

## ИССЛЕДОВАНИЕ БОКОВЫХ СИЛ И МОМЕНТОВ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА В СОПЛАХ

Г. З. НИКУЛИН, Л. В. ПЧЕЛКИНА, У. Г. ПИРУМОВ,  
Г. С. РОСЛЯКОВ

(Москва)

Настоящая статья посвящена изучению сверхзвуковых пространственных течений газа в соплах. Основное внимание уделяется изучению боковых сил и моментов, возникающих вследствие несимметричных возмущений контура осесимметричного конического или профилированного сопла или вследствие несимметричных возмущений параметров в некотором сечении сопла. В работе применен комплексный подход: исследования выполнены численно с помощью конечно-разностного метода, методом малых возмущений и экспериментально.

Исследование пространственных течений сопряжено с большими трудностями и в настоящее время опубликовано небольшое число работ, посвященных этому вопросу (см., например, [1]).

В работах [2-8] для исследования пространственных течений газа в соплах применяются численные методы. В [2-4] рассматривается задача о смешанном течении в сопле заданной формы, которая решается методом установления с использованием явных разностных схем первого порядка точности. В работе [5] для решения задачи о смешанном течении разработан и обоснован обратный метод. Для расчета сверхзвукового пространственного течения газа в сопле использовался послойный метод характеристик [6, 8] и метод сквозного счета [7]. Важные прикладные результаты содержатся в [8], где изучены боковые силы и моменты, возникающие из-за несимметричных возмущений на входе в сопло.

Численный расчет пространственного течения в сопле весьма трудоемок, что не позволяет провести детальное параметрическое исследование в нелинейной постановке. В связи с этим рядом авторов для решения подобных задач применялся метод малых возмущений [1, 9-11]. Метод малых возмущений существенно упрощает задачу, в то же время во многих важных для практики случаях он обеспечивает удовлетворительную точность. Результаты экспериментальных исследований пространственных течений в соплах, появляющиеся в общедоступной литературе, носят отрывочный характер. Достаточно полное экспериментальное изучение боковой силы и момента содержится в [12].

**1. Метод малых возмущений. Определение начальных значений боковых сил и моментов.** Для определения боковых сил и моментов в настоящей работе широко использовался метод малых возмущений, развитый в [9, 13]. Предполагается, что несимметричные возмущения в коническом сопле малы и приводят лишь к малым отличиям течения от радиального. Это предположение позволяет после линеаризации уравнений газовой динамики получить их решение методом Фурье. После ряда упрощающих предположений удается получить систему двух дифференциальных уравнений для определения боковой силы  $L$  и момента  $M$  относительно центра источника. При этом одно из уравнений является точным и следует из условия равновесия концевой участка сопла [9].

Для безразмерных величин имеем

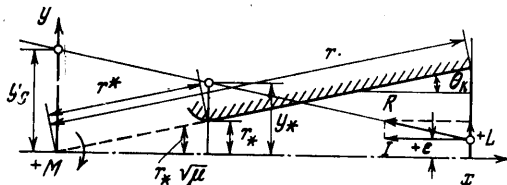
$$\frac{dL^\circ}{d\psi} = -\frac{\cos \theta_k}{r^\circ} \frac{\sqrt{\psi}}{\psi+1} \frac{dM^\circ}{d\psi} - \frac{\psi-1}{2\psi(\psi+1)} L^\circ$$

(1.1)

$$\frac{dM^\circ}{d\psi} = -\frac{r^\circ}{4 \cos \theta_k} \frac{\psi+1}{\psi^{1.5}} [2-n(n+1)] L^\circ + \frac{n(n+1)}{4\psi} M^\circ$$

$$L^\circ = \frac{L}{I_0}, \quad M^\circ = \frac{Mz(\psi)}{I_0 r^{*2}} = \frac{z(\psi)y_c}{r^{*2}}, \quad r^\circ = \frac{r}{r^*}, \quad \psi = \lambda^2, \quad z = \lambda + \lambda^{-1}$$

Здесь  $\lambda$  — коэффициент скорости,  $I_0$  — импульс сопла в рассматриваемом сечении. Остальные обозначения и правило знаков видны из фиг. 1. Число  $n$  есть наименьшее значение, при котором удовлетворяется условие  $d/d\theta P_n^{(1)}(\theta) = 0$  при  $\theta = \theta_k$ , где  $P_n^{(1)}(\theta)$  — присоединенный полином Лежандра. Оно следует из условия непротекания на контуре сопла [9]. Отметим, что



Фиг. 1

значение  $n$  достаточно велико. Система (1.1) позволяет найти боковую силу и момент как в сверхзвуковой, так и в дозвуковой части сопла.

Для несимметричного течения в цилиндрической трубе имеем следующие соотношения для боковой силы  $L^\circ$  и  $\epsilon^\circ = \epsilon/r_c$ :

$$(1.2) \quad L^\circ = 1.84\beta^{-1} \epsilon_H^\circ \sin \omega + L_H^\circ \cos \omega$$

$$\epsilon^\circ = \epsilon_H^\circ \cos \omega - L_H^\circ \frac{\beta}{1.84} \sin \omega$$

где  $\beta = \sqrt{M_0^2 - 1}$ ,  $\omega = 1.84x^\circ/\beta$ ,  $x^\circ = x/r_c$ ,  $r_c$  — радиус цилиндра,  $L_H^\circ$  и  $\epsilon_H^\circ$  — начальные значения  $L^\circ$  и  $\epsilon^\circ$ ,  $M_0$  — число Маха в невозмущенном течении в цилиндре. Таким образом, линейная теория позволяет весьма просто определять боковую силу и момент для конического сопла и цилиндрической трубы.

Анализ уравнений (1.1) показывает, что можно получить приближенные аналитические выражения для боковой силы и момента. Для дозвуковой части сопла имеем

$$(1.3) \quad L = L_H \left(\frac{r}{r_H}\right)^{n-1}, \quad M = -\frac{r_H L_H [2-n(n+1)]}{n^2 \cos \theta_k} \left(\frac{r}{r_H}\right)^n$$

где  $L_H$  — начальное значение боковой силы в сечении  $r=r_H$ . Отсюда следует, что боковая сила и момент уменьшаются в дозвуковой области по степенному закону по мере приближения к минимальному сечению. Кроме того, видно, что выполняется приближенное соотношение  $M = CrL$ , где значение константы  $C$  зависит от начальных условий и угла  $\theta_k$ . Для сверхзвуковой области, используя результаты работы [14], можно получить следующие приближенные выражения для боковой силы и момента

$$(1.4) \quad L = F_1 [l_1 \sin \delta_1(\psi) + l_2 \cos \delta_2(\psi)]$$

$$M = F_2 [m_1 \sin \delta_1(\psi) + m_2 \cos \delta_2(\psi)]$$

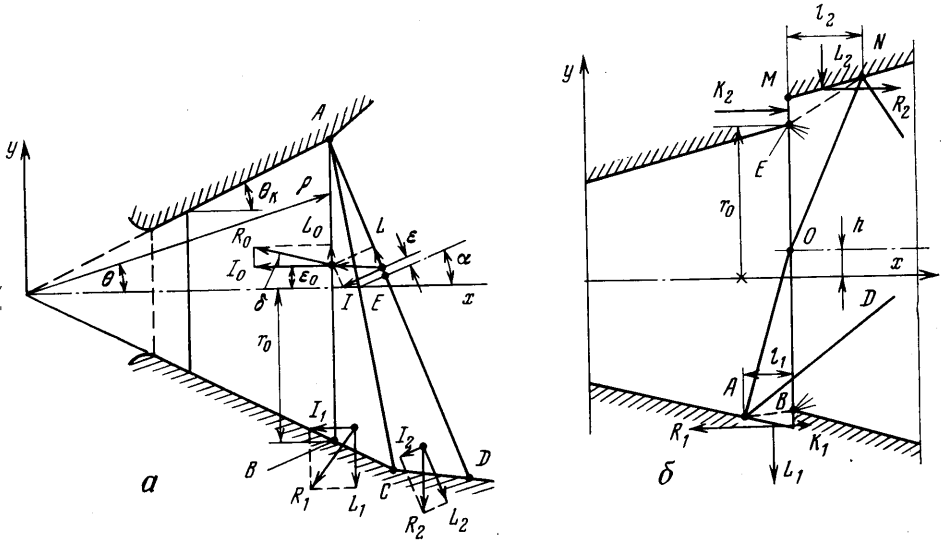
$$F_1 = 2 \left(\frac{n_1}{\pi}\right)^{1/2} (\kappa - \psi)^{0.257(\gamma-1)} [\kappa(\psi-1)]^{-1/4} \psi^{3/8}$$

$$F_2 = rF_1, \quad \delta_1(\psi) = 0.5n_1f(\psi), \quad \delta_2(\psi) = 0.5n_2f(\psi) \\ n_1 = \sqrt{n(n+1)} - 2, \quad n_2 = \sqrt{n(n+1)}, \quad \kappa = (\gamma+1)/(\gamma-1)$$

Здесь  $f(\psi)$  — функция Прандтля — Мейера,  $l_1, l_2, m_1, m_2$  — произвольные константы,  $\gamma$  — показатель адиабаты. Пусть начальные условия заданы в виде боковой силы и момента, связанных соотношением (при  $\varepsilon_H = 0$ )

$$(1.5) \quad M_H^0 = -L_H^0 r_H^0 z(\psi) \cos \theta_k$$

которое выполняется при повороте на небольшой угол оси сопла в начальном сечении. Тогда при больших  $n$  (малых  $\theta_k$ ) из (1.4) следует, что  $M = CrL$ . Это означает, что при небольших углах  $\theta_k$  можно приближенно



Фиг. 2

считать, что точка приложения боковой силы находится в плоскости выходного сечения сопла и при известной величине боковой силы можно определить момент относительно любой точки. Это означает также, что нули боковой силы и момента в этом случае близки. Выполнив необходимые выкладки, получим

$$(1.6) \quad L = L_H \cos[\delta_1(\psi) - \delta_1(\psi_H)] \frac{F_1(\psi)}{F_1(\psi_H)} \\ M = M_H \cos[\delta_2(\psi) - \delta_2(\psi_H)] \frac{F_2(\psi)}{F_2(\psi_H)}$$

где  $\delta_1(\psi_H)$  и  $\delta_2(\psi_H)$  — начальные значения функций  $\delta_1(\psi)$  и  $\delta_2(\psi)$ . Из этих формул очевиден колебательный характер изменения боковой силы и момента с затуханием амплитуды колебаний у функции  $L$  (за счет члена  $F_1(\psi)$ ). Нули  $\psi_k$  функций  $L$  и  $M$  приближенно определяются из соотношения  $f(\psi_k) = f(\psi_H) + \pi/n(2k+1)$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ). Видно, что число нулей увеличивается с уменьшением  $\gamma$  и  $\theta_k$  (т. е. с увеличением  $n$ ). Кроме того, первый нуль функций  $L$  и  $M$ , соответствующий  $k=0$ , смещается вниз по потоку при увеличении угла  $\theta_k$ . Таким образом, приближенное решение позволяет выявить ряд важных особенностей, связанных с несимметричным течением в сопле. Отметим, что прямое сравнение численного реше-

ния системы (1.1) и приближенного решения (1.6) показывает их совпадение с точностью 2–3%.

Остановимся на вопросе о выборе начальных данных, которыми в методе возмущений являются боковая сила и момент. Их определение при заданном виде искажений обычно является более простой задачей, чем определение поля параметров в начальном сечении, которое требуется, например, при численном интегрировании пространственных уравнений газовой динамики.

Рассмотрим два наиболее типичных вида искажений в сопле: перекос оси сопла на угол  $\alpha$  и смещение оси на величину  $h$ . Пусть в сечении  $AB$  сопла (фиг. 2, а), имеющем радиус  $r_0$  и расположенном в сверхзвуковой части сопла, вектор  $R_0$  смещен на величину  $\varepsilon_0$  и повернут на угол  $\delta = \arcsin(L_0/R_0)$ . При повороте оси сопла на угол  $\alpha$  образуется переходный участок  $ABCD$ . Необходимо определить боковую силу  $L$  и смещение тяги  $\varepsilon$  (или момент относительно центра источника) в сечении  $AD$ , которые и будут являться начальными данными для расчета распространения возмущений вниз по потоку от сечения  $AD$ . Боковая сила в сечении  $AD$  равна сумме проекций всех сил, действующих на сопло до сечения  $AD$

$$L = I_0 \sin \alpha + L_0 \cos \alpha + L_1 \cos \alpha + I_1 \sin \alpha + L_2$$

Будем считать, что в области  $ABC$  на стенке сопла действует давление  $p_0$ , неизменное по длине участка и равное давлению в сечении  $AB$ . Тогда боковая сила  $L_1$  и продольная  $I_1$  с точностью до  $\alpha^2 \theta$  равны:

$$L_1 = -\pi r_0^2 p_0 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad I_1 = -\pi r_0^2 p_0 \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha$$

При пересечении плоскости  $AC$  давление на стенке сопла меняется. Можно предположить, что при малых углах  $\alpha$  понижение давления в волне разрежения, возникающей в точке  $A$ , равно повышению давления в ударной волне, выходящей из точки  $C$ , причем поворот потока происходит без отрыва. Закон изменения давления в окружающем направлении зададим в виде  $p = p_0 (1 - \Delta \cos \varphi)$ , где  $\Delta = (p_c - p_0)/p_0$  — относительное повышение давления в ударной волне, выходящей из точки  $C$ ,  $\varphi$  — угол в сферической системе координат. Предполагаем также, что вдоль образующих сопла в области  $ACD$  давление не изменяется. После интегрирования получим, что сила  $L_2$  с точностью до  $\alpha^2 \theta$  равна  $L_2 = -\pi r_0^2 p_0 \operatorname{tg}(\alpha/2) (1 + \Delta)$ . Тогда боковая сила в сечении  $AD$  определяется следующим соотношением

$$(1.7) \quad L^0 = L_0^0 + \alpha \left( 1 - \frac{\Delta}{2\gamma M_0^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\gamma M_0^2} \right)^{-1}$$

где  $M_0$  — значение числа Маха в сечении  $AB$ . При небольших углах  $\alpha$  повышение давления в точке  $C$  на скачке можно определить из уравнения совместности. Имеем  $\Delta = \alpha \gamma M_0^2 (M_0^2 - 1)^{-1/2}$ , тогда

$$(1.8) \quad L_0 = L_0^0 + \alpha \frac{1 - 0.5\alpha (M_0^2 - 1)^{-1/2}}{1 + (\gamma M_0^2)^{-1}}$$

Формулы (1.7), (1.8) можно применять при безотрывном сверхзвуковом течении в переходном участке  $ABCD$ .

Определим эксцентриситет тяги  $\varepsilon$  в сечении  $AD$ . Проведем необходимые вычисления, получим для малых углов  $\alpha$  (с точностью до величин порядка  $\alpha^2$ )

$$(1.9) \quad \varepsilon^0 = \frac{\varepsilon}{r_*} = \varepsilon_0^0 - r_0^0 \alpha \left[ L_0^0 + \frac{\operatorname{tg} \theta_k (1 + 0.5\Delta)}{1 + \gamma M_0^2} \right]$$

где  $r_0^2 = r_0/r_*$ ,  $\varepsilon_0^\circ = \varepsilon_0/r_*$  — эксцентриситет тяги в сечении  $AB$ . Величины  $M^\circ$  и  $\varepsilon^\circ$  связаны с величиной момента относительно центра минимального сечения  $M_* = -z(\psi)u_*/r_*$  (фиг. 1) соотношениями

$$M^\circ = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[ \frac{2\gamma M_*}{\pi(\gamma+1)} \sin \theta - z(\psi) L^\circ \cos \theta \right],$$

$$\varepsilon^\circ = -\frac{2\gamma M_*}{\pi(\gamma+1)z(\psi)} + x^\circ L^\circ$$

где  $\mu$  — коэффициент расхода,  $x^\circ = x/r_*$ .

Рассмотрим другой типичный случай искажения — смещение оси на величину  $h$  (фиг. 2, б). В этом случае перед уступом и за ним появляются отрывные зоны, длина которых в плоскости сдвига равна  $l_1$  и  $l_2$ , а давления в них равны  $p_1$  и  $p_2$ . Отличие этих давлений от давления  $p_0$  невозмущенного потока приводит к появлению дополнительных сил  $L_1, L_2, R_1, R_2, K_1, K_2$ . Приведем все силы к точке  $O$ , лежащей на оси последующего участка в плоскости смещения, имеем:  $L = L_0 - L_1 - L_2$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0 + h_0 + \varepsilon_g$ . Здесь  $\varepsilon_0$  и  $L_0$  — смещение и боковая сила предыдущего участка, вызванные несимметрией течения, не связанной с рассматриваемым сдвигом оси;  $\varepsilon_g$  — смещение вектора тяги, эквивалентное суммарному крутящему моменту, возникающему при переносе отмеченных выше дополнительных сил в точку  $O$ ;  $h_0$  — смещение вектора тяги предыдущего участка относительно оси последующего, зависящее от смещения осей. Нижняя часть потока перед сечением сдвига поворачивается по направлению к оси в ударной волне  $AD$ , поэтому величина  $h_0$  должна быть меньше величины  $h$  (фиг. 2, б). Ось сечения  $EB$  отстоит от оси сечения  $MB$  на  $h/2$ , поэтому в первом приближении можно принять (с учетом правила знаков), что  $h_0 = -h/2$ . Более точное значение  $h_0$  можно получить из экспериментальных данных.

Предположим, что граница нижней отрывной зоны лежит в плоскости  $AO$ , а верхней — в плоскости  $NO$ . Считая давление в пределах отрывной зоны неизменным, определим величину всех дополнительных сил и крутящих моментов, возникающих при переносе сил в точку  $O$ . В результате получим величины  $L^\circ$  и  $\varepsilon^\circ$ , которые можно использовать в качестве начальных данных для расчета несимметричного течения вниз по потоку от сечения  $MB$

$$(1.10) \quad L^\circ = L_0^\circ - \frac{\Delta_1 l_1^\circ - \Delta_2 l_2^\circ}{2r_0^\circ(1+\gamma M_0^2)} \frac{h}{|h|} f$$

$$\varepsilon^\circ = \varepsilon_0^\circ - \frac{h^\circ}{2} + \frac{2}{\pi(1+\gamma M_0^2)} \left[ \frac{\Delta_1 l_1^2 - \Delta_2 l_2^2}{3r_0^\circ} \frac{h}{|h|} + \right. \\ \left. + h^\circ (\Delta_1 + \Delta_2) - \operatorname{tg} \theta (\Delta_1 l_1^\circ - \Delta_2 l_2^\circ) \right]$$

$$\Delta_1 = \frac{(p_1 - p_0)}{p_0} = \operatorname{const} > 0, \quad \Delta_2 = \frac{(p_2 - p_0)}{p_0} = \operatorname{const} < 0$$

$$l_1^\circ = \frac{l_1}{r_*}, \quad l_2^\circ = \frac{l_2}{r_*}, \quad h^\circ = \frac{h}{r_*}$$

Здесь  $f$  — коэффициент, учитывающий отличие расчетной схемы от действительной картины течения.

Аналогичный способ расчета начальных данных, заключающийся в приведении к одному сечению сил избыточного давления, действующего на стенку сопла, можно применить и для других видов искажения контура, в частности, для местных искажений типа несимметричных выемок или выступов. Рассмотренная схема расчета начальных данных может быть использована в основном в сверхзвуковой части сопла. В дозвуковой части применение аналогичного подхода осложняется тем, что здесь, как правило, трудно определить границы зоны избыточного давления, вызванного искажением контура, да и сама величина давления не всегда может быть надежно определена. Однако здесь, по-видимому, можно понизить

и требования к точности определения начальных данных, поскольку, как это было показано выше, возмущения в дозвуковой части быстро затухают.

**2. Разностный метод.** В настоящей работе помимо метода малых возмущений использовался разностный метод, приспособленный для расчета пространственных течений газа в соплах в полной нелинейной постановке. Такие расчеты весьма трудоемки, поэтому разностный метод не использовался для параметрических исследований. В силу высокой точности метода он применялся для расчета небольшого числа вариантов с целью выяснения границ применимости метода малых возмущений, а также в тех случаях, когда последний неприменим. Основные черты разностного метода заключаются в следующем. Рассмотрим течение совершенного газа в сопле в общем случае при наличии центрального тела. Будем использовать цилиндрическую систему координат  $x, r, \varphi$ . Предполагается, что течение обладает хотя бы одной плоскостью симметрии ( $\varphi=0$ ). Расчетная область ограничена стенками сопла и центрального тела, уравнения которых  $r=F(x, \varphi)$  и  $r=G(x, \varphi)$ , сечением  $x=x^*$ , плоскостью  $\varphi=0$  и ближайшей к ней плоскостью симметрии  $\varphi=\varphi^*$ . В сечении  $x=x^*$  все величины считаются известными, на поверхностях  $r=F(x, \varphi)$  и  $r=G(x, \varphi)$  ставится условие непротекания

$$(2.1) \quad v = uF_x + wF_\varphi / F, \quad v = uG_x + wG_\varphi / G$$

на плоскостях  $\varphi=0, \varphi=\varphi^*$  — условия симметрии. После замены переменных

$$(2.2) \quad x = x, \quad \xi = \frac{r - G(x, \varphi)}{F(x, \varphi) - G(x, \varphi)} \quad \varphi = \varphi$$

область переходит в прямоугольную,  $x \geq x^*, 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \varphi^*$ , а система уравнений газовой динамики в дивергентной записи будет иметь вид

$$(2.3) \quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial \xi} + \frac{\partial C}{\partial \varphi} + D = 0$$

где  $A, B, C, D$  — векторы с компонентами  $A_k, B_k, C_k, D_k$  ( $k=1, \dots, 5$ )

$$A_k = P_k \delta r, \quad B_k = Q_k r - P_k r (G_x + \xi \delta_x) - R_k (G_\varphi + \xi \delta_\varphi), \quad C_k = R_k \delta$$

$$P_1 = \rho u^2 + p, \quad Q_1 = \rho uv, \quad R_2 = \rho uw, \quad D_1 = 0$$

$$P_2 = \rho uv, \quad Q_2 = \rho v^2 + p, \quad R_2 = \rho vw, \quad D_2 = -(\rho w^2 + p) \delta$$

$$P_3 = \rho uw, \quad Q_3 = \rho vw, \quad R_3 = \rho w^2 + p, \quad D_3 = \rho vw \delta$$

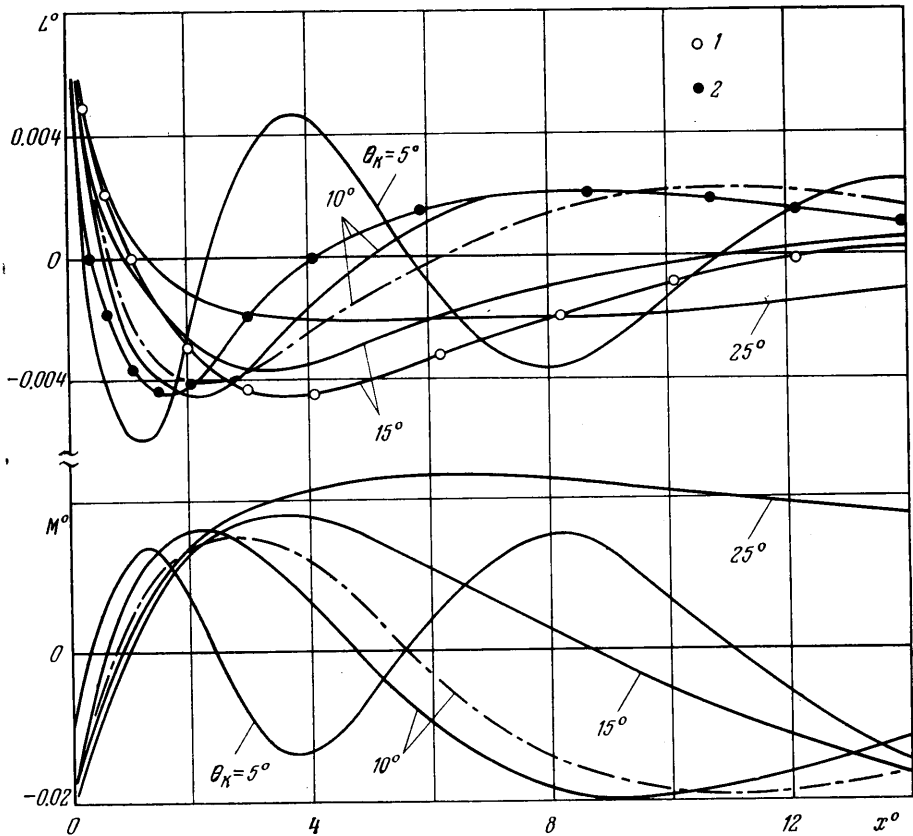
$$P_4 = \rho u, \quad Q_4 = \rho v, \quad R_4 = \rho w, \quad D_4 = 0$$

$$P_5 = \rho uh, \quad Q_5 = \rho vh, \quad R_5 = \rho wh, \quad D_5 = 0$$

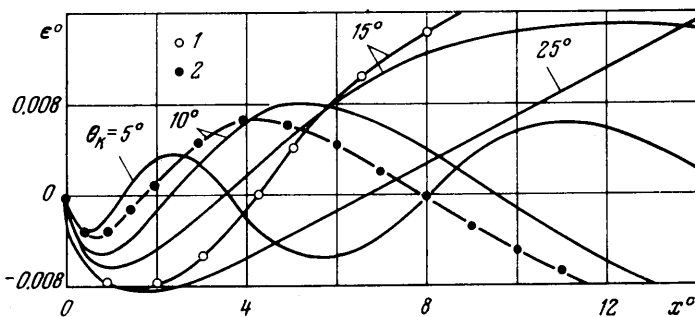
$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} W^2, \quad \delta = F(x, \varphi) - G(x, \varphi)$$

Здесь  $u, v, w$  — составляющие скорости по осям  $x, r, \varphi$ ;  $W$  — модуль скорости;  $p, \rho$  — давление и плотность.

Используемый в работе разностный метод является обобщением на пространственный случай метода, предложенного в [15], и аналогичен методу, использованному для расчета нестационарных двумерных течений в [16]. Он основан на применении явной разностной схемы второго порядка точности и процедуры сглаживания разностного решения и относится к методам сквозного счета. Для вычисления величин на стенке используется односторонняя схема первого порядка точности. Для вычисления па-



Фиг. 3



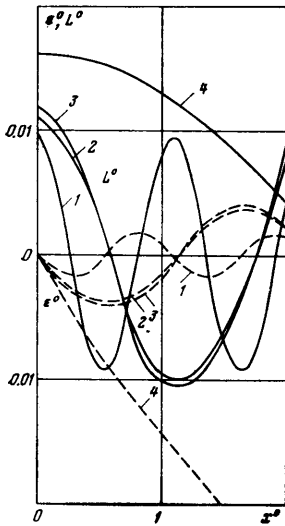
Фиг. 4

раметров на оси цилиндрической системы координат использовались уравнения в декартовых координатах.

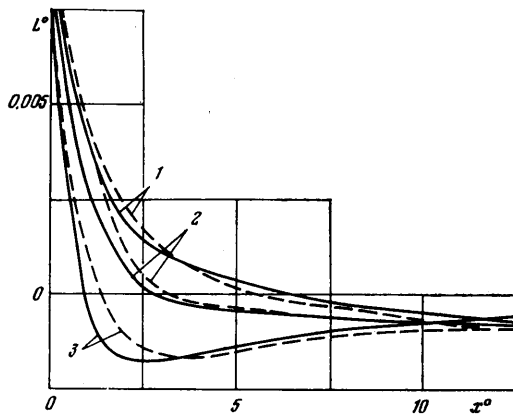
Поскольку в течении возможно образование ударных волн, к разностному решению на каждом слое применялась процедура сглаживания с использованием пяти точек в каждом направлении. Сглаживанию подвергались не сами функции, а комплексы  $A_k$ , после чего вычислялись окончательные значения газодинамических функций. Шаг по  $x$  определялся из «одномерного» условия Куранта, соответствующего изменению параметров вдоль лучей.

**3. Численное исследование пространственных течений газа в соплах.** Основные расчеты несимметричного течения газа в конических соплах

были выполнены по теории маловозмущенных течений с использованием численного решения уравнений (1.1). Искажение задавалось перекосом оси сопла в минимальном сечении на угол  $\alpha=1^\circ$ . Отметим, что в рамках линейной теории амплитуда возмущений пропорциональна углу  $\alpha$ , а нули функций  $L$  и  $M$  не зависят от  $\alpha$ , поэтому результаты расчетов пригодны и для других значений  $\alpha$ . Начальная боковая сила  $L_N^\circ$  определялась по формуле (1.7), в которой  $L_0^\circ=0$  и  $\Delta=0$ , так как ударная волна в рассматриваемом случае вырождается в характеристику. Величина начального



Фиг. 5



Фиг. 6

эксцентриситета тяги  $\epsilon_N^\circ$  принималась равной нулю. Расчеты выполнены в диапазоне углов  $\theta_k=5-25^\circ$  при показателе адиабаты  $\gamma$ , равном 1.2 и 1.4, для различных значений радиуса скругления контура  $R_2^\circ=R_2/r_*$  со стороны сверхзвуковой области.

На фиг. 3, 4 сплошными линиями представлены величины  $L^\circ$ ,  $M^\circ$ ,  $\epsilon^\circ$  при  $M_0=1$ ,  $\gamma=1$ , 2 при отсутствии скругления контура  $R_2^\circ=0$ ; кривые 1 соответствуют значениям  $M_0=1.2$ ,  $\gamma=1.2$ ,  $R_2^\circ=0$ , кривые 2 —  $M_0=1$ ,  $\gamma=1.2$ ,  $R_2^\circ=2$  и штрихпунктирная линия —  $M_0=1$ ,  $\gamma=1.4$ ,  $R_2^\circ=0$ . Видно, что изменение боковой силы носит колебательный характер с затухающей по длине амплитудой; при этом число нулей увеличивается с уменьшением угла  $\theta_k$ . Колебательный характер изменения функций  $L^\circ$ ,  $M^\circ$  и  $\epsilon^\circ$  связан с последовательным отражением от стенок сопла чередующихся волн сжатия и разрежения [1, 9]. Важно отметить, что в тех сечениях, где  $L^\circ=0$ , реализуются максимальные значения  $\epsilon^\circ$  и в связи с этим общий момент отличен от нуля.

С увеличением длины сопла увеличивается амплитуда колебаний функций  $M^\circ$  и  $\epsilon^\circ$ . Координаты нулей функций  $L^\circ$  и  $M^\circ$  несколько смещены один относительно другого, что и следует непосредственно из уравнений (1.1).

Увеличение  $\gamma$  приводит к смещению нулей функций  $L^\circ$  и  $M^\circ$  вправо по оси  $x$ , при этом амплитуда колебаний изменяется незначительно.

Известно, что увеличение радиуса скругления контура в сверхзвуковой части  $R_2^\circ$  приводит к сдвигу нулей функций  $L^\circ$  и  $\epsilon^\circ$ . Этот результат подтверждается и расчетами по линейной теории при замене участка



скругления последовательно расположенными коническими участками. При возрастании  $R_2^\circ$  нули функций  $L^\circ$  и  $\epsilon^\circ$  смещаются влево, а амплитуда колебаний уменьшается. С возрастанием угла  $\theta_k$  влияние  $R_2^\circ$  увеличивается. Увеличение  $M_0$  приводит к сдвигу нулей функций  $L^\circ$ ,  $\epsilon^\circ$  вправо.

Отметим, что аналогичные данные по влиянию параметров  $\gamma$ ,  $R_2^\circ$ ,  $M_0$ , полученные в [8] трехмерным методом характеристик, а также разностным методом, описанным в п. 2, хорошо согласуются с расчетами методом малых возмущений.

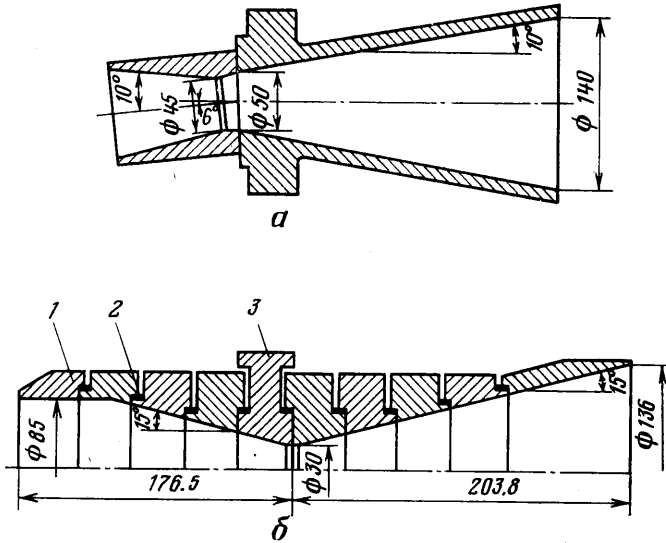
Рассмотрим теперь случай цилиндрической трубы. На фиг. 5 приведены  $L^\circ$  и  $\epsilon^\circ$ . Здесь цифры 1, 2, 4 соответствуют  $\gamma=1.2$  и  $M_0=1.05$ ; 1.2; 3, а цифра 3 —  $\gamma=1.4$ ,  $M_0=1.2$ . Начальное искажение задано в виде перекоса оси на угол  $\alpha=1^\circ$ . Как и в коническом сопле, увеличение числа Маха приводит к увеличению расстояния между нулями функций  $L^\circ$ ,  $\epsilon^\circ$ . В отличие от течения в коническом сопле амплитуда колебаний функций не изменяется. Отметим, что результаты, полученные трехмерным методом характеристик [8], практически не отличаются от зависимостей, определяемых формулой (1.2).

На примере цилиндрической трубы нетрудно показать влияние начальных данных на распространение возмущений. Наличие наряду с боковой силой начального эксцентриситета тяги  $\epsilon_N^\circ \neq 0$  приводит к возрастанию амплитуды колебаний, а также к сдвигу нулей функций  $L^\circ$ ,  $\epsilon^\circ$  вправо или влево в зависимости от того, совпадают или нет знаки  $L_N^\circ$  и  $\epsilon_N^\circ$ . Расстояние между нулями функций  $L^\circ$  и  $\epsilon^\circ$  не зависит от начальных условий. Эти выводы являются верными и для сопел, что еще раз подтверждает важность правильного задания  $L_N$  и  $\epsilon_N$ .

Использование теории маловозмущенных течений возможно и для изучения несимметричных течений газа в профилированных соплах. С этой целью контур профилированного сопла заменялся ломаной линией, составленной из отрезков, углы наклона которых были равны местным углам наклона контура. Результаты расчетов, основанных на таком подходе, течений газа в конических соплах, у которых начальный участок сверхзвукового контура выполнен в виде дуги окружности, уже описывались выше и оказались близкими к результатам работы [8]. Однако с ростом угла  $\theta_k$  различие в результатах расчетов увеличивается, а для профилированных сопел характерны большие углы наклона контура в окрестности минимального сечения. Расчет течений газа в профилированных соплах [8], выполненных по методу [17] и отличающихся величиной радиуса  $R_2^\circ$ , был проведен разностным методом, изложенным в п. 2. Из фиг. 6 следует хорошее совпадение этих расчетов (сплошные кривые) с данными [8] (пунктир). Здесь 1—3 соответствуют  $R_2^\circ$ , равным 0.5, 1.0, 2.0. Существенное влияние  $R_2^\circ$  на  $L^\circ$  связано с наличием больших градиентов в распределениях параметров в поперечных сечениях профилированного сопла прежде всего в области, примыкающей к минимальному сечению.

Расчеты течений в профилированных соплах по линейной теории дают результаты, значительно отличающиеся от приведенных на фиг. 6. Замена начального участка сопла различными эквивалентными конусами или цилиндром не дала удовлетворительных результатов. Гораздо лучшее совпадение результатов наблюдалось в том случае, когда расчет начинался не от критического сечения, а от некоторого сечения, расположенного в сверхзвуковой области. При этом в качестве начальных данных использовались значения  $L^\circ$  и  $\epsilon^\circ$ , взятые из расчетов, представленных на фиг. 6. Распространение возмущений в профилированных соплах можно приближенно оценивать по линейной теории в том случае, если искажения контура располагаются ниже сечения с координатой  $x^\circ = x/r. \approx 2-3$ .

4. Экспериментальное исследование несимметричных течений в соплах. Основной целью экспериментального исследования было получение данных для проверки изложенных выше методов расчета несимметричного течения в сопле. При проведении экспериментов особое внимание уделялось точности получаемых экспериментальных данных, количествен-



Фиг. 7

ной определенности в величине создаваемых начальных возмущений и сохранению одинаковых условий испытания для различных типов искажений и различных сопел.

Исследование в основном было посвящено измерению боковой силы при различных видах искажений контура конических и профилированных сопел. Эксперименты проводились на дифференциальном стенде, описание которого приведено в [18].

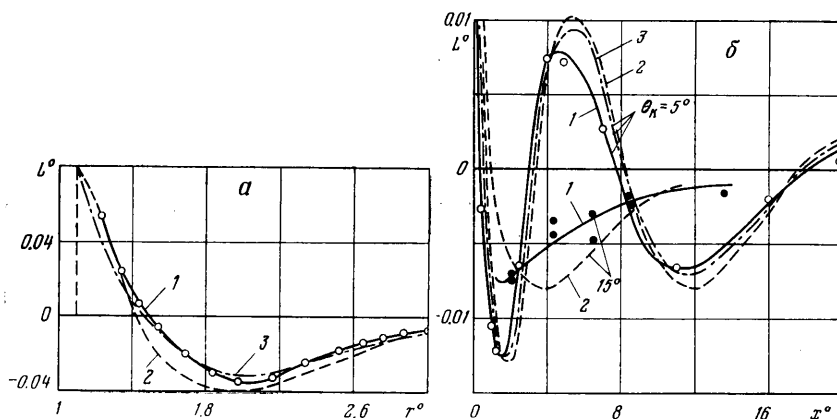
Рабочее тело (холодный воздух) подается в одинаковых количествах в исследуемое и эталонное сопла, расположенные на одной оси и направленные в противоположные стороны. Во время испытаний тензоэлементы измеряют боковую силу, действующую в плоскости, перпендикулярной осевой тяге. Эта сила является суммой (или разностью) боковых сил исследуемого и эталонного сопел. Для выделения боковой силы исследуемого сопла необходимо провести в тех же условиях второй эксперимент, повернув предварительно исследуемое сопло на  $180^\circ$  вокруг его продольной оси и оставив неизменным положение эталонного сопла. Это позволяет измерять боковую силу с точностью  $\sim 0.1\%$  от величины осевой тяги. Основными видами искажений контура, выбранными для исследования, были перекося и сдвиг оси сопла, причем изучалось преимущественно распространение возмущений в сверхзвуковой части. Были исследованы также некоторые виды местных искажений контура в виде несимметричных поперечных выемок.

На фиг. 7, а приведена схема конического сопла с перекосям оси в сверхзвуковой части на угол  $\alpha=6^\circ$ . Расчетное одномерное значение числа Маха в сечении перекося равно  $M=1.58$  при  $\gamma=1.4$ , а на выходе из сопла  $-M_a=3.9$ . Дозвуковая часть сопла выполнена также конической с радиусом скругления в районе критического сечения  $R_1^\circ=R_1/r_*=1$ . После измерения боковой силы исходного сопла производилось последовательное укорочение длины сверхзвуковой части и измерялась боковая сила сопла при полученном другом диаметре выходного сечения. Все это таким образом были определены значения боковой силы в 15 различных сечениях сопла при неизменном начальном возмущении.

На фиг. 7, б изображена модель конического сопла, предназначенная для исследования возмущений, создаваемых сдвигом оси в различных сечениях. Модель выполнена из отдельных, соединенных между собой секций 1. Сдвиг оси по любой плоскости соединения деталей на величину  $h=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$  мм производился с помощью эксцентричных колец, вставляемых вместо симметричных колец 2. Контур сопла в области минимального сечения был скруглен по окружностям радиусами  $R_1=R_2=r_*$ , длина цилиндра в критическом сечении равнялась 3 мм.

Вместо секции 3 с осесимметричным контуром проточной части можно было устанавливать секцию, в которой осуществлялся поворот оси на угол  $\alpha=5^\circ$  в минимальном сечении сопла. Посадочные места секций 3 позволяли подсоединять к ним не только коническую сверхзвуковую часть с углом  $\theta_k=15^\circ$ , но и другие модели. Были исследованы, в частности, две модели с профилированными контурами сверхзвуковых частей ([18]:  $\gamma=1.4, M_0=4, d_a^\circ=3.16$  и  $M_0=5, d_a^\circ=4.52$ ) и модель с конической сверхзвуковой частью ( $\theta_k=5^\circ$ ).

На фиг. 8, а приведены результаты испытаний конического сопла, у которого перекося оси на угол  $\alpha=6^\circ$  выполнен в сверхзвуковой части (кривая 1). Боковая сила этого сопла изменяется в широком диапазоне: от начального расчетного значения  $L_H^\circ=0.08$  в сечении  $r^\circ=1.11$  до макси-



Фиг. 8

мального отрицательного  $L^\circ=-0.035$  при  $r^\circ=1.9$ . Цифрами 2 и 3 показаны расчетные зависимости по теории маловозмущенных течений (при  $L_H^\circ=0.08$  и  $\varepsilon_H^\circ=0$ ) и по разностному методу, которые хорошо согласуются с экспериментом. Это подтверждает правильность расчетных схем, используемых для определения начального поля параметров и начальной боковой силы в сечении перекося оси, а также свидетельствует о большой точности обоих расчетных методов при их использовании для анализа распространения возмущений в конических соплах.

На фиг. 8, б приведена измеренная боковая сила для случая перекося оси сопла с  $\theta_k=5$  и  $15^\circ$  в минимальном сечении. В сопле с малым углом  $L^\circ$  несколько раз меняет знак, в то время как в сопле с углом  $\theta_k=15^\circ$  все измеренные значения боковой силы, за исключением сечения  $x^\circ=0$ , отрицательны. Начальное значение  $L_H^\circ=0.025$  в сечении  $x^\circ=0$ , полученное при испытаниях модели без сверхзвуковой части, оказалось почти в два раза ниже рассчитанного по формуле (1.7). Для выяснения причин этого несоответствия было проведено измерение давлений на стенке сопла в районе перекося оси. Анализ полученных данных показывает, что область повышенного давления имеется не только за плоскостью перекося, но и перед ней, что свидетельствует о наличии в этом месте отрывной зоны. На противоположной стенке сопла происходит разгон потока до значения  $M \approx 1.3$ . Боковая сила, рассчитанная по экспериментальному распределению давлений, близка к измеренной весовым способом. Полученный в данных экс-

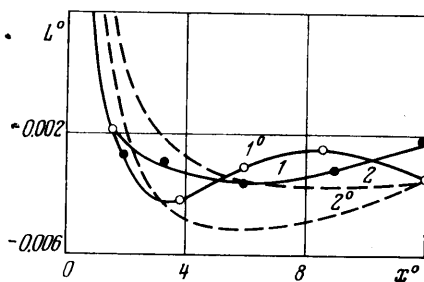
периментах результат свидетельствует о том, что расчетное определение начального возмущения при искажениях контура в районе минимального сечения представляет собой сложную самостоятельную задачу. Это в равной степени относится и к расчету начального поля параметров, используемых в различных пространственных методах расчета.

Расчетные зависимости  $L^\circ$  для сопла с углом  $\theta_k=5^\circ$ , проведенные при  $L_n^\circ=0.025$ ,  $\epsilon_n^\circ=0$  (и при соответствующем этим значениям поле параметров в разностном методе), хорошо согласуются с экспериментальными данными. Некоторое их расхождение свидетельствует о том, что в начальном сечении, по-видимому,  $\epsilon^\circ \neq 0$ . Для сопла с  $\theta_k=15^\circ$  наблюдается большее расхождение между расчетными и экспериментальными данными, что связано, вероятно, с неучтенными технологическими искажениями контура в местах стыковки секций этого сопла.

На фиг. 9 приведены распределения боковой силы по длине профилированных сопел, полученные экспериментально и с помощью разностного метода для случая, когда перекося оси сопла на угол  $\alpha=5^\circ$  производился в районе минимального сечения. В профилированных соплах по сравнению с коническими той же длины реализуется меньшая по абсолютной величине боковая сила. На большей части длины сопла она отрицательна. Для сопла с  $M_0=4$  расчетные (кривая 2<sup>o</sup>) и экспериментальные (кривая 1<sup>o</sup>) данные удовлетворительно согласуются. Несовпадение некоторых экспериментальных точек с расчетом объясняется, по-видимому, той же причиной, что и в случае конического сопла с углом  $\theta_k=15^\circ$ . Подтверждением этому служит экспериментальная зависимость (кривая 1), полученная на модели сопла  $M_0=5$ . В этом случае сверхзвуковая часть сопла была выполнена в виде одной неразъемной детали, поэтому возможность неучтенных дополнительных возмущений практически исключалась и полученная зависимость  $L^\circ(x^\circ)$  не имеет резко выпадающих точек. Расчетная зависимость (кривая 2) для этого сопла при  $\epsilon_n=0$  сдвинута относительно экспериментальной вправо по оси  $x$ , что свидетельствует о наличии в начальном сечении отрицательного смещения вектора тяги. Это замечание относится и к другим соплам (фиг. 8, 9); во всех этих моделях перекося оси создавался одной и той же деталью.

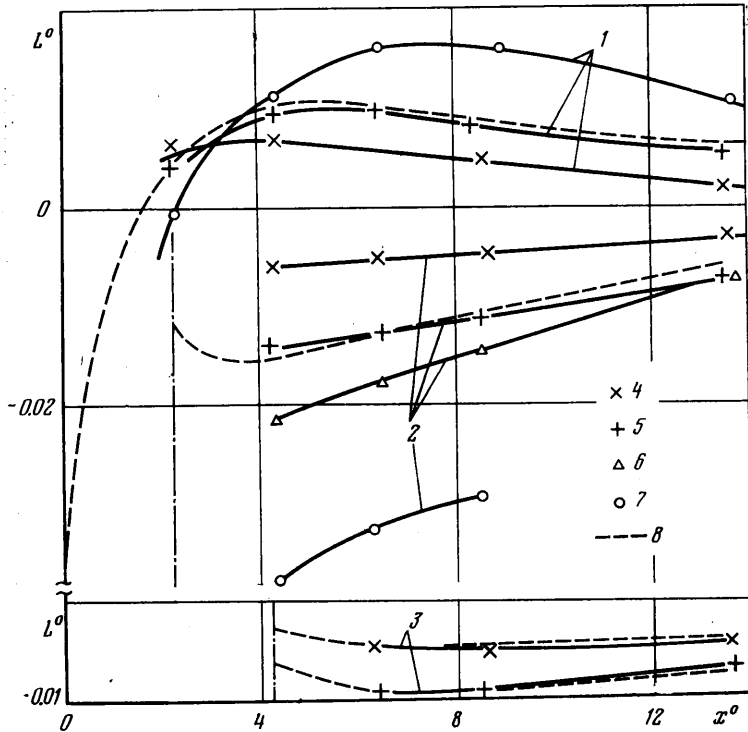
Были проведены измерения зависимости боковой силы от длины конического сопла с углом  $\theta_k=15^\circ$  при различных величинах сдвига оси  $h^\circ = h/r_*$ . На фиг. 10 экспериментальные зависимости 1–3 получены при сдвигах в сечениях  $x^\circ=0$ ; 2.14; 4.25, отмеченных штрихпунктиром. Значки 4–7 соответствуют сдвигам  $h^\circ=0.033$ ; 0.066; 0.1; 0.133. При смещении оси вверх начальные боковые силы во всех случаях отрицательны, как это следует из рассмотренной ранее картины течения. При сдвигах в сверхзвуковой части сопла боковая сила ниже по потоку остается отрицательной, а при сдвиге в минимальном сечении наблюдается изменение знака боковой силы уже на небольшом расстоянии от места возмущения. Величина боковой силы приблизительно пропорциональна смещению  $h^\circ$ .

Для сравнения экспериментальных данных с расчетом необходимо знать величину начальных возмущений. Между тем требуется уточнение самих формул для начальных значений  $L_n^\circ$  и  $\epsilon_n^\circ$  по результатам экспериментов. Рассмотрим в связи с этим способ определения начальных данных



Фиг. 9

по измерениям боковой силы в двух произвольных сечениях сопла. При этом будем использовать два отмеченных выше факта: во-первых, правильность расчетов распространения возмущений в конических соплах по линейной теории и, во-вторых, наличие однозначной связи в сечениях между моментом и боковой силой. С учетом этого можно показать, что если известны значения боковой силы в двух произвольных сечениях сопла, то существует лишь одно сочетание величин  $L_N^\circ$  и  $M_N^\circ$ , при котором могут реализоваться эти боковые силы.



Фиг. 10

Вычисление величин  $L_N^\circ$  и  $M_N^\circ$  удобно производить следующим образом. В силу линейности дифференциальных уравнений (1.1) их решение можно представить в виде

$$L^\circ = L_N^\circ a + M_N^\circ b, \quad M^\circ = L_N^\circ c + M_N^\circ d$$

тогда

$$(4.1) \quad L_N^\circ = \frac{L_2^\circ b_1 - L_1^\circ b_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, \quad M_N^\circ = - \frac{L_2^\circ a_1 - L_1^\circ a_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$$

где  $a, c$  — расчетные значения боковой силы и момента при  $L_N^\circ = 1, M_N^\circ = 0$ ,  $a, b, d$  — расчетные значения боковой силы и момента при  $M_N^\circ = 1, L_N^\circ = 0$ ,  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  — значения боковой силы в двух произвольных сечениях сопла, измеренные в эксперименте;  $a_1, a_2, b_1, b_2$  — расчетные величины в этих же сечениях. Аналогичные формулы можно получить для расчета  $L_N^\circ$  и  $M_N^\circ$  по известным значениям момента в двух сечениях сопла.

Можно применить и другую схему расчета. Пусть, например, известны боковые силы  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  в сечениях 1 и 2 сопла, вызванные возмущением в каком-нибудь сечении. Тогда, считая величину  $L_1^\circ$  начальной боковой

силой по отношению к силе  $L_2^\circ$ , определим момент в сечении 1

$$(4.2) \quad M_1^\circ = (L_2^\circ - L_1^\circ a_2) / b_2$$

Здесь величины  $a_2$  и  $b_2$  находятся из расчета, в котором за начальное сечение принято сечение 1. Зная величины  $M_1^\circ$  и  $L_1^\circ$ , можно определить силу и момент в исходном начальном сечении

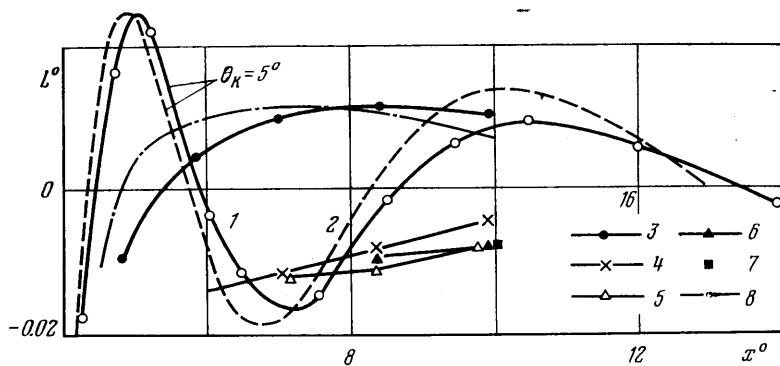
$$(4.3) \quad L_H^\circ = \frac{L_1^\circ d_1 - M_1^\circ b_1}{a_1 d_1 - b_1 c_1}, \quad M_H^\circ = \frac{M_1^\circ a_1 - L_1^\circ c_1}{a_1 d_1 - b_1 c_1}$$

Изложенная методика была использована для определения начальных данных при сдвиге в сечении  $x=0$  и последующего построения расчетных зависимостей. Расчетные зависимости 8 на фиг. 10 хорошо совпадают с экспериментальными не только вблизи тех сечений, которые использовались для определения начальных данных, но и по всей длине сопла. Это служит доказательством правильности определения начальной боковой силы и начального момента по предложенной методике. Аналогичным образом были определены начальные данные и в других сечениях, в которых производился сдвиг оси. Оказалось, что при сдвиге в сверхзвуковой части сопла смещение тяги приблизительно равно половине сдвига оси, т. е.  $\epsilon_H^\circ \approx -h^\circ/2$ . Это подтверждает сделанное при выводе формулы (1.10) предположение о том, что  $h_0 = -h/2$  (другие составляющие смещения в рассматриваемых случаях малы по величине). Однако эти соотношения не выполняются при сдвиге в минимальном сечении сопла. Здесь величина смещения тяги оказалась очень малой, так что можно принимать  $\epsilon_H^\circ = 0$ . В этом случае сдвиг оси эквивалентен повороту оси сопла в минимальном сечении на некоторый угол  $\alpha$ . Это, вероятно, является справедливым и при сдвигах к дозвуковой части сопла.

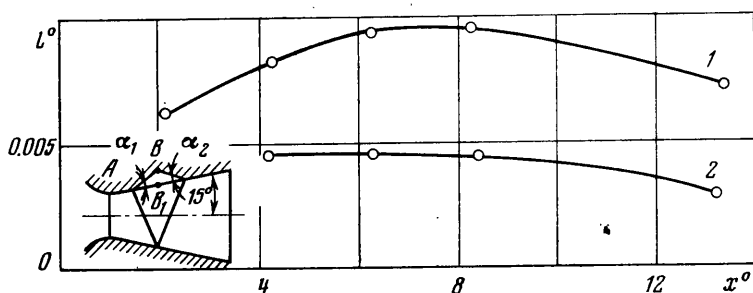
Значения  $L_H^\circ$ , полученные по (4.1), (4.3), можно сравнить с величинами, вычисленными по (1.10). Входящие в правую часть (1.10) величины определяются следующим образом:  $p_1 = (0.31 + 0.69M_0)p_0$  — давление перед ступенькой;  $p_2$  — давление за ступенькой, зависящее от  $M_0$  и  $\delta^{**}/h$  ( $\delta^{**}$  — толщина потери импульса), может быть вычислено, например, по данным [19];  $l_1 = |h| \operatorname{tg}^{-1}(\delta - \delta_1)$ ,  $l_2 = |h| \operatorname{tg}^{-1}(\delta_2 - \delta_0)$  — длины отрывных зон перед ступенькой и за ступенькой;  $\delta_0$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  — углы Прандтля — Мейера, соответствующие давлениям  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ . Расчеты показывают, что при сдвигах оси в сверхзвуковой части расчет по формуле (1.10) при  $f=0.5$  дает правильные значения  $L_H^\circ$ . Аналогичный расчет при сдвиге в минимальном сечении выполнить трудно, так как нет надежных данных по величинам давлений и размерам отрывных зон. Здесь необходимо пользоваться формулами (4.1), (4.3). Полученные по линейной теории зависимости боковой силы от длины сопла при сдвигах в сечениях  $x^\circ = 2.14; 4.25$  при  $\epsilon_H^\circ = -0.5h^\circ$  и  $L_H^\circ$ , вычисленной по (1.10), хорошо совпадают с экспериментальными. Этот же факт иллюстрирует фигура 11, где показаны экспериментальные  $L$  и расчетные 2 зависимости  $L^\circ(x^\circ)$  для конического сопла с  $\theta_k = 5^\circ$  при сдвиге его оси в минимальном сечении на  $h^\circ = 0.066$ . Расчетные зависимости выполнены при  $L_H^\circ = 0.033$  и  $\epsilon_H^\circ = 0$ .

На этой же фигуре приведены экспериментальные данные по боковой силе для профилированного сопла с  $M_0 = 4$ . Значки 3—7 соответствуют сечениям  $x^\circ = 0; 1.55; 3.67; 6.04; 8.63$ , в которых производился сдвиг оси сопла на величину  $h^\circ = 0.066$ . Как и в случае конического сопла с  $\theta_k = 15^\circ$ , сила  $L^\circ$  изменяет знак при сдвиге в минимальном сечении и всюду отрицательна при сдвигах в сверхзвуковой части. На срезе сопла (при  $x_a^\circ = 12$ )  $L^\circ$  почти не изменяется в широком диапазоне изменения координаты сечения сдвига оси ( $x_a^\circ = 3.67 - 8.63$ ).

Проведению количественного сравнения полученных данных с расчетом по разностному методу препятствует неопределенность в задании начальных условий. Исключение составляет случай сдвига оси в минимальном сечении, который в предположении  $\epsilon_H=0$  эквивалентен повороту оси на некоторый угол  $\alpha$ . Найдем величину этого угла из условия совпадения расчетного значения максимальной положительной боковой силы с экспериментальным ( $L_{\max}=0.011$ ; фиг. 11). Тогда начальная боковая сила равна



Фиг. 11



Фиг. 12

$L_H^0=0.051$ , что соответствует углу  $\alpha=4.6^\circ$ . Расчетная зависимость (кривая 8) для профилированного сопла с  $M_0=4$ , полученная разностным методом при перекосе оси в минимальном сечении на  $\alpha=4.6^\circ$ , по своему виду мало отличается от экспериментальной, однако сдвинута влево по оси  $x$ , что, вероятно, вызвано небольшим смещением тяги в начальном сечении. Аналогичные отличия в нулях расчетных и экспериментальных зависимостей уже отмечались при анализе несимметричных течений и в других моделях. Следует заметить, что существует принципиальная возможность определения начального смещения тяги  $\epsilon_H^0$  по расстоянию между нулями экспериментальной и расчетной зависимостей. Для реализации этого способа необходимо иметь набор расчетных кривых  $L^0=f(x^0)$  при одном значении  $L_H^0$  и разных значениях  $\epsilon_H^0$ . Такие зависимости можно легко получить для конических сопел, используя линейную теорию. Сложнее это сделать для профилированных сопел, так как в этом случае нужно численно решать полную трехмерную задачу, причем необходимо уметь задавать распределения параметров в начальном сечении, соответствующие заданному сдвигу тяги  $\epsilon_H^0$ .

Изменение боковой силы по длине конического сопла, вызванное несимметричной выемкой, приведено на фиг. 12; форма выемок показана на схеме. Эксперименты выполнены для двух случаев:  $x_A^0=0.74$ ;  $r_B^0-r_{B_1}^0=0.12$ ;  $\alpha_1=10^\circ 30'$ ;  $\alpha_2=10^\circ$  (кривая 1) и  $x_A^0=2.65$ ;  $r_B^0-r_{B_1}^0=0.11$ ;  $\alpha_1=$

$=8^{\circ}36'$ ;  $\alpha_2=7^{\circ}30'$  (кривая 2). Видно, что направление боковой силы при таком виде искажений совпадает с направлением искажения контура. Боковая сила, вызванная выемкой, уменьшается при смещении выемки к срезу сопла. Близкое по форме искажение контура, выполненное в профилированном сопле с  $M_0=4$ , дает меньшую величину боковой силы, слабо изменяющуюся по длине сопла ( $L^{\circ}=0.0020-0.0023$  при  $x_A^{\circ}=1.69$ ).

Влияние сдвига оси контура в дозвуковой части сопла исследовалось на модели, изображенной на фиг. 7, собранной в составе секций без сверхзвуковой части. Для получения наибольшей величины боковой силы смещение секций задавалось максимальным  $-h=2$  мм. При сдвиге четырех секций I относительно секции 3 возникает боковая сила, равная  $L^{\circ}=-0.0018$ , направленная в сторону сдвига секции 3. Аналогичная по направлению сила  $L^{\circ}=0.0017$  регистрировалась также при сдвиге трех секций I. Сдвиги секций, расположенных еще выше по потоку, дают в минимальном сечении относительную боковую силу, меньшую 0.001. Таким образом, искажения контура в дозвуковой части сопла приводят к возмущениям значительно меньшим, чем искажения в сверхзвуковой части.

Поступила 15 XII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пирумов У. Г., Росляков Г. С. Течения газа в соплах. М., Изд-во МГУ, 1978.
2. Иванов М. Я., Рылько О. А. Расчет трансзвукового течения в пространственных соплах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 5.
3. Дворецкий В. М., Иванов М. Я. К расчету смешанного течения в соплах с несимметричной дозвуковой частью. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 5.
4. Дворецкий В. М. К исследованию пространственных смешанных течений в соплах с несимметричным входом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
5. Пирумов У. Г. Пространственные до- и сверхзвуковые течения в соплах и каналах переменного сечения. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
6. Ransom V. H., Hoffman J. D., Thompson H. D. A second-order bicharacteristics method for the three-dimensional steady, supersonic flow. AIAA Journal, 1972, vol. 10, No. 12. (Рус. перев.: Рэнсом, Гоффман, Томпсон. Метод бихарактеристик второго порядка для расчета пространственного установившегося сверхзвукового течения. Ракетная техника и космонавтика, 1972, т. 10, № 12.)
7. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В. Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 2, 3.
8. Hoffman I. D., Maykut A. R. Gas dynamic gain of supersonic thrust nozzles. J. Spacecraft and Rockets, 1974, vol. 11, No. 10.
9. Пирумов У. Г. К теории маловозмущенных пространственных течений в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.
10. Darwell H. M., Trubridge G. F. Design of Rocket nozzles to reduce gas misalignment. J. Spacecraft and Rockets, 1968, vol. 5, No. 1. (Рус. перев.: Дарвелл, Трубридж. Профилирование сопел ракетных двигателей с точки зрения уменьшения несимметричности истечения. Вопр. ракетн. техн., 1968, № 8.)
11. Walters A. G. Non-symmetric flow in Laval type nozzles. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1972, vol. A273, No. 1232. (Рус. перев.: Уолтерс. Несимметричные течения в соплах Лавалья. Вопр. ракетн. техн., 1974, № 8.)
12. Бобович А. Б., Корнилович В. Б., Маслов Б. Н., Шишков А. А. Экспериментальное исследование асимметричных сопел Лавалья. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 2.
13. Пирумов У. Г., Росляков Г. С., Сухоруков В. П. Исследование сверхзвуковых течений в конических соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
14. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. Усп. матем. наук, 1952, т. 7, вып. 6.
15. Росляков Г. С., Сухоруков В. П. Разностный метод для расчета течений газа с разрывами. В сб. Вычисл. методы и программирование, вып. 19. М., Изд-во Моск. ун-та, 1972.
16. Росляков Г. С. Двумерное течение газа в трубе переменного сечения. Тр. секции по численным методам в газовой динамике 2-го Междунар. colloквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем. Новосибирск, 1969. Т. 2, М., Изд-во Вычисл. центра АН СССР, 1971.
17. Rao G. V. R. Exhaust nozzle contour for optimum thrust. JET Propulsion, 1958, vol. 28, No. 6.
18. Мельников Д. А., Пирумов У. Г., Сергиенко А. А. Сопла реактивных двигателей. В кн. Аэромеханика и газовая динамика. М., «Наука», 1976.
19. Антонов А. Н. Расчет взаимодействия турбулентного пограничного слоя с внешним сверхзвуковым потоком за уступом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.