**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1980**

УДК 532.5

ОДНОМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

А. Л. ГОНОР, В. Н. ЛИХАЧЕВ

(Москва)

Развит эффективный метод решения задачи о нестационарном движении жидкости с плоской, цилиндрической и сферической симметрией [1], основанный на идее разделения области возмущенного движения на две части и использовании сращиваемых асимптотических разложений. Изложены решения типовых задач, связанных с движением поршня, которые позволяют получить решение задач о взрыве в жидкости, колебаниях пузыря и др. Показывается также, что известные решения подобных задач, приведенные, в частности, в книге [2], основанные на акустическом приближении с учетом нелинейных членов, являются некорректными.

Стандартная система уравнений движения и неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}+U\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau}+U\frac{\partial P}{\partial y}+R\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\nu U}{y}\right)=0 \tag{2}$$

Здесь $\nu=0,\ 1,\ 2$ для плоского, осесимметричного и сферического случаев.

Далее для простоты, хотя это и не обязательно, будем исключать из рассмотрения ударные волны и заменять их, если таковые имеются, волнами сжатия. Для жидкости изменение энтропии ничтожно даже для волн весьма большой интенсивности.

Пусть a, p_0, ρ_0 — скорость звука, давление и плотность в невозмущенной среде, $y_s=\psi(\tau)$ — закон движения поршня.

Тогда краевыми условиями будут

$$\begin{gathered} U(y_s,\tau)=\psi'(\tau),\quad U(a\tau,\tau)=0 \\ P(a\tau,\tau)=p_0,\quad R(a\tau,\tau)=\rho_0 \end{gathered} \tag{3}$$

Введем безразмерные переменные

$$u=\frac{U}{\sqrt{p_0}},\quad t=\frac{\tau}{T},\quad x=y\sqrt{\rho_0}/(T\sqrt{p_0}), \tag{4}$$

$$R^1=\frac{R}{\rho_0},\quad p=\frac{P}{p_0},\quad T=\frac{l\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{p_0}}$$

где l — характерная длина.

Используя свойство слабой сжимаемости жидкости, можно ввести малый параметр с помощью разложения уравнения состояния в следующем безразмерном виде:

$$p=1+(R^1-1)+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2P}{d\rho^2}\right)_0\frac{\rho_0^2}{p_0}(R^1-1)^2+\ldots \tag{5}$$

Если принять характерное отклонение плотности от начального значения за малый параметр, то, согласно (5), второй член разложения должен быть порядка единицы и удобно ввести новую функцию для плотности из соотношения

$$R^1=1+\varepsilon\rho,\quad \varepsilon=p_0/(\rho_0 a^2) \tag{6}$$

где ε — малый параметр.

В безразмерных переменных система (1)—(2) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{1+\rho\varepsilon}\frac{\partial\rho}{\partial x}(1+O(\varepsilon^2)) \tag{7}$$

$$\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial x}u+(1+\rho\varepsilon)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\nu u}{x}\right)=0 \tag{8}$$

Структура уравнений (7), (8) такова, что в нулевом приближении они переходят в уравнения движения и неразрывности несжимаемой жидкости, которые для задач с неограниченным объемом жидкости в плоском и цилиндрическом случаях несовместимы с граничными условиями (3). Это обстоятельство не позволяет использовать регулярный метод возмущений для определения последовательных членов разложений. Обычный подход для этих задач состоит в использовании в качестве главных членов акустического приближения, которое затем уточняется нелинейной поправкой в интеграле Коши — Лагранжа. Однако, как будет видно из дальнейшего, такой подход приводит к ошибкам, так как не выявляет вида разложений искомых функций по степеням малого параметра и не дает возможности в рамках единого разложения построить решение краевой задачи во всей области.

С учетом влияния симметрии задачи на выбор масштабов переменных внутри каждой области рассмотрим плоский, цилиндрический и сферический случаи по отдельности.

Плоский поршень. Введем две области возмущенного движения жидкости: внешнюю, простирающуюся от поршня, и внутреннюю, примыкающую к волне. Из анализа уравнений и условий на границе выберем внешние и внутренние масштабы переменных по формулам

$$\rho_e=\rho\sqrt{\varepsilon},\ u_e=u,\ x_i=\sqrt{\varepsilon}x,\ \rho_i=\rho\sqrt{\varepsilon},\ u_i=u$$

Тогда, записав систему (7), (8) в новых переменных, нетрудно показать, что имеют место следующие разложения:

$$\rho_e=\rho_{e_0}+\sqrt{\varepsilon}\rho_{e_1}+\ldots,\quad u_e=u_{e_0}+u_{e_1}\sqrt{\varepsilon}+\ldots$$
$$\rho_i=\rho_{i_0}+\sqrt{\varepsilon}\rho_{i_1}+\ldots,\ u_i=u_{i_0}+\sqrt{\varepsilon}u_{i_1}+\ldots$$

Для нулевых и первых приближений внутреннего и внешнего решений получаются соответственно системы уравнений:

$$\frac{\partial\rho_{e_0}}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u_{e_0}}{\partial t}+u_{e_0}\frac{\partial u_{e_0}}{\partial x}=-\frac{\partial\rho_{e_1}}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u_{e_0}}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\rho_{e_0}}{\partial t}+\frac{\partial u_{e_1}}{\partial x}+\rho_{e_0}\frac{\partial u_{e_0}}{\partial x}+u_{e_0}\frac{\partial\rho_{e_0}}{\partial x}=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial\rho_{i_0}}{\partial t}+\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_i}=0,\quad \frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_i}+\frac{\partial\rho_{i_1}}{\partial x_i}+\rho_{i_0}\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_i}+u_{i_0}\frac{\partial\rho_{i_0}}{\partial x_i}=0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_{i_0}}{\partial t}=-\frac{\partial \rho_{i_0}}{\partial x_i},\qquad \frac{\partial u_{i_1}}{\partial t}+\rho_{i_0}\frac{\partial u_{i_0}}{\partial t}+u_{i_0}\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_i}=-\frac{\partial \rho_{i_1}}{\partial x_i}$$

Отсюда получим двучленное внешнее разложение

$$u_e=g_0(t)+\sqrt{\varepsilon}[-g'(t)x+g_2(t)]$$

(11)

$$\rho_e=g(t)+\sqrt{\varepsilon}[-g_0'(t)x+g_1(t)]$$

где штрих означает производную по безразмерному времени. Внутреннее решение в нулевом приближении имеет вид

(12) $$u_{i_0}=f(x_i-t),\quad \rho_{i_0}=f(x_i-t)$$

Из сращивания одночленного внутреннего разложения с двучленным внешним разложением получим

(13)
$$u_e=\varphi'(t)+\sqrt{\varepsilon}[-x\varphi''(t)+\varphi''(t)\varphi(t)]$$
$$\rho_e=\varphi'(t)+\sqrt{\varepsilon}[-\varphi''(t)x+g_1(t)]$$
$$u_{i_0}=\varphi'(-x_i+t),\quad \rho_{i_0}=\varphi'(-x_i+t)$$

Переходя к характеристическим переменным, можно получить решение системы (10) в виде

$$u_{i_1}=\frac{1}{2}(x_i+t)\varphi''(-x_i+t)\varphi'(-x_i+t)-\omega_1(0)+\omega_1(-x_i+t)$$

$$\rho_{i_1}=\frac{1}{2}(x_i+t)\varphi''(-x_i+t)-\omega_1(0)+\omega_1(-x_i+t)+\frac{\varphi'^2(-x_i+t)}{2}$$

Здесь использовалось условие $\varphi'(0)=0$, налагаемое на начальную скорость поршня.

Сращивая двучленное внутреннее разложение с двучленным внешним, получим

$$\omega_1(t)=\varphi''(t)\varphi(t)-\frac{t}{2}\varphi''(t)\varphi'(t),\qquad g_1(t)=\varphi''(t)\varphi(t)+\frac{1}{2}\varphi'^2(t)$$

Окончательно внешнее и внутреннее разложения примут вид

(14)
$$R=\rho_0\left[1+\frac{\dot\psi(\tau)}{a}-\frac{y\ddot\psi(\tau)}{a^2}+\frac{\ddot\psi\psi}{a^2}+\frac{\dot\psi^2}{2a^2}\right]$$
$$U=\dot\psi(\tau)+\frac{1}{2}\ddot\psi(\tau)[\psi(\tau)-y]$$

(15)
$$R=\rho_0\left[1+\frac{1}{a}\dot\psi\left(-\frac{y}{a}+\tau\right)+\frac{1}{a^2}\psi\left(-\frac{y}{a}+\tau\right)\ddot\psi\left(-\frac{y}{a}+\tau\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2a^2}\dot\psi^2\left(-\frac{y}{a}+\tau\right)\right]$$
$$U=\dot\psi\left(-\frac{y}{a}+\tau\right)+\frac{1}{a}\left[\frac{y}{a}\ddot\psi\left(-\frac{y}{a}+\tau\right)\dot\psi\left(-\frac{y}{a}+t\right)+\right.$$
$$\left.+\ddot\psi\left(-\frac{y}{a}+\tau\right)\psi\left(-\frac{y}{a}+\tau\right)\right]$$

где точка означает дифференцирование по размерному времени.

Сравним полученное решение с акустическим решением. Будем сравнивать величины давления около поршня. Акустическое решение получается, если для потенциала скорости использовать волновое уравнение. Произвольная функция, входящая в решение этого уравнения, находится из условия на поршне, где считается $y_s \ll a\tau$. Давление находится из интеграла Коши – Лагранжа, в котором учитывается нелинейный член. В результате акустическое решение с учетом нелинейных членов дает

$$R=\rho_0\left[1+\frac{1}{a}\dot{\psi}\left(-\frac{y}{a}+\tau\right)-\frac{1}{2a^2}\dot{\psi}^2\left(-\frac{y}{a}+\tau\right)\right] \tag{16}$$

В частности, около поршня при $y\ll a\tau$ из (16) получаем

$$R=\rho_0\left[1+\frac{1}{a}\dot{\psi}(\tau)-\frac{y}{a^2}\ddot{\varphi}(\tau)+\frac{1}{2a^2}\dot{\psi}^2(\tau)\right] \tag{17}$$

Сравнение (14) и (17) приводит к выводу о неправильности этого решения для плоского поршня.

Сравним оба результата с точным решением для случая движения поршня по закону $\varphi=At^2$. Точное решение:

$$R=\rho_0\exp\left[\frac{1}{a}\left(-a+2A\tau+a\sqrt{\frac{4a(A\tau^2-y)}{a^2}+1}\right)\right]$$

Асимптотика (17) дает

$$R=\rho_0\left[1+\frac{2A\tau}{a}-\frac{2Ay}{a^2}+\frac{2A^2\tau^2}{a^2}\right]$$

в то время как асимптотика (14) и точное решение дают

$$R=\rho_0\left[1+\frac{2A\tau}{a}-\frac{2Ay}{a^2}+\frac{4A^2\tau^2}{a^2}\right]$$

Таким образом, квазиакустическое решение, в котором всюду используется волновое уравнение, а в интеграле Коши – Лагранжа учитывается нелинейный член, дает ошибку для давления около поршня, имеющую тот же порядок малости, что и члены, характеризующие распределение давления по пространству. Это связано с тем, что потенциал скорости этим методом определяется неправильно.

Цилиндрический поршень. Вводя внешние и внутренние переменные по формулам

$$x_e=x,\ u_e=u,\ \rho_e=\rho,\ x_i=\sqrt{\varepsilon}x,\ u_i=u/\sqrt{\varepsilon},\ \rho_i=\rho$$

можно показать, что

$$u_i=u_{i_0}+\varepsilon u_{i_1}+\ldots,\qquad \rho_i=\rho_{i_0}+\varepsilon\rho_{i_1}+\ldots \tag{18}$$

$$\frac{\partial u_{i_0}}{\partial t}=-\frac{\partial\rho_{i_0}}{\partial x_i},\qquad \frac{\partial\rho_{i_0}}{\partial t}+\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_i}+\frac{u_{i_0}}{x_i}=0 \tag{19}$$

Вводя далее потенциал скорости Π_{i_0} для u_{i_0}, будем искать решение задачи в известном виде

$$\Pi_{i_0}=-\int_0^{t-x_i}A(\xi)\left[(\xi-t)^2-x_i^2\right]^{-1/2}d\xi \tag{20}$$

Нетрудно показать, что

$$u_{i_0}=-x_i\int\limits_0^{t-x_i}\frac{1}{\xi-t}\left[A'(\xi)-\frac{A(\xi)}{\xi-t}\right][(\xi-t)^2-x_i^2]^{-1/2}d\xi$$

(21) $$\rho_{i_0}=\int\limits_0^{t-x_i}A'(\xi)[(\xi-t)^2-x_i^2]^{-1/2}d\xi$$

Внешнему разложению в нулевом приближении соответствует течение несжимаемой жидкости

(22) $$u_e=\frac{C(t)}{x},\quad C(t)=\varphi'(t)\varphi(t),\quad \rho_e=\left[\frac{C^2}{2x^2}+c'\ln x\right]+R(t)$$

Сращивание скоростей и плотностей дает соответственно

$$A(t)=C(t),\qquad R(t)=C'(t)\ln\frac{2t}{\sqrt{\varepsilon}}+\int\limits_0^t\frac{C'(\xi)-C'(t)}{\xi-t}d\tau$$

Отсюда можно найти плотность около поршня

(23) $$\rho_e=-\frac{C^2(t)}{2x^2}+C'(t)\ln\frac{2t}{x\sqrt{\varepsilon}}+\int\limits_0^t\frac{C'(\xi)-C'(t)}{\xi-t}d\tau$$

В книге [2] приведено решение данной задачи в рамках квазиакустического приближения. Для давления на поршне в [2] получена формула, отличающаяся от (23) третьим членом (см. 4.45 из [2]). Выражение (23) в рамках квазиакустического метода получается автоматически, для чего необходимо найти асимптотическое значение потенциала (20) при $y\ll a\tau$. Потеря нужного члена в [2] связана с тем, что при нахождении асимптотического значения около поршня производной потенциала по времени, входящего в интеграл Коши — Лагранжа (т. е. при $y\ll a\tau$), в этой работе сначала было вычислено асимптотическое значение потенциала, а затем взята производная, в то время как необходимо сначала дифференцировать. Кроме того, неверно ищется асимптотика интеграла (20) для потенциала при $x_i=x\sqrt{\varepsilon}\to 0$.

Сферический поршень. Вводя внешние и внутренние переменные по формулам

$$x_e=x,\ u_e=u,\ \rho_e=\rho,\ u_i=u/\varepsilon,\ x_i=x\sqrt{\varepsilon},\ \rho_i=\rho/\sqrt{\varepsilon}$$

запишем

$$u_i=u_{i_0}+\varepsilon u_{i_1}+\ldots,\ \rho_i=\rho_{i_0}+\varepsilon\rho_{i_1}+\ldots$$

При вычислении давления на поршне с точностью до членов порядка единицы, как и в осесимметричном случае, можно ограничиться нулевым приближением, которое определяется системой уравнений

$$\frac{\partial u_{i_0}}{\partial t}=-\frac{\partial\rho_{i_0}}{\partial x_i},\qquad \frac{\partial\rho_{i_0}}{\partial t}+\frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_i}+\frac{2u_{i_0}}{x_i}=0$$

Одночленные внешние и внутренние разложения

$$u_e=\frac{C(t)}{x^2},\qquad C(t)=\varphi'(t)\varphi^2(t)$$

$$\rho_e=\left[\frac{C'(t)}{x}-\frac{1}{2}\frac{C^2(t)}{x^4}\right]+R(t),\qquad \rho_i=\frac{1}{x_i}f(x_i-t)$$

$$u_i=\frac{1}{x_i}f(x_i-t)+\frac{1}{x_i^2}\int_0^t f(x_i-\tau a)\,d\tau-\frac{1}{x_i^2}\int_0^t f(\tau)\,d\tau+\frac{C_0}{x_i^2}$$

При условии $C(0)=0$ сращивание дает:

$$\rho_i=\frac{1}{x_i}C'(-x_i+t),\qquad u_i=\frac{1}{x_i}C'(-x_i+t)+\frac{1}{x_i^2}C(-x_i+t)$$

$$\rho_e=\left[\frac{C'(t)}{x}-\frac{1}{2}\frac{C^2(t)}{x^2}\right]+\sqrt{\varepsilon}\,C''(t)$$

Данное решение совпадает с нелинейным акустическим решением [2].

Таким образом, показано, что в плоском случае для получения решения с точностью до членов порядка единицы необходимо использовать второе приближение. Квазиакустическое решение дает в этом случае ошибку порядка единицы. В цилиндрическом и сферическом случаях можно для потенциала скорости пользоваться волновым уравнением. Однако в цилиндрическом случае необходимо либо получить точное решение краевой задачи, что весьма затруднительно, либо использовать более точную асимптотику, предложенную выше. Решение, приведенное в [2], не учитывает поправку в выражении для давления, которая имеет тот же порядок малости, что и члены, характеризующие распределение по пространственной координате. В сферическом случае оба решения идентичны.

Поступила 9 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гонор А. Л.* Аналитический метод для неустановившихся одномерных движений жидкости. Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 1.
2. *Наугольных К. А., Рой Н. А.* Электрические разряды в воде. М., «Наука», 1971.
3. *Иоффе А. И., Наугольных К. А., Рой Н. А.* О начальной стадии электрического разряда в воде. ПМТФ, 1964, № 4, 108–113.