

ВЛИЯНИЕ НЕПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ТЕЧЕНИЯ НА РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

С. А. ГАПОНОВ

(Новосибирск)

На основе линейной теории решена задача о развитии двумерных возмущений в пограничном слое сжимаемой жидкости. В отличие от теории устойчивости плоскопараллельных течений в данной работе принимались в расчет наличие в пограничном слое поперечных (относительно направления потока) течений, зависимость осредненных параметров потока от продольной координаты, а также деформация профиля распределения амплитуд возмущений в зависимости от продольной координаты. Расчеты проведены для числа Маха $M=4.5$.

1. Согласно экспериментальным и теоретическим результатам по развитию возмущений в несжимаемом пограничном слое [1-5], степень нарастания возмущений зависит от нормальной к направлению основного потока координаты. Аналогичные результаты были получены и в экспериментах по устойчивости сверхзвукового пограничного слоя [6]. Этот факт связан с зависимостью основных параметров потока от продольной координаты. В силу того что приближенная теория (основанная на предположении плоскопараллельности течения) позволяет определить только некоторое среднее значение степени нарастания возмущений, ее сопоставление с экспериментальными данными носит в основном качественный характер. Для более правильного математического моделирования процесса развития возмущений следует учитывать зависимость параметров течения от продольной координаты. В настоящее время отсутствуют методы решения поставленной задачи в общем случае. При слабой зависимости течения от продольной координаты возможно построение приближенных решений. Успешное построение таких решений для случая несжимаемой жидкости можно найти в [2-5]. В этих теоретических работах и экспериментах [1] показано, что степень нарастания возмущений не может быть определена однозначно для всех параметров возмущенного потока и зависит от нормальной координаты. Известно, что толщина сверхзвукового пограничного слоя меньше дозвукового и соответственно зависимость течения от продольной координаты сильнее. Поэтому поправка к теории устойчивости плоскопараллельных течений, связанная с непараллельностью течения, должна быть больше для случая сверхзвукового пограничного слоя в сравнении с дозвуковым.

2. Линеаризация уравнений Навье — Стокса, неразрывности и теплопроводности относительно двумерных синусоидальных во времени возмущений приводит к рассмотрению системы уравнений

$$(2.1) \quad \left. \frac{\partial z_i}{\partial \eta} \right|_{\xi=\text{const}} - a_{ij} z_j - a_{ij}^1 \left. \frac{\partial z}{\partial \xi} \right|_{y=\text{const}} = \frac{1}{X} b_{ij} z_j$$

Компоненты вектора z — амплитуды колебаний продольной скорости и ее производной по η , нормальной скорости, давления, температуры и ее

производной по η соответственно. Координаты η , ξ связаны с декартовыми координатами x , y соотношениями

$$(2.2) \quad d\eta = \frac{dy}{\delta(x)}, \quad d\xi = \frac{dx}{\delta(x)}, \quad X = \frac{u_e \delta(x)}{v_e}$$

где u_e , v_e — скорость и кинематическая вязкость вне пограничного слоя, а $\delta(x)$ — его толщина. Матрицы $\|a_{ij}^0\|$ и $\|a_{ij}^1\|$ являются функциями осредненных параметров течения, определяемых стационарными уравнениями движения (в рассматриваемом здесь случае уравнениями пограничного слоя), частоты и X . В матрицу $\|b_{ij}\|$ кроме осредненных параметров входят линейно операторы $\partial^2/\partial\xi^2$, действующие на все компоненты вектора z , и оператор $\partial^2/\partial\eta^2$, действующий только на z_3 .

В силу того что развитие возмущений будет рассмотрено в области $X \gg 1$, предполагается малость членов правой части в сравнении с членами левой части. Тем самым предполагается близость решения, определяемого левой частью системы (2.1), к решению полной. К сожалению, строгого обоснования этому нет. Более того, отбрасывание правой части понижает порядок исходной системы из-за наличия в ней второй производной по η от амплитуды возмущений нормальной скорости, $\partial^2 z_3 / \partial \eta^2$. Впервые на повышение порядка системы уравнений устойчивости в связи с наличием этого члена было обращено внимание в [7], где учитывались поперечные течения в пограничном слое и пренебрегалось зависимостью осредненных параметров потока от продольной координаты. Результаты [7] показали, что величина члена, ответственного за повышение порядка системы (оцененная по решению, полученному без его участия), мала. Что касается других членов, то они не являются принципиальными, и большинство из них можно оценить на основе результатов теории устойчивости плоскопараллельных течений.

В системе (2.1) удобно перейти от переменной ξ к переменной X , а от производных при постоянном y к производным при постоянном η (η — автомодельная координата). В соответствии с (2.2)

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \left(\frac{u_e}{2v_e} \right) \left(\frac{d\delta^2}{dx} \right) \frac{\partial}{\partial X}$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \Big|_{y=\text{const}} = \frac{\partial}{\partial X} \Big|_{\eta=\text{const}} - \eta (d(\ln \delta)/dX) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

При рассмотрении развития возмущений в пограничном слое на плоской пластине целесообразно принять $\delta = (v_e/u_e) \sqrt{u_e x/v_e}$. Тогда, используя (2.3) и (2.2), система (2.1) примет вид

$$(2.4) \quad (z_i)_\eta - a_{ij}^0 z_j - \frac{1}{2} a_{ij}^1 (z_j)_X = [b_{ij} z_j - \frac{1}{2} \eta a_{ij}^1 (z_j)_\eta] X^{-1}$$

Решение системы (2.4) записывается в виде [2]

$$(2.5) \quad z_i = z_i^0(X, \eta) \exp(\phi(X))$$

В пограничном слое амплитуда возмущения изменяется слабо в сравнении с фазой $-i\phi(X)$. (В рассматриваемом здесь случае допускаются комплексные значения $\phi(X)$.) Поэтому представляется правомерным допущение

$$(2.6) \quad \left| \frac{\partial^n z_i^0}{\partial X^n} \right| \ll \left| \phi_X \frac{\partial^{n-1} z_i^0}{\partial X^{n-1}} \right|$$

$\omega \cdot 10^3$	$2\alpha_i^m \cdot 10^3$			$\omega \cdot 10^3$	$2\alpha_i^m \cdot 10^3$		
	1	2	3		1	2	3
0.115	0.680	-0.259	-0.262	0.135	0.845	0.763	0.555
0.120	0.601	0.229	0.174	0.140	0.650	0.645	0.350
0.125	0.802	0.591	0.486	0.145	0.172	0.174	0.077
0.130	0.879	0.751	0.593	0.150	-2.58	-3.22	-4.10

На основании (2.5) и (2.6) система (2.4) может быть записана (приближенно) в виде

$$(2.7) \quad (z_j^\circ)_\eta - a_{ij}^\circ z_j - \vartheta_x^{1/2} a_{ij}^1 z_j^\circ = {}^{1/2} a_{ij}^1 (z_j^\circ)_x + [b_{ij}^\circ z_j^\circ - \eta^{1/2} a_{ij}^1 (z_j^\circ)_\eta] X^{-1}$$

Неравные нулю коэффициенты a_{ij}° , a_{ij}^1 и выражения для $b_{ij}^\circ z_j^\circ$ приведены в Приложении.

Потребуем, чтобы решение системы (2.7) удовлетворяло граничным условиям

$$(2.8) \quad z_1 = z_3 = z_5 = 0, \quad y = 0, \quad \eta = \infty$$

В силу того что система (2.7) зависит от малого параметра $1/X$, ее решение целесообразно искать в виде $z_i^\circ = z_i^{\circ\circ} + z_i^{\circ 1}/X + \dots$. Подстановка этого выражения в (2.7) и приравнивание членов одинакового порядка по $1/X$ (предполагается, что $\partial z_i^{\circ\circ}/\partial X \sim 1/X$) приводят к системе

$$(2.9) \quad (z_i^{\circ\circ})_\eta - (a_{ij}^\circ + \vartheta_x^{1/2} a_{ij}^1) z_j^{\circ\circ} = 0$$

$$(2.10) \quad (z_i^{\circ 1})_\eta - (a_{ij}^\circ + \vartheta_x^{1/2} a_{ij}^1) z_j^{\circ 1} = X^{1/2} a_{ij}^1 (z_j^{\circ\circ})_x + b_{ij}^\circ z_j^{\circ\circ} - \eta^{1/2} a_{ij}^1 (z_j^{\circ\circ})_\eta$$

С учетом условий (2.8) отыскание решения системы (2.9) представляет задачу на собственные значения. Ее решение определяет параметрическую зависимость $z^{\circ\circ}$ и ϑ_x от X . Вектор-функция $z^{\circ\circ}$ находится с точностью до произвольной медленно меняющейся функции $A(X)$. Пусть $z^{\circ\circ} = A(X) F^{\circ\circ}$, где $F^{\circ\circ}$ — определенным образом нормированное решение (2.9). Тогда правую часть системы (2.10) можно представить в виде

$$(2.11) \quad f_i = X \frac{dA}{dX} {}^{1/2} a_{ij}^1 F_j^{\circ\circ} + X A^{1/2} a_{ij}^1 (F_j^{\circ\circ})_x + A [b_{ij}^\circ F_j^{\circ\circ} - \eta^{1/2} a_{ij}^1 (F_j^{\circ\circ})_\eta]$$

В силу того что система (2.10) вырожденная, ее решение существует при условии ортогональности правой части f к решению сопряженной к (2.9), (2.8) задаче z^* :

$$(2.12) \quad \sum_{j=1}^6 \int_0^\infty f_j z_j^* d\eta = 0$$

Условие (2.12) позволяет определить логарифмическую производную от $A(X)$.

Таким образом, степень нарастания возмущений может быть определена соотношением

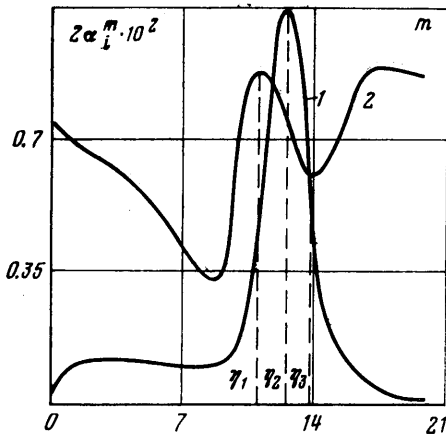
$$(2.13) \quad \alpha_i^j = \text{Real} \left[\frac{(z_j)_x}{z_j} \right] = {}^{1/2} \text{Real} \left[\vartheta_x + \frac{1}{A} \frac{dA}{dX} + \frac{1}{F_j^{\circ\circ}} \frac{dF_j^{\circ\circ}}{dX} \right]$$

в котором производные берутся при постоянном η . Результат, представленный в виде (2.14), аналогичен полученному в [2] и не нуждается в пояснении. Степень нарастания α_i является обобщением соответствующего коэффициента, полученного из теории устойчивости сжимаемых плоскопараллельных течений. Преимуществом принятой здесь теории является то,

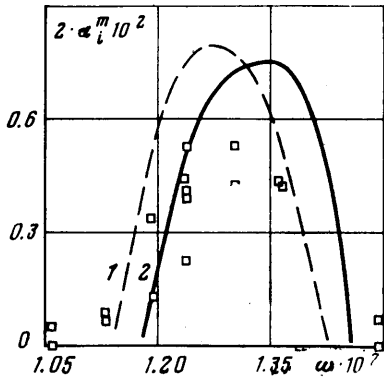
что она учитывает деформацию профилей возмущений при изменении x и позволяет определить зависимость степени нарастания от координаты η .

Тем самым появляется возможность более полной и обоснованной экспериментальной проверки линейной теории развития возмущений.

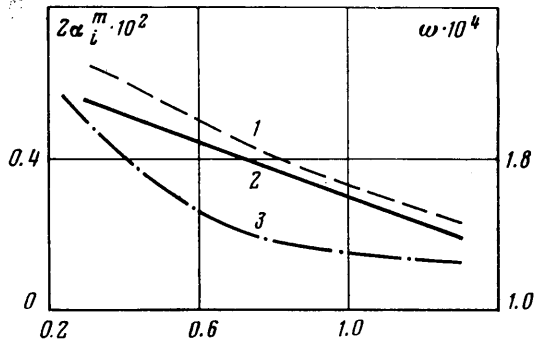
3. Ниже представлены результаты теоретических исследований по развитию двумерных возмущений в пограничном слое при $M=4.5$ и дано сопоставление степени усиления возмущений с экспериментальными данными [8]. В экспериментах расчетное (по соотношениям (2.2)) значение $X = 1410$. Экспериментальное значение толщины пограничного слоя превышало расчетное на 10%. Поэтому в данной работе исследования проводились при $X=1550$. Такая же корректировка принималась в [9] при сопоставлении теоретических ре-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

зультатов (связанных с трехмерными возмущениями) с результатами [8].

На фиг. 1 показана зависимость амплитуды массового расхода (кривая 1) и ее логарифмическая производная по X , $2\alpha_i^m$ (кривая 2) для частоты $\omega = 1.3 \cdot 10^{-4}$. Видно, что степень нарастания возмущений сильно зависит от η . Характерные значения α_i для других частот приведены в таблице. Данные, записанные в колонках 1, 2, 3 — значения α_i^m в координатах η_1, η_2, η_3 соответственно (см. фиг. 1).

На фиг. 2 кривая 1 — реальная часть ϕ_x ; кривая 2 — значения $2\alpha_i^m$ при η_2 (см. фиг. 1). Здесь же приведены экспериментальные данные работы [8]. Причина большого разброса экспериментальных данных может быть объяснена влиянием непараллельности потока в соответствии с результатами, представленными в таблице и на фиг. 1. В экспериментах перемещение датчика происходило при постоянном η , соответствующем максимальному значению показаний термоанемометра — вблизи максимума кривой 1 (фиг. 1). В силу того что пик этой кривой узкий, трудно с надежной точностью контролировать положение датчика. Отклонение положения датчика приводит к тому, что регистрируемая термоанемометром степень нарастания возмущений будет изменяться. Трудностью сопоставления экспериментальных и теоретических данных является также сле-

дующее. Показания термоанемометра зависят не только от колебаний массового расхода, но и от колебаний температуры торможения. Удельный вес каждого из упомянутых колебаний в экспериментах не определялся. В п. 2 уже отмечалось, что в неоднородном потоке (каким является течение в пограничном слое) степень усиления различна для возмущений разных параметров. Поэтому даже при надежной фиксации термоанемометра следует ожидать систематического отклонения экспериментальных и теоретических данных, приведенных на фиг. 2.

На фиг. 3 дана зависимость максимальных по частотам степеней нарастания колебаний массового расхода от безразмерной температуры поверхности. Обозначения аналогичны принятым на фиг. 2. Дополнительная кривая 3 — зависимость частоты ω (соответствующей верхним кривым) от температуры, T_w — температура поверхности, T_0 — температура теплоизолированной поверхности. Как показали расчеты, с увеличением охлаждения степень неоднородности α_i^m по η уменьшается.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$$a_{12}^{\circ} = 1, \quad a_{21}^{\circ} = X^2 \frac{\omega}{v}, \quad a_{23}^{\circ} = X \frac{u_{\eta}}{v}, \quad a_{33}^{\circ} = \frac{T_{\eta}}{T}$$

$$a_{34}^{\circ} = \gamma X \omega M^2, \quad a_{35}^{\circ} = -X \frac{\omega}{T}, \quad a_{43}^{\circ} = X \frac{\omega}{T}$$

$$a_{56}^{\circ} = 1, \quad a_{63}^{\circ} = \sigma X \frac{T_{\eta}}{v}$$

$$a_{64}^{\circ} = (\gamma - 1) M^2 \sigma X \omega \frac{T}{v}, \quad a_{65}^{\circ} = -\sigma X \frac{\omega}{v}$$

$$a_{21}^1 = X \frac{u}{v}, \quad a_{24}^1 = X \frac{T}{v}, \quad a_{31}^1 = -1, \quad a_{34}^1 = -\gamma M^2 u$$

$$a_{35}^1 = \frac{u}{T}, \quad a_{43}^1 = -\frac{u}{T}, \quad a_{64}^1 = -\gamma(\gamma - 1) M^2 a u$$

$$a_{65}^1 = \gamma a u, \quad a = \sigma \frac{X}{\gamma v}$$

$$-b_{24}^{\circ} z_i^{\circ} = \left[u_{\eta} \frac{\eta}{2v} + \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\theta_X^2}{4} \right] z_1^{\circ} + \left[T_{\eta} \frac{\mu_T}{\mu} - \frac{vX}{v} \right] z_2^{\circ} +$$

$$+ \left(T_{\eta} \theta_X \frac{\mu_T}{2\mu} \right) z_3^{\circ} - \gamma M^2 \left(u_{\eta\eta} + T_{\eta} \mu_T \frac{u_{\eta}}{\mu} \right) z_4^{\circ} +$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{T} + \frac{\mu_T}{\mu} \right) u_{\eta\eta} + T_{\eta} u_{\eta} \frac{\mu_T}{T\mu} \right] z_5^{\circ} + \left(u_{\eta} \frac{\mu_T}{\mu} \right) z_6^{\circ} +$$

$$+ \left[\left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\theta_X^2}{2} \right] (z_3^{\circ})_{\eta} + v_{\eta} T_{\eta} \frac{\mu_{TT}}{\mu} z_5^{\circ}$$

$$-b_{34}^{\circ} z_i^{\circ} = \left(T_{\eta} \frac{\eta}{2TX} \right) z_1^{\circ} + \left(u_{\eta} \frac{\eta}{2X} - v \frac{T_{\eta}}{T} + u T_{\eta} \frac{\eta}{2TX} \right) \gamma M^2 z_4^{\circ} +$$

$$+ \left[\left(u_{\eta} \frac{\eta}{2X} - v_{\eta} + 2v \frac{T_{\eta}}{T} - u T_{\eta} \frac{\eta}{TX} \right) \frac{1}{T} \right] z_5^{\circ} - \left(\frac{v}{T} \right) z_6^{\circ} + \gamma M^2 v (z_4^{\circ})_{\eta}$$

$$\begin{aligned}
b_{3i}^{\circ} z_i^{\circ} = & \left(-\frac{v}{T} \right) (z_3^{\circ})_{\eta} - \left(\frac{v_{\eta}}{T} \right) z_3^{\circ} + \left(\frac{v}{TX} \right) \left\{ \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) (z_3^{\circ})_{\eta\eta} + \right. \\
& + \left(\frac{\theta_x^2}{4} \right) z_3^{\circ} + \left[\left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\theta_x}{2} \right] z_2^{\circ} \left. \right\} + \left(\frac{\mu_T}{X} \right) \left\{ \left(2 + \frac{\lambda_T}{\mu_T} \right) T_{\eta} (z_3^{\circ})_{\eta} + \right. \\
& + \frac{\lambda_T}{\mu_T} T_{\eta} \frac{\theta_x}{2} z_1^{\circ} \left. \right\} + \left[\left(\frac{\mu_T}{X} \right) u_{\eta} \frac{\theta_x}{2} \right] z_5^{\circ} \\
- \left(\gamma \frac{v}{\sigma X} \right) b_{3i}^{\circ} z_i^{\circ} = & \left(T_{\eta} \frac{\eta}{2X} \right) z_1^{\circ} + 2\gamma(\gamma-1)M^2 u_{\eta} \left(\frac{v}{X} \right) z_2^{\circ} + \\
& + 2\gamma(\gamma-1)M^2 u_{\eta} v \frac{\theta_x}{2X} z_3^{\circ} + \gamma M^2 \left[-u T_{\eta} \frac{\eta}{2X} - v T_{\eta} - \right. \\
& - \left(-u_{\eta} \frac{\eta}{2X} + v_{\eta} \right) (\gamma-1) T \left. \right] z_4^{\circ} + \left[-u T_{\eta} \frac{\eta}{2TX} + v \frac{T_{\eta}}{T} + \frac{\gamma v \theta_x^2}{4\sigma X} + \right. \\
& + T \gamma M^2 (\gamma-1) u_{\eta}^2 \frac{\mu_T}{X} + \gamma T \mu_T \frac{T_{\eta\eta}}{\sigma X} + \gamma T T_{\eta}^2 \frac{\mu_{TT}}{\sigma X} \left. \right] z_5^{\circ} + \\
& + \left(2T T_{\eta} \gamma \frac{\mu_T}{\sigma X} v \right) z_6^{\circ} - (\gamma-1) T b_{3i}^{\circ} z_i^{\circ}
\end{aligned}$$

Здесь u , v , T — осредненные компоненты скорости и температуры; нижний индекс обозначает либо суммирование (i , j), либо производную по соответствующей переменной (η , T); γ — показатель адиабаты; M — число Маха; σ — число Прандтля; μ , λ — коэффициенты вязкости.

Поступила 2 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Развитие колебаний малой амплитуды в ламинарном пограничном слое. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 5.
2. Bouthier M. Stabilité lineaire des écoulements presque parallèles, pt 2. La couche limite de Blasius. J. Mec., 1973, vol. 12, No. 1.
3. Володин А. Г. Устойчивость плоского пограничного слоя с учетом непараллельности. Изв. СО АН СССР. Сер. техн. н., 1973, № 8, вып. 2.
4. Saric W. S., Nayfeh A. H. Nonparallel stability of boundary-layer flows. Phys. Fluids, 1975, vol. 18, No. 8.
5. Gaster M. On the effects of boundary-layer growth on flow stability. J. Fluid Mech., 1974, vol. 66, pt 3.
6. Laufer J., Vrebalovich T. Stability and transition of a supersonic laminar boundary layer on an insulated flat plate. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, pt 2.
7. Brown W. B. Stability of compressible boundary layers. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 10.
8. Kendall J. M. Boundary layer stability experiments. JPL Space Programs Summary, 1966, vol. 4, No. 37-39.
9. Mack L. M. Viscous and inviscid amplification rates of two- and three-dimensional linear disturbances in the laminar compressible boundary layer. JPL Space Programs Summary, 1966, vol. 4, No. 37-42.