МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1980

УДК 532.529.5

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

Я. Д. ЯНКОВ

(Москва)

В работе обсуждается вопрос о макроскопических уравнениях движения двухкомпонентной системы, состоящей из сплошной фазы и большого числа твердых частиц. Полученное автором [1] обобщенное кинетическое уравнение псевдогаза записано в форме, более удобной для расчетов. Методом Чепмена – Энскога найдено решение кинетического уравнения при малых числах Кнудсена и критерии межфазного обмена количеством движения порядка единицы. Благодаря влиянию сплошной фазы тензор напряжения в макроскопических уравнениях сохранения псевдогаза анизотропный. Полученные макроскопические уравнения псевдогаза более общие по сравнению с ранее предложенными [2], что объясняется анизотропностью постоянных времени, входящих в оператор гидродинамического взаимодействия.

1. Кинетическое уравнение. При условии, что плотность вещества твердых частиц намного больше плотности сплошной фазы, в [1] получено кинетическое уравнение самосогласованного типа, которое после нормировки $f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)=nF_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{c}_1, t)$ записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{c}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+\frac{1}{m}\mathbf{G}\frac{\partial t}{\partial \mathbf{c}}=J_{pp}(f)+J_{pf}(f) \tag{1.1}$$

$$J_{pp}(f)=-\int \theta_{1,2}\lim_{\tau\to\infty} S_{-\tau}^{(2)}\left(S_\tau^{(1)}f(\mathbf{x},t)S_\tau^{(1)}f(\mathbf{x}_1,t)\right)d\mathbf{x}_1 \tag{1.2}$$

$$J_{pf}(f)=-\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}}[\Phi_0(\mathbf{v}-\mathbf{c})f]+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial c_\alpha\,\partial c_\beta}(G^{\alpha\beta}f) \tag{1.3}$$

Здесь $J_{pp}(f)$ и $J_{pf}(f)$ характеризуют процесс столкновения между твердыми частицами и влияние жидкости на их движение. Выражения $J_{pp}(f)$ и $J_{pf}(f)$ в дальнейшем будем называть соответственно оператором динамического взаимодействия между твердыми частицами (или только оператором динамического взаимодействия) и оператором гидродинамического взаимодействия твердой частицы с жидкостью (оператором гидродинамического взаимодействия). Таким образом, подчеркивается тот факт, что одночастичная функция распределения существенно изменяется под влиянием двух процессов: столкновения и гидродинамического сопротивления.

Для расчетов гораздо удобнее записать $J_{pp}(f)$ в виде [3]

$$J_{pp}(f)=\iint [f'(\mathbf{r})f_1'(\mathbf{r}+\sigma\mathbf{k})-f(\mathbf{r})f_1(\mathbf{r}-\sigma\mathbf{k})]\sigma^2(\mathbf{gk})\,d^2k\,dc_1 \tag{1.4}$$

где g — относительная скорость твердых частиц, не взаимодействующих с жидкостью, σ — диаметр частиц; k — единичный вектор между центрами частиц в момент столкновения [4]. Отметим, что оператор динамического взаимодействия имеет аналогичный вид, как интеграл столкновения в теории Энскога для плотных газов [4].

При выводе выражения (1.4) воспользовались двумя обстоятельствами: во-первых, твердые частицы являются упругими шариками, во-вторых, что более существенно, теорема Лиувиля о сохранении фазового объема выполняется с такой же точностью, с какой был получен оператор динамического взаимодействия.

2. Макроскопические уравнения сохранения. Средние макроскопические характеристики псевдогаза из твердых частиц определяются следующим образом [2]:

$$n_p=\int f(\mathbf{r},\mathbf{c},t)\,d\mathbf{c},\quad \rho_p=mn_p,\quad n_p\mathbf{u}_p=\int \mathbf{c}f(\mathbf{r},\mathbf{c},t)\,d\mathbf{c} \tag{2.1}$$

$$\frac{3}{2}n_pT_p=\int\frac{1}{2}C^2f(\mathbf{r},\mathbf{c},t)\,d\mathbf{c},\quad C^2=\sum_{\alpha=1}^{3}(c_\alpha-u_{p\alpha})^2 \tag{2.2}$$

и соответственно называются числовой плотностью псевдогаза, плотностью псевдогаза, массовой скоростью и «температурой». Под «температурой» здесь понимается средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы. Ясно, что понятие «температура» существенно отличается от того же понятия в термодинамике. Отметим, что нигде в этой работе теплообмен между частицами или между частицами и жидкостью не рассматривается. Все термодинамические понятия заимствованы для удобства.

Макроскопические уравнения сохранения получаются из кинетического уравнения (1.1) и определений макроскопических характеристик (2.1)–(2.2).

Умножим (1.1) на m, 1, $m\mathbf{c}$, $^1/_2mc^2$ и проинтегрируем по всем значениям скорости. Имея в виду свойства оператора динамического взаимодействия [4], получим уравнения сохранения массы, числовой плотности, количества движения и энергии

$$\frac{1}{\rho_p}\frac{d\rho_p}{dt}=-\nabla\mathbf{u}_p,\qquad \frac{1}{n_p}\frac{dn_p}{dt}=-\nabla\mathbf{u}_p \tag{2.3}$$

$$\frac{d\mathbf{u}_p}{dt}=\frac{1}{m}\mathbf{G}+\Phi_0(\mathbf{v}-\mathbf{u}_p)-\frac{1}{\rho_p}\nabla\mathbf{P} \tag{2.4}$$

$$\frac{dT_p}{dt}=-\frac{2m}{3\rho_p}[\nabla\mathbf{q}+\mathbf{P}:\nabla\mathbf{u}_p]-\frac{2m}{3n_p}\sum_{\alpha=1}^{3}\Phi_{0\alpha}\int C_\alpha^2f\,d\mathbf{c}+\frac{m}{3}\sum_{\alpha=1}^{3}G^{\alpha\alpha} \tag{2.5}$$

где тензор напряжений и вектор «теплового» потока имеют вид ([4], стр. 356)

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2,\qquad \mathbf{P}_1=\int m\mathbf{C}\mathbf{C}f\,d\mathbf{c} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{P}_2=\frac{1}{2}\sigma\int\limits_{\mathbf{g}}\iint\limits_{\mathbf{k}>0}m(\mathbf{c}'-\mathbf{c})ff_1\sigma^2(\mathbf{g}\mathbf{k})\mathbf{k}\,d^2k\,d\mathbf{c}\,d\mathbf{c}_1+ \tag{2.7}$$

$$+\frac{1}{4}\sigma^2\int\limits_{\mathbf{g}}\iint\limits_{\mathbf{k}>0}m(\mathbf{c}'-\mathbf{c})\left(\mathbf{k}ff_1\nabla_r\ln\frac{f}{f_1}\right)\sigma^2(\mathbf{g}\mathbf{k})\mathbf{k}\,d^2k\,d\mathbf{c}\,d\mathbf{c}_1$$

(2.8) $$\mathbf{q}=\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2, \quad \mathbf{q}_1=\frac{1}{2}m\int C^2\mathbf{C}f\,d\mathbf{c}$$

(2.9) $$\mathbf{q}_2=\frac{1}{2}\sigma\int\limits_{\mathbf{g}}\iint\limits_{\mathbf{k}>0}\frac{1}{2}m(C'^2-C^2)ff_1\sigma^2(\mathbf{gk})\mathbf{k}\,d^2k\,d\mathbf{c}\,d\mathbf{c}_1+$$
$$+\frac{1}{4}\sigma^2\int\limits_{\mathbf{g}}\iint\limits_{\mathbf{k}>0}\frac{1}{2}m(C'^2-C^2)\left(\mathbf{k}ff_1\nabla_r\ln\frac{f}{f_1}\right)\sigma^2(\mathbf{gk})\mathbf{k}\,d^2k\,d\mathbf{c}\,d\mathbf{c}_1$$

Все входящие в выражения (2.6)–(2.9) величины берутся в точке $\mathbf{r}$. Отметим, что $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{q}_1$ обусловлены кинетической энергией твердых частиц, а $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{q}_2$ – столкновениями (потенциальной энергией). Вклад столкновений в тензор напряжений и в «тепловой» поток необходимо учитывать в связи с конечным диаметром твердых частиц.

В уравнениях сохранения импульса (2.4) и энергии (2.5), как уже отмечалось в [2], появились дополнительные члены, обусловленные влиянием жидкости на движение твердых частиц. В упомянутой работе неявно сделано предположение, что постоянная времени Φ_0 изотропна. Поскольку здесь такое предположение отсутствует, то третий член в правой части уравнения (2.5) записан в более общем виде. Опережая события, отметим, что анизотропность постоянной времени существенным образом изменит вид тензора напряжений и уравнения сохранения энергии по сравнению с [2].

3. Безразмерная форма кинетического уравнения. Кинетическое уравнение (1.1) с операторами взаимодействия (1.3) и (1.4) записывается в безразмерной форме аналогично уравнению Больцмана [5]. Предполагая, что все члены оператора гидродинамического взаимодействия имеют одинаковый порядок, для кинетического уравнения (1.1) получается следующая безразмерная форма:

(3.1) $$\mathrm{Sh}\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{c}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+\frac{1}{\mathrm{Fr}}\mathbf{G}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}}=\frac{1}{\mathrm{Kn}}J_{pp}(f)+\frac{1}{\mathrm{Nm}}J_{pf}(f)$$

(3.2) $$J_{pf}(f)=-\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}}[\Phi_0(\mathbf{v}-\mathbf{c})f]+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial c_\alpha\,\partial c_\beta}(G^{\alpha\beta}f)$$

$$\mathrm{Sh}=\frac{L}{TU},\quad \mathrm{Fr}=\frac{mU^2}{GL},\quad \mathrm{Kn}=\frac{U}{\pi R^2n_0gL},\quad \mathrm{Nm}=\frac{U^2}{\Phi WL}$$

где Sh – число Струхаля, Fr – число Фруда, Kn – число Кнудсена, Nm – критерий межфазного обмена количеством движения [6]. Здесь приняты следующие характерные значения: для скорости твердых частиц U, времени T, постоянной времени Φ, внешней массовой силы G, относительной скорости твердых частиц g, линейного размера столкновения частиц R, характерного числа частиц в единице объема n_0, относительной скорости между твердыми частицами и жидкостью W.

Число Кнудсена можно представить в виде

(3.3) $$\mathrm{Kn}=\frac{\lambda}{L},\quad \lambda=\frac{U}{\pi R^2n_0g}$$

где λ – средняя длина свободного пробега твердых частиц.

Ввиду безразмерной формы кинетического уравнения псевдогаза (3.1) можно сделать вывод, что критериями подобия являются четыре безразмерные величины: Sh, Fr, Kn, Nm. Однако специально обратим внимание на две из них – Kn и Nm, поскольку они определяют релаксационные процессы в псевдогазе.

4. Слабо разреженный псевдогаз — метод Чепмена — Энскога. Рассмотрим следующий предельный случай: Sh~1 и Nm~1. Такая ситуация наблюдается, например, когда воздух, загрязненный частицами углерода с диаметром порядка 100 *мк*, движется в трубе с диаметром 20 *см* со средней скоростью 74 *см/сек*. Тогда выполняется и другое важное предположение предлагаемой теории, а именно то, что плотность вещества твердых частиц намного больше плотности сплошной фазы [1].

Сделанные предположения показывают, что релаксационные процессы в псевдогазе существенно будут зависеть только от числа Кнудсена. Когда $\mathrm{Kn}\ll 1$, т. е. псевдогаз слабо разреженный, для получения макроскопических уравнений можно воспользоваться хорошо известным методом Чепмена — Энскога для плотных газов [4].

Решение кинетического уравнения (3.1), (1.3) и (1.4) будем искать в виде $f=f^{(0)}+\mathrm{Kn}\, f^{(1)}+\ldots$.

Для $f^{(0)}$ получается интегральное уравнение $J_{pp}(f^{(0)})=0$, решением которого является максвелловская функция распределения

$$f^{(0)}=n_p\left(\frac{m}{2\pi T_p}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mC^2}{2T_p}\right),\qquad \mathbf{C}=\mathbf{c}-\mathbf{u}_p \tag{4.1}$$

Выражения (2.6)–(2.9) для тензора напряжения и теплового потока с учетом (4.1) в нулевом приближении задаются как

$$\mathbf{P}^{(0)}=\left(1+\frac{2}{3}\pi n_p\sigma^3\right)n_pT_p\mathbf{I},\qquad \mathbf{q}^{(0)}=0 \tag{4.2}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор. Для производных по времени от макроскопических величин нетрудно получить

$$\frac{d_0n_p}{dt}=-\nabla\mathbf{u}_p,\qquad \rho_p=mn_p \tag{4.3}$$

$$\frac{d_0\mathbf{u}_p}{dt}=\frac{1}{m}\mathbf{G}+\Phi_0(\mathbf{v}-\mathbf{u}_p)-\frac{1}{\rho_0}\nabla\left(1+\frac{2}{3}\pi n_p\sigma^3\right)n_pT_p \tag{4.4}$$

$$\frac{d_0T_p}{dt}=-\frac{2}{3}\left(1+\frac{2}{3}\pi n_p\sigma^3\right)T_p\nabla\mathbf{u}_p-\frac{2}{3}T_p\sum_{\alpha=1}^{3}\Phi_{0\,\alpha}+\frac{m}{3}\sum_{\alpha=1}^{3}G^{\alpha\alpha} \tag{4.5}$$

Если первое приближение для функции распределения запишем $f^{(1)}=f^{(0)}\varphi^{(1)}$, то для $\varphi^{(1)}$ с учетом (4.3)–(4.5) из (3.1) получим уравнение типа Фредгольма (как в [4])

$$n_p^2I_{pp}(\varphi^{(1)})=-f^{(0)}\left\{\left(1+\frac{2}{3}\pi n_p\sigma^3\right)\left(\frac{mC^2}{2T_p}-\frac{5}{2}\right)\mathbf{C}\nabla\ln T_p+\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{4}{15}\pi n_p\sigma^3\right)\frac{m}{T_p}\left(\mathbf{CC}-\frac{1}{3}C^2\mathbf{I}\right):\mathbf{E}\right\} \tag{4.6}$$

$$E_{\alpha\beta}=\frac{\partial u_{p\alpha}}{\partial r_\beta}-\left(1+\frac{4}{15}\pi n_p\sigma^3\right)^{-1}\left(\frac{m}{2T_p}G^{\alpha\beta}-\Phi_{0\,\alpha}\delta_{\alpha\beta}\right) \tag{4.7}$$

Решением уравнения (4.6) является выражение [4]

$$\varphi^{(1)}=-\frac{1}{n_p}\left\{\left(1+\frac{2}{5}\pi n_p\sigma^3\right)A(\mathbf{C})\mathbf{C}\nabla\ln T_p+\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{4}{15}\pi n_p\sigma^3\right)B(\mathbf{C})\left(\mathbf{CC}-\frac{1}{3}C^2\mathbf{I}\right):\mathbf{E}\right\} \tag{4.8}$$

где $A(\mathbf{C})$ и $B(\mathbf{C})$ удовлетворяют хорошо известным в кинетической теории газа уравнениям, вид которых здесь записывать не будем.

Ввиду (4.8) тензор напряжения и вектор теплового потока в первом приближении задаются выражениями:

$$\mathbf{P}=p\mathbf{I}-\varkappa(\nabla\mathbf{u}_p)\mathbf{I}-2\left[\left(1+\frac{4}{15}\pi n_p\sigma^3\right)^2\eta^{(0)}+\frac{2}{3}\varkappa\right]\mathbf{S} \tag{4.9}$$

$$\mathbf{q}=-\left[\left(1+\frac{2}{5}\pi n_p\sigma^3\right)^2\lambda^{(0)}+\frac{3\varkappa}{2m}\right]\nabla T_p \tag{4.10}$$

где тензор $\mathbf{S}$ — бездивергентная часть тензора $\mathbf{E}$. Так как для твердых сфер [4]

$$\eta^{(0)}=\frac{5}{16}\left(\frac{mT_p}{\pi}\right)^{1/2}\sigma^{-2},\qquad \lambda^{(0)}=2.522\frac{3}{2m}\eta^{(0)} \tag{4.11}$$

выражения для коэффициента объемной вязкости, сдвиговой вязкости и «теплопроводимости» псевдогаза имеют следующий вид:

$$\varkappa=1.002\left(\frac{2}{3}\pi n_p\sigma^3\right)^2\eta^{(0)} \tag{4.12}$$

$$\eta=\left[1+\frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}\pi n_p\sigma^3\right)+0.7614\left(\frac{2}{3}\pi n_p\sigma^3\right)^2\right]\eta^{(0)} \tag{4.13}$$

$$\lambda=\left[1+\frac{6}{5}\left(\frac{2}{3}\pi n_p\sigma^3\right)+0.7574\left(\frac{2}{3}\pi n_p\sigma^3\right)^2\right]\lambda^{(0)} \tag{4.14}$$

Гидростатическое давление p равно

$$p=\left(1+\frac{2}{3}\pi n_p\sigma^3\right)n_pT_p \tag{4.15}$$

Компоненты тензора $\mathbf{S}$ ввиду (4.7) принимают форму

$$\begin{aligned}S_{\alpha\beta}={}&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{p\alpha}}{\partial r_\beta}+\frac{\partial u_{p\beta}}{\partial r_\alpha}\right)-\frac{1}{3}\nabla\mathbf{u}_p\delta_{\alpha\beta}+\left[2\left(1+\frac{4}{15}\pi n_p\sigma^3\right)\right]^{-1}\times\\&\times\left[\Phi_{0\,\alpha}\delta_{\alpha\beta}+\Phi_{0\,\beta}\delta_{\alpha\beta}-\frac{m}{2T_p}(G^{\alpha\beta}+G^{\beta\alpha})\right]-\\&-\left[3\left(1+\frac{4}{15}\pi n_p\sigma^3\right)\right]^{-1}\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\Phi_{0\,\alpha}\delta_{\alpha\beta}-\frac{m}{2T_p}G^{\alpha\alpha}\right)\right]\delta_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{4.16}$$

Как уже отмечалось, из-за отсутствия предположения об изотропности постоянной времени в (4.16) и, следовательно, в тензоре напряжения появились члены, содержащие $\Phi_{0\alpha}$ ($\alpha=1, 2, 3$). Тензор напряжения в работе [2] таких членов не содержит.

Новые члены добавляются в уравнение энергии (2.7) из-за интеграла в правой части, который в первом приближении равняется

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\Phi_{0\,\alpha}\int C_\alpha^2 f\,d\mathbf{c}=\frac{1}{m}\left[n_pT_p\mathbf{I}-2\left(1+\frac{4}{15}\pi n_p\sigma^3\right)\eta^{(0)}\mathbf{S}\right]:\mathbf{\Phi} \tag{4.17}$$

где $\mathbf{\Phi}$ — тензор с компонентами $\Phi_{\alpha\beta}=\Phi_{0\alpha}\delta_{\alpha\beta}$ ($\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера).

Система уравнений (2.3) — (2.5) из-за выражений (4.9) — (4.17) замкнутая, так что с ее помощью можно определять макроскопические характеристики слабо разреженного псевдогаза. Эта система дифференциальных уравнений вместе с системой уравнений Навье — Стокса, в которой необходимо учесть влияние твердых частиц на движение жидкости, образуют замкнутую систему уравнений для двухфазной дисперсной системы.

Автор благодарит В. П. Мясникова за постановку задачи и полезное обсуждение.

Поступила 15 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Янков Я. Д.* Кинетическая теория дисперсных систем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 1.
2. *Мясников В. П.* О динамических уравнениях двухкомпонентных систем. ПМТФ, 1967, № 2.
3. *Толмачев В. В.* Основные уравнения кинетической теории газов. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968.
4. *Ferziger J. H., Kaper H. G.* Mathematical theory of transport processes in gases. Amsterdam — London, North-Holl Publ. Co., 1972 (Рус. перев: *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М., «Мир», 1976).
5. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
6. *Soo S. L.* Fluid dynamics of multiphase systems. Toronto — London, Blaisdell Publ. Co., 1967 (Рус. перев.: *Соу С. Л.* Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971).