МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1980

УДК 532.58

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА МАЛОЕ ТЕЛО С ДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ И ПЛОСКОМ ОДНОРОДНО-ЗАВИХРЕННОМ ПОТОКАХ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

С. Д. ВИЛЬХОВЧЕНКО, Ю. Л. ЯКИМОВ

(Москва)

В [1, 2] приведены формулы для гидродинамических реакций, действующих на тело с деформирующейся поверхностью в произвольном потенциальном потоке, в виде интегралов по поверхности тела, подынтегральные выражения которых зависят от скорости жидкости. Эти формулы принимают простой вид, когда жидкость на бесконечности покоится и занимает всю область вне тела, и выражаются через присоединенные массы и кинематические параметры движения тела – поступательную и угловую скорости. Этот результат был обобщен Л. И. Седовым на случай поступательного нестационарного потока в бесконечности [1] еще в 1934 г.

Представляет интерес получить выражение для реакций в простом виде, когда поток произволен, а тело мало. Тогда гидродинамические реакции помимо характеристик формы поверхности тела и кинематических параметров его движения зависят еще только от небольшого числа локальных характеристик невозмущенного телом потока. По-видимому, впервые эта постановка дана в работе [3]. Позже постановка была уточнена: введен малый параметр – размер тела, по которому ведется разложение, и расширена введением деформации поверхности тела, а в плоской задаче введением завихренности и циркуляции [4–6]. Отдельные частные задачи ранее были рассмотрены в работах [7–9]. В [3, 4] в выражениях для силы получены не все члены, обусловленные градиентом скорости невозмущенного потока. Необходимость учета этого градиента показана в [10], где решена задача для неподвижного твердого эллипса в потенциальном потоке.

Выражение для момента, действующего на малое твердое тело, было получено в [3, 4], что ускользнуло от внимания авторов последующих работ [1].

Уже из постановки задачи, именно из предположения о наличии только конечного числа параметров, характеризующих локальные свойства невозмущенного потока, и из наличия потенциала, следует существование выражений для реакций в виде многочленов второй степени относительно кинематических параметров движения тела и характеристик потока, коэффициенты которых зависят только от формы поверхности тела. Действительно, потенциал течения может быть представлен в виде линейной комбинации потенциалов, зависящих только от формы поверхности тела, а коэффициентами этой комбинации являются указанные параметры. Давление, определенное на поверхности тела по интегралу Коши – Лагранжа, будет содержать парные произведения этих параметров. Вынося значения параметров из-под знака интеграла, получим, что коэффициенты при них зависят только от формы поверхности тела. Этот путь был фактически реализован для цилиндра и сферы в [5, 6] [2].

В связи с обилием параметров: кинематических параметров движения тела, параметров невозмущенного потока и тем более их парных комбинаций основной явилась проблема рационального представления результата для силы (результат для момента, действующего на твердое тело, в рациональном виде был получен ранее в [3]). Результат для силы в [12] (плоская задача, деформирующийся контур) был представлен при помощи коэффициентов конформного отображения, а в [13, 14] (пространственная задача, твердое тело) – при помощи лагранжиана.

---

[1] В работе [4] решена задача о моменте и при наличии деформации поверхности, однако в окончательной формуле имеется описка – в члене, учитывающем эту деформацию, вместо относительной скорости записана абсолютная скорость.

[2] В работе [6] в окончательном выражении для силы имеется ошибка в коэффициентах. Исправление этой ошибки тем же методом явилось предметом публикации [11] уже после того, как было опубликовано общее решение для произвольного тела с деформирующейся поверхностью.

Одним из авторов настоящей статьи было предложено представить результат для силы в виде [12, 15]

$$(0.1)\qquad -\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{Q}}{dt}-\tau\nabla_0 p+(\mathbf{Q}\nabla_0)\mathbf{v},\qquad \mathbf{Q}=\Lambda(\mathbf{V}-\mathbf{v}_0)+\mathbf{Q}'$$

Здесь $\mathbf{Q}$ – вектор «количества движения», $\mathbf{Q}'$ – «количество движения», связанное только с деформацией поверхности, Λ – тензор присоединенных масс, связанных с поступательным движением тела, $\nabla_0 p$ – градиент давления невозмущенного потока в центре объема тела τ (для плоской задачи – площадь, ограниченная контуром). Справедливость выражения (0.1) при произвольной деформации поверхности тела была доказана в [15].

Указанное выше простое выражение для момента имеет вид

$$-\mathbf{M}=(\mathbf{V}-\mathbf{v}_0)\times\mathbf{Q}$$

Рассмотрим теперь плоские однородно-завихренные потоки. Случай твердого контура рассмотрен в работе [17], однако решение, как и в [12, 16], содержат не все члены, обусловленные циркуляцией. При наличии относительной скорости и циркуляции главным членом в выражении для реакции является сила Жуковского и момент этой силы, приложенный в конформном центре контура. Предельный случай силы, действующей на малый контур, включающий вихревую нить, был рассмотрен в [9]. Следует отметить, что случай постоянной завихренности сводится к случаю потенциальных потоков переходом к вращающейся системе отсчета и добавлением массовых сил инерции.

Таким образом, поставленная задача разрешена для пространственного и потенциального, плоских однородно-завихренных потоков. Из общих соображений следует, что распространение результатов на пространственные вихревые и плоские неоднородно-завихренные потоки в простом виде невозможно, так как структура потока зависит от истории движения самого тела. В отдельных случаях для оценки влияния этих факторов можно привлечь соображения теории размерности [5]. Приближенный учет дополнительных реакций вихревой природы выполнен на основе гипотезы квазистационарности в работе [3].

В настоящей статье подробно изложена постановка задачи о нахождении реакций, действующих на малое тело в произвольном потоке, и разъяснен смысл терминов, получивших распространение в работах последних лет. Ниже изложены следующие результаты [1].

Выражение для силы (0.1) представлено через локальные характеристики невозмущенного потока и формы поверхности тела; обобщено полученное в [3] выражение для момента на случай деформации поверхности тела; для плоской задачи в аналогичном виде получены выражения для реакций при наличии циркуляции и однородной завихренности. Кроме того, исправлен некорректный момент вывода результата работы автора [16], а также указано, что содержащееся в работе [17] утверждение об ошибочности этого результата – неверно.

Формулы выведены в предположении, что параметры, характеризующие локальные свойства потока, заранее известны и внесение тела их не меняет. Однако они могут быть использованы и в случае, когда известно их новое значение в связи с внесением тела. Такое изменение локальных характеристик потока будет происходить в частности, когда имеются границы потока, отличные от поверхности рассматриваемого тела, например плоская стенка.

1. Разъясним смысл употребляемых в статье терминов. Поток при отсутствии в нем рассматриваемого тела будем называть невозмущенным. Невозмущенные потоки предполагаются безграничными. Внесение тела в невозмущенный поток перестраивает последний. Так образованный поток будем называть результирующим. Возмущения, вносимые телом в невозмущенный поток, представляются разностью между результирующим и невозмущенным потоками. Будем предполагать, что возмущения исчезают на бесконечности, а невозмущенные и результирующие потоки являются непрерывными. Прилагательное «невозмущенный» к существительному «поток» будет иногда для краткости опускаться.

Используемые в статье системы координат – инерциальная система отсчета и связанная с телом подвижная система координат – предполагаются декартовыми.

[1] Эти результаты принадлежат С. Д. Вильховченко, а представленный выше обзор написан Ю. Л. Якимовым.

Определим некоторые типы невозмущенных потоков. Поток назовем поступательным, если его поле скоростей является однородным. Поток назовем линейным, если компоненты его поля скоростей являются линейными функциями координат. Аналогично можно определить квадратичный, кубичный потоки и т. д. Поверхность тела будем считать деформирующейся, если она движется относительно подвижной системы координат.

Под размером D тела понимается диаметр множества точек поверхности тела. Гидродинамический момент всегда определяется относительно начала подвижной системы координат. Под гидродинамическими реакциями, действующими на малое тело в каком-либо (невозмущенном) потоке, понимаются асимптотические выржения реакцией, действующих на тело в этом потоке при $D\to 0$ и имеющие точность $o(D^n)$. Число n равно двум для плоских задач и трем — для пространственных. При этом предполагается, что в рассматриваемый момент времени поверхность тела при $D\to 0$ изменяется согласно преобразованию подобия относительно начала подвижной системы координат, а все кинематические параметры задачи: поле скоростей невозмущенного потока, поступательная и угловая скорости движения подвижной системы координат, скорость движения поверхности тела относительно подвижной системы координат (в подобных точках) остаются неизменными. Для плоских задач примем дополнительно, что остается постоянной циркуляция результирующего поля скоростей по контуру тела.

В статье используется правило суммирования, принятое в тензорной алгебре. Если функция зависит только от времени, то ее производная обозначается точкой над знаком функции. Остальные обозначения объясняются в тексте.

2. Рассмотрим класс пространственных потенциальных потоков. Пусть $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей произвольного потока рассматриваемого класса. Здесь и ниже $\mathbf{r}$ — радиус-вектор подвижной системы координат, t — время. В силу потенциальности и непрерывности поля $\mathbf{v}$ его можно разложить в ряд Тейлора с центром в начале подвижной системы координат

$$\mathbf{v}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{v}_k,\qquad \mathbf{v}_k=\frac{1}{k!}(\mathbf{r}\nabla_0)^k\mathbf{v} \tag{2.1}$$

на что указывает ноль в положении нижнего индекса у оператора градиента. Введем следующие частичные суммы $\mathbf{s}_k$ рассмотренного ряда

$$\mathbf{s}_k=\sum_{i=0}^{k}\mathbf{v}_i \tag{2.2}$$

Для рассматриваемого класса потоков методами [1] можно доказать следующие предложения относительно гидродинамических реакций в приближении малого тела:

1) выражение для гидродинамической силы, действующей на малое тело в произвольном потоке, можно получить, опустив малые члены в точном выражении для гидродинамической силы, действующей на тело в линейном потоке $\mathbf{s}_1$, связанном с рассматриваемым потоком;

2) выражение для гидродинамического момента, действующего на малое тело в произвольном потоке, можно получить, опустив малые члены в точном выражении для гидродинамического момента, действующего на тело в поступательном потоке $\mathbf{s}_0$, связанном с рассматриваемым потоком.

Сохраняя только главные члены в точных выражениях для силы, действующей на тело в линейном потоке и для момента, действующего на тело в поступательном потоке [18], получим следующие выражения для гидродинамических реакций в приближении малого тела:

$$(2.3)\qquad \frac{\mathbf{F}}{\rho}=\tau\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}-\left(\frac{\delta\mathbf{I}}{\delta t}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{I}+\mathbf{A}\right)-\left[\left(\mathbf{I}+\mathbf{U}\tau+\frac{\delta\tau\mathbf{r}_c}{\delta t}\right)\nabla_0\right]\mathbf{v}$$

$$(2.4)\qquad \frac{\mathbf{M}}{\rho}=-(\mathbf{U}\times\mathbf{I}+\mathbf{B})$$

$$I_i=\mu_i+U^j\lambda_{ij},\quad \mathbf{U}=\mathbf{V}-\mathbf{v}_0,\quad A_i=\Omega^j\dot{\lambda}_{ij+3}-\frac{1}{2}v^{jk}\dot{\lambda}_{ijk}$$

$$(2.5)\qquad B_i=\dot{\mu}_{i+3}+U^j\dot{\lambda}_{i+3j},\qquad \lambda_{ijk}=\int\limits_\Sigma(\pi_{jk}-\varphi_{jk})\nu_i\,d\sigma$$

$$\mu_\alpha=-\int\limits_\Sigma\varphi_\alpha V_+\,d\sigma,\qquad v^{jk}=\frac{\partial v^j}{\partial x_k}(0,t),\qquad \pi_{jk}=x_jx_k-\delta_{jk}x_q^{\,2}$$

Здесь: $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}$ — соответственно гидродинамические сила и момент; i, j, k=1, 2, 3, τ — объем тела, $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор центра объема тела, $\mathbf{V}$, $\boldsymbol{\Omega}$ — поступательная и угловая скорости движения подвижной системы координат, x_k — координаты этой системы; $\lambda_{\alpha\beta}$ (α, β=1, . . . , 6) — коэффициенты присоединенных масс, отнесенные к плотности жидкости ρ и определяемые в подвижной системе координат; $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела Σ; постоянное число q в формуле, определяющей гармонические полиномы π_{jk}, выбирается произвольным образом среди значений 1, 2, 3; δ_{jk} — символ Кронекера; φ_α и φ_{jk} — решения внешних задач Неймана с граничными условиями на поверхности тела

$$(2.6)\qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu}=\nu_i,\qquad \frac{\partial\varphi_{i+3}}{\partial\nu}=(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nu})_i,\qquad \frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial\nu}=\frac{\partial\pi_{ij}}{\partial\nu}$$

Здесь $V_+\boldsymbol{\nu}$ — скорость движения точек поверхности тела относительно подвижной системы координат. Операторы d/dt и $\delta/\delta t$ определяют производные по времени относительно системы отсчета и подвижной системы координат соответственно.

Полученное решение показывает, что если в случае твердого тела в выражении для гидродинамических реакций в качестве характеристик формы поверхности тела входят лишь присоединенные массы, то в случае деформирующейся поверхности одних лишь присоединенных масс и даже их производных уже недостаточно. Для твердого тела полученный результат согласуется с [14].

3. Рассмотрим класс плоских однородно-завихренных потоков. Невозмущенный поток можно представить в виде суммы поступательной, вихревой и дополняющей их потенциальной составляющих:

$$(3.1)\qquad \mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}+\mathbf{u}$$

Согласно [19], формулы гидродинамических реакций представляются суммой известных слагаемых, не зависящих от потока $\mathbf{u}$, и дополнительным членом, который определяется методами потенциальных потоков указанным ниже образом. Оставляя в сумме известных слагаемых лишь главные, получаем

$$(3.2)\qquad \frac{\mathbf{F}}{\rho}=S\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\left(2\frac{\delta S\mathbf{r}_c}{\delta t}+S\mathbf{U}\right)+\frac{\mathbf{F}'}{\rho}$$

(3.3) $\mathbf{M}=\mathbf{M}'$

Здесь S — площадь, ограниченная рассматриваемым контуром. Дополнительные члены, помеченные штрихом, определяются известными формулами Седова [2] для потенциальных движений жидкости. В этих формулах поступательная и угловая скорости движения подвижной системы координат равны $\mathbf{U}$ и $\mathbf{\Omega}'$, т. е. $\mathbf{U}=\mathbf{V}-\mathbf{v}_0$, $\mathbf{\Omega}'=\mathbf{\Omega}-\boldsymbol{\omega}$, при этом деформационное движение контура остается тем же, что и в исходной задаче, результирующее поле скоростей определяется указанным движением контура в невозмущенном потоке $\mathbf{u}$, а циркуляция γ этого поля связана с циркуляцией Γ результирующего поля скоростей исходной задачи по контуру $\Gamma=\gamma+2\omega S$. Здесь $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{e}_3$, а единичный вектор $\mathbf{e}_3$ ортогонален плоскости течения и определяется векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ базиса подвижной системы координат формулой $\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2$. Из теоремы Томпсона следует, что циркуляция γ изменяется вместе с S: $\dot{\gamma}=-2\omega\dot{S}$. Дополнительные члены $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{M}'$ можно представить в виде суммы двух слагаемых

(3.4) $\mathbf{F}'=\Delta\mathbf{F}+\mathbf{F}^\circ, \quad \mathbf{M}'=\Delta\mathbf{M}+\mathbf{M}^\circ$

где первые слагаемые зависят от циркуляции γ, а вторые не зависят.

Можно показать, что сформулированные выше предположения относительно гидродинамических реакций в приближении малого тела для пространственных потенциальных потоков справедливы и для плоских потенциальных потоков при отсутствии циркуляции результирующего поля скоростей. Учитывая это обстоятельство и результаты предыдущего пункта, получаем для $\mathbf{F}^\circ$ и $\mathbf{M}^\circ$ следующие выражения

$$-\frac{\mathbf{F}^\circ}{\rho}=\frac{\delta\mathbf{I}}{\delta t}+\mathbf{\Omega}'\times\mathbf{I}+\mathbf{A}+\left[\left(\mathbf{I}+\mathbf{U}S+\frac{\delta S\mathbf{r}_c}{\delta t}\right)\nabla_0\right]\mathbf{u} \tag{3.5}$$

$$-\frac{\mathbf{M}^\circ}{\rho}=\mathbf{U}\times\mathbf{I}+\mathbf{B} \tag{3.6}$$

$$A_i=\Omega'\dot{\lambda}_{i6}-\frac{1}{2}u^{jk}\dot{\lambda}_{ijk}, \qquad B=\dot{\mu}_6+U^k\dot{\lambda}_{6k} \tag{3.7}$$

$$\mathbf{\Omega}'=\Omega'\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{B}=B\mathbf{e}_3, \qquad u^{jk}=\frac{\partial u^j}{\partial x_k}(0,t)$$

Остальные величины определяются так же, как и в предыдущем пункте, но с учетом специфики плоской задачи: i, j, $k=1$, 2, а интегралы по поверхности тела заменяются интегралами по его контуру L. В формулах, относящихся к $\Delta\mathbf{F}$, и $\Delta\mathbf{M}$, удобно записывать векторы в виде комплексных чисел. В силу непрерывности и потенциальности поля $\mathbf{u}$ его можно разложить в ряд

$$\bar{u}=c_1z+c_2z^2+\ldots \tag{3.8}$$

где $z=x_1+ix_2$ — комплексное переменное подвижной системы координат. Пусть s_1 и s_2 — частичные суммы этого ряда, содержащие одно и два (первых) слагаемых соответственно. Из формул Л. И. Седова следует, что в приближении малого тела при определении ΔF поток u можно заменить на квадратичный поток s_2, при определении ΔM — на линейный поток s_1, а искомые выражения имеют следующий вид

$$\frac{\Delta F}{\rho}=i\gamma[U-(\overline{c_1a_2}+\overline{c_2a_3})+\dot{a}_2+i\Omega'a_2]+i\dot{\gamma}a_2 \tag{3.9}$$

$$\frac{\Delta M}{\rho}=\gamma\,\mathrm{Re}\left(\overline{U}a_2-c_1a_3-\frac{S}{2\pi}+\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta t}\int\limits_L z\bar{z}\,dw_-\right) \tag{3.10}$$

Здесь dw_-/dz — комплексная скорость чисто циркуляционного обтекания единичной интенсивности твердого контура, совпадающего в рассматриваемый момент с данным. Разложение этой скорости в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$\frac{dw_-}{dz}=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\ldots\right) \tag{3.11}$$

Коэффициенты c_1 и c_2 могут быть вычислены, например, по формулам

$$\begin{gathered} c_1=v^{11}-i(v^{12}+\omega)=u^{11}-iu^{12} \\ c_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v^1}{\partial x_1{}^2}+i\frac{\partial^2 v^2}{\partial x_2{}^2}\right) \end{gathered} \tag{3.12}$$

4. Для случая твердого контура сравнение полученного решения с решением работы [17] показывает неполноту решения этой работы в отношении составляющих реакций, зависящих от циркуляции. Для удобства сравнения преобразуем выражения для ΔF и ΔM и проанализируем их. Коэффициенты a_2, a_3 можно выразить через коэффициенты ряда Лорана функции $\chi(\zeta, t)$, реализующей конформное отображение внешности единичного круга на внешность рассматриваемого контура в подвижной системе координат, согласно формулам

$$a_2=k_0,\quad a_3=k_0{}^2+2k_{-1}k_1 \tag{4.1}$$

$$\chi(\zeta,t)=k_{-1}\zeta+k_0+\frac{k_1}{\zeta}+\frac{k_2}{\zeta^2}+\ldots,\quad k_{-1}>0 \tag{4.2}$$

а рассматриваемые выражения для случая твердого контура преобразовать к виду

$$\Delta F=i\rho\gamma(V_k-v_k)+\Delta F' \tag{4.3}$$

$$\Delta M=\rho\gamma\,\mathrm{Re}\,[k_0(\overline{U}-c_1k_0)]+\Delta M' \tag{4.4}$$

$$\Delta F'=-i\rho\gamma\overline{c_2a_3'},\qquad \Delta M'=-\rho\gamma\,\mathrm{Re}\,(c_1a_3') \tag{4.5}$$

$$a_3=k_0{}^2+a_3' \tag{4.6}$$

Здесь V_k — скорость конформного центра k_0 контура, v_k — скорость невозмущенного потока в конформном центре. Первый член в формуле для ΔF, как и в классическом случае движения твердого контура в неподвижной жидкости, можно назвать силой Жуковского. К ней сводится выражение для ΔF в случае движения твердого контура в линейном потоке. В приближении малого тела появляется еще дополнительный член $\Delta F'$. Первый член в формуле для ΔM представляет собой момент силы Жуковского, приложенной в конформном центре. При движении твердого контура в поступательном потоке выражение для ΔM сводится к одному лишь моменту силы Жуковского. В случае линейного потока и в приближении малого тела появляется еще дополнительный член $\Delta M'$. Сравнение выражений (4.3)—(4.6) с выражениями зависящих от циркуляции составляющих реакций работы [17] показывает, что в последней не были получены члены $\Delta F'$ и $\Delta M'$, отличные от силы Жуковского и момента этой силы. Коэффициент a_3' может быть отличен от нуля даже для симметричного контура. Так, для эллипса с полуосями l_1 и l_2

$$k_{-1}=\frac{l_1+l_2}{2},\quad k_1=\frac{l_1-l_2}{2},\quad a_3'=2k_{-1}k_1=\frac{1}{2}(l_1^2-l_2^2) \tag{4.7}$$

Поэтому и дополнительные члены вообще отличны от нуля. Пусть, например, сдвиговой поток, т. е. поток, имеющий в некоторой декартовой системе координат следующее поле скоростей

$$v^1=v^1(0,t)-2\omega x_2,\quad v^2=0$$

обтекает эллипс под углом атаки α. Тогда из полученных формул следует

$$\Delta M'=-\rho\gamma\omega\frac{l_1^2-l_2^2}{2}\sin 2\alpha$$

что совпадает с результатом работы [20].

5. Исправим один некорректный момент вывода результата работы [16]. Там в выражении для давления (2.3) аддитивным образом входят члены $2\omega\psi$ и $(-p_1/\rho)$, каждый из которых является неоднозначной функцией. Поэтому их почленное интегрирование, допущенное в формуле (2.4), является некорректным, на что обратил внимание автора А. Г. Петров. Для вывода правильной формулы следует интегрировать сумму этих членов, которая является уже однозначной функцией, и преобразовать интеграл следующим образом

$$\int_L\left(2\omega\psi-\frac{p_1}{\rho}\right)\nu\,dl=-i\int_L\left(2\omega\psi-\frac{p_1}{\rho}\right)dz=$$

$$=i\int_L z\,d\left(2\omega\psi-\frac{p_1}{\rho}\right)=2i\omega\int_L z\,d\psi-i\int_L z\,d\frac{p_1}{\rho}$$

Поэтому в формуле (2.4) член

$$2\omega\int_L\psi\nu\,dl$$

следует заменить на

$$2i\omega\int_L z\,d\psi$$

а векторы F_1 и I определить формулами

$$F_1=-i\int_L z\,dp_1,\qquad I=-i\int_L z\,d\varphi$$

Остальные формулы [16], в том числе и окончательный результат, остаются без изменений. Заметим, что в [17] результат [16] приведен неверно. Поэтому содержащиеся в [17] анализ и последующее утверждение об ошибочности результата [16] относятся не к нему самому, а к неправильно приведенному в [17] результату. Нетрудно показать, однако, что результат [17] для силы следует из результата [16], если применить последний к случаю твердого контура и пренебречь малыми членами.

Авторы признательны Л. И. Седову за советы и внимание к работе и П. А. Петросяну за обсуждение статьи.

Поступила 19 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1976.
2. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, М., «Наука», 1966.
3. *Григорян С. С., Якимов Ю. Л.* Движение тела малых размеров в воде при наличии «внешнего потока». Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.

4. *Якимов Ю. Л.* Уравнения движения тонкого тела в возмущенном потоке несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.
5. *Якимов Ю. Л.* Движение цилиндра в произвольном плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
6. *Якимов Ю. Л.* Силы, действующие на малую сферу в произвольном потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Науч. тр. НИИ мех. МГУ, 1971, № 9.
7. *Жуковский Н. Е.* Обобщение задачи Бьеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы. Собр. соч., т. 2. Гидродинамика. М.– Л., Гостехиздат, 1949.
8. *Taylor G. I.* The forces on a body placed in a curve or converning stream of fluid. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1928, vol. 120, No. 785.
9. *Седов Л. И.* О силе, вынуждающей вихрь двигаться предназначенным способом. ПММ, 1936, т. 3, вып. 1.
10. *Гуревич М. И.* Аэродинамическое воздействие поезда на малое тело. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
11. *Воинов О. В.* О силе, действующей на сферу в неоднородном потоке идеальной несжимаемой жидкости. ПМТФ, 1973, № 4.
12. *Бармина Л. А.* Сила, действующая на деформируемый контур, движущийся в произвольном потоке жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1.
13. *Воинов О. В., Петров А. Г.* Функция Лагранжа газового пузырька в неоднородном потоке. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 5.
14. *Воинов О. В., Петров А. Г., Воинов В. В.* Гидродинамическое взаимодействие тел в идеальной несжимаемой жидкости и их движение в неоднородных потоках. ПММ, 1973, т. 37, № 4.
15. *Якимов Ю. Л.* Силы, действующие на малое тело в произвольном потоке несжимаемой жидкости и уравнения движения двухфазной среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3.
16. *Вильховченко С. Д.* Движение деформирующегося контура в потоке идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
17. *Петров А. Г.* Реакции, действующие на малое твердое тело в плоско-параллельном вихревом потоке. Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 1
18. *Вильховченко С. Д.* Гидродинамический момент, действующий со стороны линейного потенциального потока идеальной несжимаемой жидкости на движущееся деформирующееся тело. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 5.
19. *Вильховченко С. Д.* Гидродинамическое воздействие на контур со стороны потока идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 1.
20. *Холявко В. И.* Эллиптический цилиндр в вихревом потоке невязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.