\zeta \rightarrow \infty$. Повторное интегрирование (4.6) приводит к соотношению

$$(4.7) \quad \frac{1}{v} = \sqrt{\frac{\zeta}{\sin \psi_0}} \exp\left(\frac{\zeta v_*}{2 \sin \psi_0}\right) \left[C - \frac{1}{2} \int_0^{\zeta/\sin \psi_0} \exp\left(-\frac{v_* t}{2}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}} \right]$$

Условие ограниченности решения на бесконечности однозначно определяет постоянную интегрирования, так что

$$(4.8) \quad C = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{v_* t}{2}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{2v_*}}$$

$$(4.9) \quad v = \left(\frac{2v_* \varepsilon \sin \psi_0}{\pi r} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{v_* r}{2\varepsilon \sin \psi_0}\right) \left[1 - \text{erf} \sqrt{\frac{rv_*}{2\varepsilon \sin \psi_0}} \right]^{-1}$$

Для малых ε выражение для v допускает простое асимптотическое представление

$$(4.10) \quad v = v_* [1 + 1/(v_* \xi) - 2/(v_* \xi)^2 + \dots], \quad \xi = r/(\varepsilon \sin \psi_0)$$

Подставляя в (4.9) или в (4.10) граничные условия $v=1$ при $r=1$, получаем уравнение для определения величины v_* , знание которой необходимо для сращивания внутреннего решения (4.9) с внешним.

5. Упруговязкая жидкость. Примем простейшую модель максвелловской упруговязкой жидкости с конечными упругими деформациями, близкую к модели работы [10], т. е. будем считать, что тензор скоростей деформации \mathbf{D} может быть представлен в виде суммы тензоров скоростей необратимых \mathbf{D}^p и упругих \mathbf{D}^e деформаций. Примем далее, что \mathbf{D}^p выражается через тензор напряжений обычными соотношениями вязкой жидкости, а тензор \mathbf{D}^e связан следующими из кинематики соотношениями с тензором конечных упругих деформаций \mathbf{V}^e , причем напряжения выражаются через \mathbf{V}^e обычными формулами теории конечных упругих деформаций. Эта модель, по сути дела, есть обобщение элементарной модели последовательного соединения нелинейно-упругого и вязкого элементов. Не рассматривая здесь оснований для такого представления, выпишем лишь систему определяющих соотношений модели в простейшем случае изотропной вязкости и упругого потенциала Муни — Ривлина

$$(5.1) \quad \mathbf{V}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{V}^e + \mathbf{V}^e \mathbf{D}^e + \Omega^e \mathbf{V}^e - \mathbf{V}^e \Omega^e$$

$$(5.2) \quad \sigma + p\delta = 2G(\mathbf{V}^e - \gamma \mathbf{V}^{e-1})$$

$$(5.3) \quad \mathbf{D}^e = \mathbf{D} - \mathbf{D}^p, \quad \mathbf{D}^p = \frac{1}{2} \eta^{-1} [\sigma^{-1/3} (\text{Sp } \sigma) \delta]$$

$$(5.4) \quad \mathbf{V}^e \Omega^e \mathbf{V}^{e-1} + \mathbf{V}^{e-1} \Omega^e \mathbf{V}^e = \mathbf{V}^e \mathbf{D}^e \mathbf{V}^{e-1} - \mathbf{V}^{e-1} \mathbf{D}^e \mathbf{V}^e$$

Соотношение (5.4) служит для определения тензора скорости упругих вращений Ω^e . В рассматриваемом случае главные оси тензоров σ , \mathbf{V}^e , \mathbf{D} и \mathbf{D}^e совпадают с направлениями координатных осей, $\Omega^e = 0$, и все рассматриваемые тензоры имеют диагональное представление. Все они могут быть выражены через три главные компоненты тензора \mathbf{V}^e , обозначаемые далее через μ_i , $i=1-3$. В результате получаем соотношения

$$(5.5) \quad \frac{v}{\mu_1} \frac{d\mu_1}{ds} = \frac{dv}{ds} - \frac{1}{\Theta} [2\mu_1^2 - r\mu_2^2 - \mu_3^2 - \gamma(2\mu_1^{-2} - r^2\mu_2^{-2} - \mu_3^{-2})]$$

$$\frac{v}{\mu_2} \frac{d\mu_2}{ds} = -\frac{1}{\Theta} [2r^2\mu_2 - \mu_1^2 - \mu_3^2 - \gamma(2r^2\mu_2^{-2} - \mu_1^{-2} - \mu_3^{-2})]$$

$$\frac{v}{\mu_3} \frac{d\mu_3}{ds} = -\frac{v}{r} \frac{dr}{ds} - \frac{dv}{ds} -$$

$$-\frac{1}{\Theta} [2\mu_3^2 - \mu_1^2 - r^2\mu_2^2 - \gamma(2\mu_3^{-2} - \mu_1^{-2} - r^2\mu_2^{-2})]$$

$$(5.6) \quad \sigma_1 = 2S[\mu_1^2 - \mu_3^2 - \gamma(\mu_1^{-2} - \mu_3^{-2})], \quad \sigma_2 = 2S[\mu_2^2 r^2 - \mu_3^2 - \gamma(\mu_2^{-2} r^2 - \mu_3^{-2})]$$

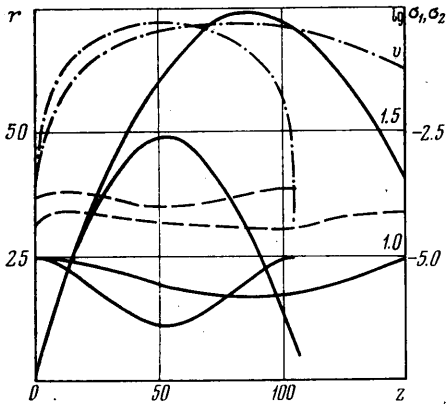
Уравнения (2.5) — (2.7), (5.5) с учетом выражений для напряжений (5.6) образуют систему, которая интегрируется при начальных условиях

$$\psi = \psi_0, \quad r = 1, \quad v = 1, \quad z = \text{ctg } \psi_0, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = r_1^{-1}, \quad \mu_3 = r_1 (s = 0)$$

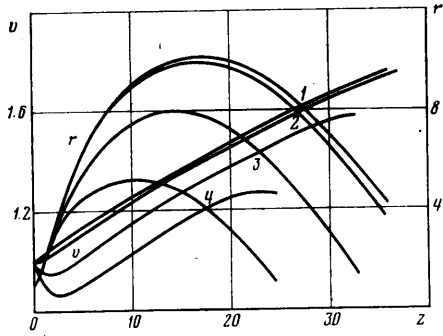
Компоненты тензора конечных упругих деформаций удовлетворяют условию несжимаемости: $\mu_1 \mu_2 \mu_3 r = 1$. Коэффициент $\Theta^{-1} = \frac{2}{3} S / \varepsilon$ в уравнениях (5.5) пропорционален отношению характерного времени пробега жидкой

частицы $\tau=r_0v_0^{-1}$ к времени релаксации жидкости $\theta=\eta/G$. Очевидно, что при фиксированном модуле сдвига G и увеличении вязкости решение системы уравнений (5.5), (5.6), (2.5) – (2.7) должно асимптотически приближаться к решению соответствующей упругой задачи.

6. Численные расчеты. В случае упругой пленки уравнение (2.5) после подстановки в него выражений (3.3) – (3.4) для σ_1 и σ_2 преобразуется к виду, разрешенному относительно производной dv/ds . Полученное уравнение интегрируется совместно с (2.6), (2.7) при краевых условиях (3.5) с помощью метода Рунге – Кутты. Рассчитывались форма пленки в мери-



Фиг. 3



Фиг. 4

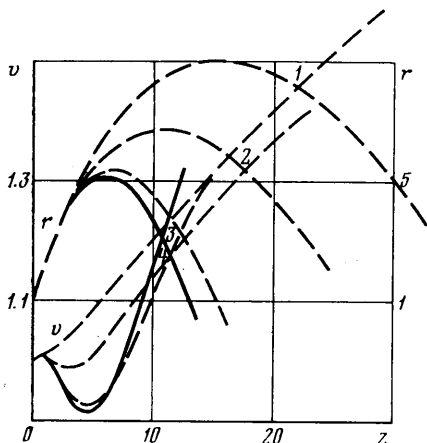
диональном сечении, а также распределения скорости и главных напряжений σ_1 , σ_2 по длине для разных значений v_0 , G и для разных начальных углов схода пленки (равенство $\psi_0=\pi/2$ соответствует диску, $\psi_0=\pi/3$ – конусу). Расход жидкости $q=60 \text{ см}^3/\text{сек}$, $r_0=0.3 \text{ см}$, $a=0.14 \text{ см}$.

Оказывается, что при умеренных начальных скоростях истечения жидкости ($v_0=100 \text{ см/сек}$, $\psi_0=\pi/2$) получаются пленки, равномерно вытянутые по осям r и z . Обращает внимание различие в величинах главных напряжений: окружная компонента σ_2 примерно на порядок больше, чем продольная σ_1 . При изменении модуля сдвига G от 7.5 до 25 дн/см^2 радиус R уменьшается приблизительно вдвое, что подтверждает выводы п. 3. Для больших значений начальной скорости $v_0=1000 \text{ см/сек}$ ($\psi_0=\pi/2$) получаются сплюснутые пленки, сильно вытянутые по радиусу r (малое число H). Особенно характерную форму принимает упругая пленка для $G=75 \text{ дн/см}^2$; при этом отношение $R/Z=13$ (при $G=7.5 \text{ дн/см}^2$ отношение $R/Z=4$, где Z – размер пленки вдоль оси симметрии). Скорость слабо изменяется, возрастает анизотропия напряжений: σ_2 отличается от σ_1 на 2–3 порядка. Угол схода кольцевой струи также существенно влияет на форму пленки. При $\psi_0=\pi/3$ ($v_0=100 \text{ см/сек}$) получаются пленки, вытянутые по оси z .

Для иллюстрации на фиг. 3 приведены результаты расчета пленки упругого материала для $\psi_0=\pi/3$ и $v_0=1000 \text{ см/сек}$. Здесь получаются пленки, равномерно вытянутые по осям r и z , скорость жидкости имеет минимум в области максимума радиуса (скорость и форма показаны сплошной линией). По-прежнему σ_2 (штрихпунктир) на большей части длины струи значительно превышает по величине напряжение σ_1 (пунктир). Фигура 3 соответствует $G=25 \text{ дн/см}^2$ (кривые обрываются при $z\sim 100$) и $G=7.5 \text{ дн/см}^2$ (кривые доведены до $z\sim 150$). Видно, что при увеличении модуля сдвига величина R уменьшается: $R(25)/R(7.5)=2/3$. Оценка этого отношения с

помощью формулы (3.10) дает тот же результат; это еще раз подтверждает возможность использования приближенной схемы ($\sigma_1=0$) для анализа напряжений и деформаций жидкости в условиях высокоскоростного растяжения в пленке.

Для расчета кольцевой струи вязкой жидкости использован метод последовательных приближений. Первый шаг состоит в том, что вычисляется



Фиг. 5

распределение скорости в пленке идеальной жидкости в поле сил тяжести: для системы уравнений (2.5) — (2.7) с краевыми условиями (3.5) решается задача Коши при $\epsilon=0$ ($\sigma_1=\sigma_2=0$). По распределению скорости численно, с помощью центральных разностей находятся производные dv/ds . Для вычисления производной dv/ds в последнем расчетном узле струи используется экстраполяционная формула второго порядка точности. Затем по формулам (4.2) определяются напряжения σ_1 , σ_2 . Производная $d(\sigma_1 v^{-1})/ds$ вычисляется с помощью аналогичных разностных аппроксимаций по уже полученным данным. На следующем шаге система уравнений (2.5) —

(2.6), разрешенная относительно dv/ds и $d\psi/ds$, интегрируется совместно с уравнениями (2.7) с краевыми условиями Коши (3.5) при $\epsilon \neq 0$. Так получается новое распределение скорости в жидкой пленке с учетом вязкости.

Предложенный метод не использует граничное условие на «дальнем» конце пленки, где имеет место экспоненциальный пограничный слой (см. п. 4), но позволяет рассчитывать зону падения скорости в окрестности точки схода кольцевой струи, где существенно влияние вязкости, а также внешнее решение задачи. При достаточно малых ϵ ($\eta \leq 3 \text{ нз}$) численным экспериментом установлена сходимость итераций. При увеличении числа ϵ ($\eta > 3 \text{ нз}$) сходимость итераций нарушается. Заметим, что с увеличением вязкости растет влияние регулярного пограничного слоя на «дальнем» конце пленки и учет граничного условия здесь становится необходимым.

На фиг. 4 приведены результаты расчета пленки вязкой жидкости для $\psi_0 = \pi/3$, $v_0 = 100 \text{ см/сек}$ и четырех значений вязкости ($\eta = 0, 0.1, 1, 3$ соответствуют кривым с номерами 1, 2, 3, 4). Видно, что поведение скорости отличается от соответствующего распределения в упругой пленке. В окрестности точки схода струи имеет место «погранслоный эффект», после точки минимума скорость растет под действием силы тяжести, как при течении идеальной жидкости. Отметим, что главные вязкие напряжения σ_1 и σ_2 по величине одного порядка. В исследуемом диапазоне скоростей увеличение вязкости до 10 нз ($\eta = 0.1$, кривые 2) не изменяют существенно форму пленки. Это обстоятельство указывает на правильность интерпретации экспериментальных данных для полимерных растворов, как проявления сдвиговой упругости жидкости.

Как видно из асимптотической формулы (4.10), при малом ϵ (большом ξ) диссипация скорости в пограничном слое невелика и форму пленки практически правильно воспроизводит решение невязкой задачи. Можно оценить падение скорости в случае $\eta = 3 \text{ нз}$ ($\psi_0 = \pi/3$). Величина v_* , полученная из уравнения (4.9), где вместо v , ψ_0 и r подставлены начальные

условия, оказывается равной 0.85, что хорошо согласуется с данными расчета (см. фиг. 4).

При расчете пленки упруговязкой жидкости удается проследить весь процесс перехода от вязкого поведения ($\Theta \ll 1$) к чисто упругому ($\Theta \gg 1$) по мере изменения соотношения между характерным временем движения и временем релаксации жидкости. Так, на фиг. 5 показаны для $\psi_0 = 1/3\pi$, $v_0 = 100$ см/сек, $G = 25$ дн/см² формы пленки и распределения скорости по ее длине для $\theta = 0.04, 0.4, 4, 32$ сек (соответственно пунктирные кривые 1–4). Для наибольшего времени релаксации результаты расчета совпадают с данными чисто упругого случая (сплошная кривая). Характерно, однако, что выход на упругий случай достигается лишь при неожиданно больших временах релаксации. Скорее всего здесь сказывается недостаток используемой модели, не учитывающей рост эффективной продольной вязкости жидкости при больших упругих деформациях.

7. Экспериментальные данные. Эксперименты проводились на водных растворах полиакриламида и полиоксиэтилена концентрации 0.05%. Динамическая осесимметричная пленка образовывалась при ударе вертикальной струи жидкости о коническую или плоскую мишень диаметром 0.5–1.0 см. Струя вытекала из сопла диаметром 0.28 см со скоростью до 5 м/сек. При этих условиях получалась кольцевая струя с максимальным радиусом до 10 см (см. фиг. 1), число N не превышало 0.05. Опытные данные (фиг. 2) свидетельствуют о заметном уменьшении максимального радиуса R при переходе от воды к слабым растворам полиоксиэтилена и полиакриламида.

Если учесть, что численные расчеты жидкости с малой вязкостью ($\eta \leq 10$ сн) не обнаружили зависимости R от η , то существенное уменьшение разлета (величина R) пленок полимерных растворов может объясняться, по-видимому, наличием больших упругих напряжений (вязкость η указанных растворов полимеров не превышает 3 сн). Другая причина уменьшения разлета пленки может состоять в потере скорости жидкости на мишени. Для выяснения влияния этого фактора экспериментально определялось распределение скорости в пленке разбавленных полимеров. Было показано, что потери отличаются от соответствующих данных для воды на 3%, что не может привести к уменьшению максимального радиуса струи на 30%, так как величина R пропорциональна скорости v_0 .

Считая, что поведение в исследуемых разбавленных растворах подчиняется модели Муни – Ривлина, оценим с помощью формулы (3.10) величину K . Имеем

$$(7.1) \quad K = \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \frac{\sin^2 \psi_0}{(1 - \cos \psi_0)^2} - \frac{2R_0}{R} \frac{\cos \psi_0}{1 - \cos \psi_0} - 4$$

Обработка данных эксперимента с помощью (7.1) приводит к следующим величинам модуля упругости: G (ПОЭ) ~ 10 дн/см², G (ПАА) ~ 20 дн/см². При этом оценка времени релаксации $\theta = \eta/G \sim 3 \cdot 10^{-3}$ сек дает слишком малую величину для того, чтобы считать жидкость чисто упругой. Тем не менее существование упругих напряжений $\sigma_2 \sim 2Gr^2/r_1^2 \sim 10^4$ дн/см² позволяет предполагать, что отношение η/G не может характеризовать время релаксации при течении упругой жидкости с большими деформациями.

Поступила 31 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Hinch E. J. Mechanical models of dilute polymer solutions in strong flow. Phys. Fluids, 1977, vol. 20, pt 2, No. 10.
2. Metzner A. B. Polymer solutions and fiber suspension rheology and their relationship to drag reduction. Phys. Fluids, 1977, vol. 20, pt 2, No. 10.

3. *Mackley M. R.* Flow singularities, polymer chains extension and hydrodynamic instabilities. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 1978, vol. 4, No. 1-2.
 4. *Taylor G.* The dynamics of thin sheets of fluid. I. Water bells. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1959, vol. 253, No. 1274.
 5. *Dumbleton J. H.* Effect of gravity on the shape of water bells. *J. Appl. Phys.*, 1969, vol. 40, No. 10.
 6. *Епихин В. Е.* О формах кольцевых струй капельной жидкости. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1977, № 1.
 7. *Епихин В. Е.* О течении закрученных кольцевых струй капельной жидкости в окружающей среде. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем. мех.*, 1978, № 1.
 8. *Енгов В. М., Маткамов С. М., Мукук К. В.* Об одном эффекте нормальных напряжений. *Иж.-физ. ж.*, 1978, т. 34, № 3.
 9. *Астарига Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М., «Мир», 1978.
 10. *Leonov A. I.* Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. *Rheol. Acta*, 1976, vol. 15, No. 2.
-