МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1980

УДК 533:538

ВНУТРЕННИЕ ВРАЩЕНИЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ СЛАБОПРОВОДЯЩИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СУСПЕНЗИЙ

А. О. ЦЕБЕРС

(Рига)

Обзор исследований гидродинамических явлений в слабопроводящих однофазных средах, обусловленных межфазными электрическими напряжениями, приведен в [1]. В настоящей работе развивается модель диэлектрической суспензии с объемными парами, обусловленными действием поля на свободные заряды, распределенные на поверхности ее частиц. Методом усреднения микромасштабных полей получаются макроскопические уравнения поля и поляризации диэлектрической суспензии с учетом конечности времени релаксации распределения свободного заряда на границе раздела фаз. На основе развитой модели рассматривается эффект возникновения спонтанного вращения диэлектрического цилиндра в слабопроводящей суспензии при наличии электрического поля, который по сравнению со случаем однофазных сред [2] характеризуется существенным снижением пороговой напряженности электрического поля с увеличением концентрации частиц [3]. В настоящей модели диэлектрической суспензии дестабилизация цилиндра связана с возникновением вращений частиц суспензии, обусловленных взаимодействием поляризации и движения среды. Релаксационное уравнение поляризации для данной модели аналогично соответствующему уравнению для намагничивающихся сред [4–6].

1. Уравнения, описывающие многофазную среду в макромасштабе, получаются усреднением микромасштабных полей [7]. В предположении об эквивалентности поверхностного и объемного усреднения микромасштабных полей [7] макроскопические уравнения поля в слабопроводящей суспензии получаются в результате усреднения микрополей по площадкам с характерным размером, гораздо бóльшим среднего расстояния между частицами суспензии. Для этого рассматривается задача о возмущении однородного поля одиночной сферической частицей радиуса R, вращающейся с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}=(\Omega, 0, 0)$ в жидкости, диэлектрическая проницаемость и проводимость которой равны ε_1 и γ_1. Диэлектрическая проницаемость и проводимость твердой фазы равны соответственно ε_2 и γ_2.

Уравнения Лапласа для потенциала электрического поля ψ в твердой и жидкой фазах решаются в сферической системе координат, полярная ось которой направлена в направлении оси z. Система граничных условий задачи получается из условия непрерывности потенциала, соотношения для скачка нормальной компоненты вектора электрической индукции $\mathbf{D}$ на поверхности частицы и условия исчезновения возмущений поля вдали от частицы

$$\psi_1=\psi_2,\ D_{n1}-D_{n2}=4\pi\sigma \tag{1.1}$$

$$\mathbf{E}|_{r\to\infty}\to\mathbf{E}_0=(0, E_{0y}, E_{0z})$$

Здесь индексы 1 и 2 относятся соответственно к жидкой и твердой фазам.

Закон сохранения заряда $\partial\rho/\partial t=-\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}+\mathbf{j})$ в предположении локализации свободного заряда на межфазной границе в результате интегрирования в направлении, нормальном к границе раздела фаз, дает релаксационное уравнение для поверхностной плотности свободного заряда в системе координат, неподвижной относительно частицы [1]

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=-\frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial(\sigma v_\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)-\tag{1.2}$$
$$-\frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\partial(\sigma v_\varphi)}{\partial\varphi}-j_n^1+j_n^2$$

Здесь $\mathbf{j}$ — ток проводимости, определяемый в твердой и жидкой фазах законом Ома $\mathbf{j}_{1,2}=\gamma_{1,2}\mathbf{E}_{1,3}$, $\sigma\mathbf{v}$ — конвективный ток, обусловленный вращательным движением частиц $\mathbf{v}=[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}]$, а ϑ, φ — углы сферической системы координат.

Решение уравнений Лапласа при учете (1.1) и (1.2) дает

$$\psi_1=-\mathbf{E}_0\mathbf{r}+\mathbf{A}\mathbf{r}/r^3,\quad \psi_2=\mathbf{B}\mathbf{r}$$
$$\mathbf{A}=(0,A_y,A_z),\quad \mathbf{B}=(0,B_y,B_z),\quad \mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1$$
$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{1,2}=\frac{\varepsilon_{1,2}}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2},\quad \overset{\circ}{\gamma}_{1,2}=\frac{\gamma_{1,2}}{2\gamma_1+\gamma_2},\quad \mathbf{A}_0=(\varepsilon_2{}^\circ-\varepsilon_1{}^\circ)\mathbf{E}_0R^3\tag{1.3}$$

Поверхностная плотность заряда равна

$$\sigma=\frac{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4\pi R^3}\mathbf{A}_1\mathbf{n}\tag{1.4}$$

Для $\mathbf{A}_1$ из (1.2) следует релаксационное уравнение

$$d\mathbf{A}_1/dt=[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{A}_1]-\tau^{-1}(\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_{10})$$
$$\mathbf{A}_{10}=3(\varepsilon_1{}^\circ\gamma_2{}^\circ-\varepsilon_2{}^\circ\gamma_1{}^\circ)\mathbf{E}_0R^3,\quad \tau=(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)/4\pi(2\gamma_1+\gamma_2)\tag{1.5}$$

Здесь τ — время релаксации поверхностной плотности заряда в суспензии сферических частиц.

Уравнения макрополя получаются в результате поверхностного усреднения микрополей (1.3). Усреднение осуществляется для случая слабоконцентрированных систем, когда объемная доля включений мала. Усреднение по площадке с нормалью $\mathbf{n}=(0, 0, 1)$ и площадью S с учетом того, что часть поверхности усреднения $S_2=\sum_i\pi(R^2-z_i^2)$ (суммирование осуществляется по частицам, находящимися на расстоянии $|z_i|\leqslant R$ от поверхности усреднения) проходит через твердую фазу, а часть $S-S_2$ через жидкую, для напряженности макрополя дает $S\mathbf{n}\langle\mathbf{E}\rangle=\int\mathbf{n}\mathbf{E}dS$

$$S\langle\mathbf{E}\rangle\mathbf{n}=-S_2\mathbf{B}\mathbf{n}+(S-S_2)[\mathbf{E}_0\mathbf{n}-$$
$$-\int\limits_{|z|\geqslant R}^{\infty}dz\int\limits_0^\infty 2\pi\rho\,d\rho n(\mathbf{n}\nabla)\frac{\mathbf{A}\mathbf{r}}{r^3}-\int\limits_{|z|\leqslant R}dz\int\limits_{\sqrt{R^2-z^2}}^{\infty}2\pi\rho d\rho n(\mathbf{n}\nabla)\frac{\mathbf{A}\mathbf{r}}{r^3}\Big]$$

Здесь n — число частиц суспензии в единице объема, z, ρ — координаты цилиндрической системы координат с полярной осью в рассматриваемой точке поверхности $S-S_2$, направленной вдоль оси z.

Расчет при учете (1.3) в случае пространственно-равномерного распределения частиц, когда $S_2=S\varphi$, с точностью до членов первого порядка малости по φ дает

$$\mathbf{n}\langle\mathbf{E}\rangle=\mathbf{n}\mathbf{E}_0-3\varphi\mathbf{A}\mathbf{n}/R^3 \tag{1.6}$$

Аналогичные соотношения имеют место и для других компонент напряженности поля. Усреднение индукции поля дает

$$S\langle\mathbf{D}^*\rangle=\int\varepsilon\mathbf{E}\,dS$$

$$\langle\mathbf{D}^*\rangle=\varepsilon_1\mathbf{E}_0+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\varphi\mathbf{E}_0-(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\varphi\mathbf{A}/R^3 \tag{1.7}$$

Для макрополя $\langle\mathbf{D}^*\rangle$ справедлива теорема Гаусса

$$\int_S\langle\mathbf{D}^*\rangle\mathbf{n}\,dS=4\pi q$$

здесь q — свободный заряд, заключенный в охватываемом поверхностью S объеме V.

Вследствие того, что, согласно (1.4), полный свободный заряд на включениях равен нулю, вклад в q обусловлен частицами, находящимися внутри V частично. Расчет при учете (1.4) дает

$$q=-V\operatorname{div}[(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\varphi\mathbf{A}_1/4\pi R^3]$$

Отсюда следует, что уравнению $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$ при отсутствии посторонних зарядов в диэлектрической суспензии удовлетворяет величина $\langle\mathbf{D}\rangle=$ $=\langle\mathbf{D}^*\rangle+(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\varphi\mathbf{A}_1/R^3$, которая и играет роль индукции поля в уравнениях макромасштаба. Из (1.6) и (1.7) при этом получается

$$\langle\mathbf{D}\rangle=\varepsilon_{12}^\infty\langle\mathbf{E}\rangle+4\pi\mathbf{P},\quad \varepsilon_{12}^\infty=\varepsilon_1(1+3\varphi(\varepsilon_2^\circ-\varepsilon_1^\circ)) \tag{1.8}$$

Здесь ε_{12}^∞ — мгновенная диэлектрическая проницаемость суспензии, $\mathbf{P}=3\varepsilon_1\varphi\mathbf{A}_1/4\pi R^3$.

Для $\mathbf{P}$ из (1.5) следует релаксационное уравнение

$$d\mathbf{P}/dt=[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{P}]-\tau^{-1}(\mathbf{P}-\mathbf{P}_0)$$

$$\mathbf{P}_0=\varkappa_0\langle\mathbf{E}\rangle,\quad \varkappa_0=9\varepsilon_1\varphi(\varepsilon_1^\circ\gamma_2^\circ-\varepsilon_2^\circ\gamma_1^\circ)/4\pi \tag{1.9}$$

Здесь $\varkappa_0$ — инерционная часть диэлектрической восприимчивости суспензии.

Заметим, что в случае, когда частота поля $\omega\ll\tau^{-1}$ и вращение частиц отсутствует, $\mathbf{P}=\mathbf{P}_0$ и $\langle\mathbf{D}\rangle=\varepsilon_{12}^\circ\langle\mathbf{E}\rangle$, где $\varepsilon_{12}^\circ=\varepsilon_{12}^\infty+4\pi\varkappa_0$ — известное выражение для диэлектрической восприимчивости суспензии частиц проводимости γ_2 в среде с проводимостью γ_1 [8].

Уравнения (1.8) и (1.9) представляют собой основу электростатики слабопроводящих диэлектрических суспензий и аналогичны соответствующим уравнениям модели намагничивающихся сред с внутренними вращениями [4–6]. Однако случай диэлектрических суспензий имеет ряд существенных отличий. Во-первых, в отличие от магнитных жидкостей величина $\varkappa_0$ может быть отрицательной ($\gamma_2^\circ<\varepsilon_2^\circ\gamma_1^\circ/\varepsilon_1^\circ$ — случай слабопроводящих частиц), во-вторых, соответствующее время релаксации может быть существенно большим, чем в магнитных жидкостях.

Так, для суспензии непроводящих частиц с $\varepsilon_2=3.75$ (кварц) в среде с $\varepsilon_1=2.1$ (трансформаторное масло) и проводимостью 10^{-11} *ом*$^{-1}$ *см*$^{-1}$ для времени релаксации τ получим величину $3.5\cdot10^{-2}$ *сек*, которая значительно выше характерного времени релаксации намагниченности магнитной жидкости на основе сравнительно вязкой несущей среды с $\eta=1$ *пз* (минеральное масло) — $4.5\cdot10^{-4}$ *сек* [9].

2. Уравнения гидродинамики намагничивающихся и поляризующихся сред [10], полученные в случае неравновесной поляризации среды, показывают, что при описании подобного класса движений наряду с обычными вязкими и электрическими напряжениями существенны и напряжения, обусловленные объемными парами. Полная система уравнений движений и поля несжимаемой поляризующейся жидкости с учетом полученных в первом разделе соотношений (1.8) и (1.9) имеет вид (пондеромоторные силы, обусловленные мгновенной диэлектрической восприимчивостью, потенциальны и поэтому включены в давление)

$$\begin{gathered}\rho d\mathbf{v}/dt=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{v}+(\mathbf{P}\nabla)\mathbf{E}+{}^1/_2\operatorname{rot}[\mathbf{P}\times\mathbf{E}]\\ \operatorname{div}\mathbf{D}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=0,\quad \mathbf{D}=\varepsilon_{12}{}^\infty\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}\\ d\mathbf{P}/dt=[\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{P}]-\tau^{-1}(\mathbf{P}-\mathbf{P}_0)\end{gathered}\tag{2.1}$$

Система уравнений (2.1) замыкается уравнением баланса моментов сил, действующих на частицу

$$-\alpha(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\Omega}_0)+[\mathbf{P}\times\mathbf{E}]=0,\quad \boldsymbol{\Omega}_0={}^1/_2\operatorname{rot}\mathbf{v}\tag{2.2}$$

Здесь α — коэффициент вращательного трения частиц, в случае сферических частиц равный $8\pi\eta R^3n$.

На основе уравнений движения и поля (2.1)—(2.2) далее рассматривается вращательное движение цилиндра в безграничной суспензии при наличии однородного электрического поля, поперечного его оси. Задача решается в цилиндрической системе координат, ось которой параллельна оси цилиндра. Случай однофазной жидкости соответствует предположению $\mathbf{D}=\varepsilon_{12}{}^\circ\mathbf{E}$.

Возмущение однородного поля цилиндром радиуса R_1, вращающимся с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_1=(0,\ 0,\ \Omega_1)$, находится из решений уравнений Лапласа для потенциала электрического поля при граничных условиях (1.1)—(1.2) для случая цилиндрической симметрии. Во внешней к цилиндру области для потенциала электрического поля имеем

$$\begin{gathered}\psi_1=-\mathbf{E}\mathbf{r}+2\mathbf{K}_0\mathbf{r}/\varepsilon_{12}{}^\circ r^2+2\mathbf{K}_1\mathbf{r}/\varepsilon_{12}{}^\circ r^2\\ \mathbf{K}_0=\varkappa_1{}^\infty R_1{}^2\mathbf{E},\quad \varkappa_1{}^\infty={}^1/_2\varepsilon_{12}{}^\circ(\varepsilon-\varepsilon_{12}{}^\circ)/(\varepsilon+\varepsilon_{12}{}^\circ)\end{gathered}\tag{2.3}$$

Здесь ε, γ — диэлектрическая проницаемость и проводимость цилиндра соответственно.

Для $\mathbf{K}_1$ имеем релаксационное уравнение

$$\begin{gathered}\partial\mathbf{K}_1/\partial t=[\boldsymbol{\Omega}_1\times\mathbf{K}_1]-\tau_1{}^{-1}(\mathbf{K}_1-\mathbf{K}_{10}),\quad \tau_1=(\varepsilon+\varepsilon_{12}{}^\circ)/4\pi(\gamma+\gamma_{12}{}^\circ)\\ \mathbf{K}_{10}=(\varkappa_1{}^\circ-\varkappa_1{}^\infty)R_1{}^2\mathbf{E},\ \varkappa_1{}^\circ-\varkappa_1{}^\infty=\varepsilon_{12}{}^\circ(\varepsilon_{12}{}^\circ\gamma-\varepsilon\gamma_{12})/(\varepsilon+\varepsilon_{12}{}^\circ)(\gamma+\gamma_{12})\end{gathered}\tag{2.4}$$

Интегрированием электрических напряжений $T_{ik}={}^1/_4\pi(E_iD_k-{}^1/_2E^2\delta_{ik})$ по удаленной цилиндрической поверхности для момента электрических сил, действующего в стационарном случае на единицу длины цилиндра, при учете (2.3) и (2.4) получаем [1]

$$M_+=[\mathbf{K}_1\times\mathbf{E}]_z=-\frac{\tau_1\Omega_1}{1+(\tau_1\Omega_1)^2}(\varkappa_1{}^\circ-\varkappa_1{}^\infty)R_1{}^2E^2\tag{2.5}$$

Уравнение баланса моментов электрических и вязких сил, действующих на цилиндр при учете (2.5), $M_+-4\pi\eta R_1{}^2\Omega_1=0$, показывает, что состояние покоя цилиндра с $\varkappa_1{}^\circ<0$ становится неустойчивым при напряженностях поля $E^2\geqslant E_C{}^2=-4\pi\eta/\tau_1(\varkappa_1{}^\circ-\varkappa_1{}^\infty)$.

Для угловой скорости стационарного вращения цилиндра при $E \geqslant E_c$ получается

(2.6) $$\tau_1\Omega_1 = \sqrt{(E/E_c)^2 - 1}$$

Линейность зависимости Ω_1 от E (2.6) при $E \gg E_c$ соответствует экспериментальным результатам для случая однофазных жидкостей [2].

Особенности явления спонтанного вращения цилиндра в диэлектрической суспензии могут быть описаны на основе модели (2.1) и (2.2) в пренебрежении реоэлектрическими явлениями [3], т. е. в предположении, что возмущение электрического поля цилиндром имеет вид (2.3)

$$\mathbf{E}_d = -\nabla\psi_d, \quad \psi_d = 2\mathbf{Kr}/\varepsilon_{12}{}^\circ r^2, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1$$

Далее находится решение (2.1) и (2.2) для случая движения диэлектрической суспензии в электрическом поле $\mathbf{E}_d$ вращающегося цилиндра. Решение находится при $\varkappa_0\tau E_d{}^2\alpha^{-1} < 1$, когда нелинейным членом **в** уравнении поляризации можно пренебречь. В этом случае релаксационное уравнение поляризации при $\tau\Omega_1 < 1$ дает

(2.7) $$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_b, \quad \mathbf{P}_0 = \varkappa_0(\mathbf{E}_d + \mathbf{E}_b)$$
$$\mathbf{P}_b = -\tau\varkappa_0(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{E}_d + \tau\varkappa_0[\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{E}_d]$$

Уравнение движения (2.1) с учетом (2.7) принимает вид

(2.8) $$-\nabla(p - {}^1/_2\mathbf{P}_b\mathbf{E}_d) + \eta'\Delta\mathbf{v} - {}^1/_2\{[\mathbf{E}_d \times \operatorname{rot}\mathbf{P}_b] + \mathbf{E}_d \operatorname{div}\mathbf{P}_b\} = 0$$

С учетом азимутальной симметрии задачи $\mathbf{v} = (0, f(r), 0)$ соотношения (2.7) и (2.8) для азимутальной скорости движения диэлектрической суспензии дают дифференциальное уравнение

(2.9) $$(r^6 + ar^2)d^2f/dr^2 + (r^5 - 3ar)df/dr + (-r^4 + 3a)f = 0$$

Здесь параметр $a/R_1{}^4 = \tau\varkappa_0K^2/[\varepsilon_{12}{}^\circ]^2\eta R_1{}^4$ имеет смысл отношения вращательной и сдвиговой вязкости и в случае непроводящих включений отрицателен.

Уравнение (2.9) решается при граничных условиях прилипания на цилиндре $f(R_1) = \Omega_1 R_1$ и отсутствия движения на бесконечности. Уравнение (2.9) в результате замены независимой переменной $r^4 = |a|z$ приводится к виду

$$16z^2(z-1)d^2f/dz^2 + 16z^2df/dz - (3+z)f = 0$$

Общим решением этого уравнения является функция

$$f = C_1z^{1/4} + C_2z^{1/4}\ln[(\sqrt{z}-1)/(\sqrt{z}+1)]$$

которая при учете граничных условий может быть записана в виде

(2.10) $$f = \frac{\Omega_1 r \ln[(1 - |a|^{1/2}/r^2)/(1 + |a|^{1/2}/r^2)]}{\ln[(1 - |a|^{1/2}/R_1{}^2)/(1 + |a|^{1/2}/R_1{}^2)]}$$

С учетом асимптотического поведения (2.10) при $r \to \infty$ для момента вязких сил на цилиндр при наличии внутренних вращений получим

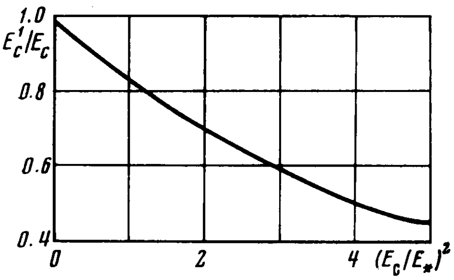
(2.11) $$M_- = \frac{8\pi\eta|a|^{1/2}\Omega_1}{\ln[(1 - |a|^{1/2}/R_1{}^2)/(1 + |a|^{1/2}/R_1{}^2)]}$$

На основе (2.5) и (2.11) может быть исследовано влияние внутренних вращений на устойчивость покоя и угловую скорость спонтанного вращения диэлектрического цилиндра. В случае $\Omega_1 \to 0$ имеем $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{10} =$

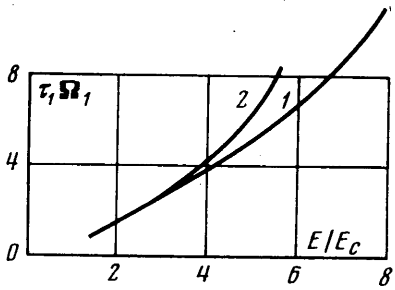
$=\varkappa_1^\circ R_1^2 \mathbf{E}$, что для определения порога потери устойчивости покоя цилиндра дает уравнение

$$\frac{E_c^1}{E_*}=-\frac{2(E_c/E_*)^2}{\ln[(1-E_c^1/E_*)/(1+E_c^1/E_*)]}, \quad E_*^2=\frac{\eta[\varepsilon_{12}^\circ]^2}{\tau|\varkappa_0|[\varkappa_1^\circ]^2} \tag{2.12}$$

Как показывает соотношение (2.12), взаимодействие поляризации с движением приводит к снижению порога неустойчивости цилиндра в поле. Графически зависимость E_c^1/E_c от параметра $(E_c/E_*)^2$, определяемого свойствами суспензии, представлена на фиг. 1. Наглядно причина снижения порога возникновения неустойчивости покоя диэлектрического цилиндра представляется следующим образом: поляризованные в дипольном



Фиг. 1



Фиг. 2

поле цилиндра непроводящие частицы суспензии вследствие увлечения среды цилиндром переносятся в другую точку пространства, где вследствие конечности времени релаксации поляризации частиц поле цилиндра вызывает их вращение относительно несущей среды, создающее момент вязких сил в направлении вращения цилиндра.

Следует заметить, что эффект дестабилизации состояния покоя цилиндра непроводящими частицами не определяется специфическими свойствами поля $\mathbf{E}_d$, а обусловлен вращательной неустойчивостью состояния покоя самих частиц с $\varkappa_0<0$ в электрических полях с напряженностью поля $E^2 \geqslant E_p^2=-\alpha/\tau\varkappa_0$.

В качестве примера подобной ситуации, когда неустойчивость частиц приводит к неустойчивости среды в целом, можно указать случай коаксиального цилиндрического конденсатора с узким относительным зазором и незакрепленным внутренним электродом. В этом случае анализ устойчивости совместной системы уравнений (2.1) и уравнения вращательного движения внутреннего цилиндра показывает, что система становится неустойчивой относительно вращений незакрепленного электрода при напряженностях поля $E^2 \geqslant E_p^2/(1+\alpha/4\eta)$. Вращения частиц суспензии при этом совершаются в одном направлении.

В пределе высоких скоростей движения цилиндра ($\Omega_1\tau_1 \gg 1$), когда запаздывающая часть поляризации цилиндра $\mathbf{K}_1$ мала, для параметра $|a|/R_1^4$ можно вследствие (2.3) принять значение $\tau|\varkappa_0|[\varkappa_1^\infty]^2 E^2/\eta[\varepsilon_{12}^\circ]^2$, что для скорости вращения цилиндра при $E \gg E_c^1$ из условия баланса моментов сил при учете (2.5) и (2.11) дает

$$\tau_1\Omega_1=\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{E_*}{E_c}\right)^2\frac{1}{b}\frac{E}{E_*}\ln\left[\frac{(1-bE/E_*)}{(1+bE/E_*)}\right]-1}, \quad b^2=\frac{[\varkappa_1^\infty]^2}{[\varkappa_1^\circ]^2} \tag{2.13}$$

Зависимость (2.13) при $b=0.176$, что соответствует случаю эбонитого цилиндра с $\varepsilon=3$ и $\gamma=0$ в среде с $\varepsilon_1=2.1$ (трансформаторное масло), приведена на фиг. 2. Кривым *1*, *2* соответствуют значения $(E_c/E_*)^2=0{,}5$; 1.0. Как показано на фигуре, функция (2.13) в отличие от (2.6) имеет нелинейный характер, что соответствует экспериментальным результатам исследования спонтанного вращения цилиндра в диэлектрической суспензии [11].

3. Приведем оценки роли реоэлектрических явлений в эффекте спонтанного вращения диэлектрического цилиндра в поле. Учет возмущения поля движением диэлектрической суспензии проводится методом возмущений. При $|a|^{1/2}/R_1^2 \ll 1$ разложение (2.10) в нулевом порядке по $|a|^{1/2}/R_1^2$ дает

$$f=\Omega_1 R_1^2/r \tag{3.1}$$

Возмущение поляризации среды, вносимое движением с полем скоростей (3.1), согласно (2.7) равно

$$\mathbf{P}_b=\left(\frac{4\tau\varkappa_0\Omega_1R_1^4K}{\varepsilon_{12}{}^\circ r^4}\sin\varphi,\ -\frac{4\tau\varkappa_0\Omega_1R_1^2K}{\varepsilon_{12}{}^\circ r^4}\cos\varphi,\ 0\right)$$

$$\mathbf{P}_*=\varkappa_0\mathbf{E}_b+\mathbf{P}_b \tag{3.2}$$

Здесь угол φ отсчитывается от направления дипольного момента $\mathbf{K}$ диэлектрического цилиндра.

Возмущение поля в стационарном случае находится из решения задачи

$$\begin{gathered}\Delta\psi_{1b}=-4\pi\operatorname{div}\mathbf{P}_b/\varepsilon_{12}{}^\circ\\ \Delta\psi_{2b}=0\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$D_{1bn}-D_{2bn}=4\pi\sigma_b,\quad \Omega_1\partial\sigma_b/\partial\varphi=-j_{1bn}+j_{2bn} \tag{3.4}$$

Плотность макротока в диэлектрической суспензии находится методом усреднения, описанным в первом разделе. Соответствующий расчет дает

$$\mathbf{j}=\gamma_1\mathbf{D}/\varepsilon_1+[(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)/3\varepsilon_1]\partial\mathbf{P}/\partial t \tag{3.5}$$

Заметим, что из (3.5) в стационарном случае следуют результаты [12], которые показывают, что в диэлектрической суспензии при наличии сдвигового течения имеет место аналог эффекта Холла.

Решение задачи (3.3)—(3.4) при учете (3.2) и (3.5) для момента электрических сил, действующего на цилиндр и обусловленного реоэлектрическим эффектом, дает

$$M_{+b}=-4\pi\tau\varkappa_0\Omega_1[\varkappa_1{}^\circ]^2E^2R_1^2/[\varepsilon_{12}{}^\circ]^2$$

Видно, что в случае $\varkappa_0<0$ возмущение поля, обусловленное реоэлектрическим эффектом, аналогично внутренним вращениям оказывает дестабилизирующее влияние на состояние покоя диэлектрического цилиндра. При малых $|a|^{1/2}/R_1^2$ из (2.11) следует

$$M_-=\Omega_1(-4\pi\eta R_1^2+4\pi\tau|\varkappa_0|[\varkappa_1{}^\circ]^2E^2R_1^2/3[\varepsilon_{12}{}^\circ]^2)$$

При этом для порога неустойчивости покоя цилиндра при совместном учете внутренних вращений и реоэлектрического эффекта можно получить

$$[E_c{}^1]^2=E_c^2/(1+4E_c^2/3E_*^2)$$

В заключение следует отметить, что рассмотренная выше задача аналогична задаче о поступательном движении иона в полярной жидкости

[10] с учетом диэлектрического трения, обусловленного конечностью времени релаксации поляризации. Отметим, что в [10] коэффициент перед членом диэлектрического трения ошибочен, правильное значение 17/420, совпадающее также с [13], приведено в диссертации автора [1].

На основании полученных результатов можно сделать заключение, что модель диэлектрической суспензии, учитывающая внутренние вращения и конечность времени релаксации межфазной плотности свободного заряда, описывает некоторые качественные особенности явления спонтанного вращения диэлектрического цилиндра в диэлектрической суспензии. Предложенная система уравнений движения и поля приводит к классу задач механики поляризующихся сред, в которых уравнения поля и движения взаимосвязаны, причем их связь обусловлена переносом поляризации среды поступательным и вращательным движениями частиц суспензии.

Поступила 8 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Melcher J. B., Taylor G. I.* Electrohydrodynamics: a review of the role of interfacial shear stresses. In: Ann. Rev. Fluid Mech., vol. 1. Palo Alto, Calif. Annual Revs, 1969. (Рус. перев.: Электрогидродинамика. Обзор роли межфазных касательных напряжений. Механика. Период. сб. перев. иностр. ст., 1971, № 5.)
2. *Карпов Ю. С., Красноперов В. А., Окунев Ю. Т., Пасынков В. В.* О движении диэлектриков в электрическом поле. В кн. Физика диэлектриков. М., Изд-во АН СССР, 1960.
3. *Шульман З. П., Дейнега Ю. Ф., Городкин Р. Г., Мацепуро А. Д.* Электрореологический эффект. Минск, «Наука и техника», 1972.
4. *Суязов В. М.* Движение ферросуспензии во вращающихся однородных магнитных полях. Магнитная гидродинамика, 1976, № 4.
5. *Шлиомис М. И.* Эффективная вязкость магнитных суспензий. ЖЭТФ, 1971, т. 61, в. 6.
6. *Цеберс А. О.* Феррогидродинамика как гидродинамика системы с внутренними степенями свободы. В кн.: Физические свойства и гидродинамика дисперсных ферромагнетиков. Свердловск, 1977.
7. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М., «Наука», 1978.
8. *Блум Э. Я., Заке М. В., Иванов У. И., Михайлов Ю. А.* Тепло- и массообмен в электромагнитном поле. Рига, «Зинатне», 1967.
9. *Майоров М. М., Цеберс А. О.* Релаксация магнитного двойного лучепреломления и дихроизма золей ферромагнетиков. Коллоид. ж. 1977, т. 39, № 6.
10. *Цеберс А. О.* Течение дипольных жидкостей во внешних полях. Магнитная гидродинамика, 1974, № 4.
11. *Шульман З. П., Городкин Р. Г., Кузьмин В. А.* О некоторых факторах, влияющих на вращение диэлектрика в электрореологических дисперсных системах. Инж.-физ. ж., 1972, т. 23, № 5.
12. *Цеберс А. О.* Некоторые особенности явлений переноса в суспензиях с внутренними вращениями. ПММ, 1978, т. 42, № 4.
13. *Hubbard J., Onsager L.* Dielectric dispersion and dielectric friction in electrolyte solutions I. J. Chem. Phys., 1977, vol. 67, No. 11.

---

[1] *Цеберс А. О.* Собственные вращения частиц в гидродинамике намагничивающихся и поляризующихся сред. Автореф. канд. дис. Рига, 1976.