

О НАПРАВЛЕНИИ ПРИСТЕНОЧНЫХ ЛИНИЙ ТОКА В ТРЕХМЕРНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Г. М. БАМ-ЗЕЛИКОВИЧ

(Москва)

Выводятся формулы, позволяющие определить для широкого класса течений направление пристеночных линий тока в трехмерном турбулентном пограничном слое без интегрирования системы уравнений пограничного слоя. Сравнение с имеющимися экспериментами показывает вполне удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных.

Вопросам, связанным с формой профиля скорости в трехмерном пограничном слое, уделялось большое внимание во многих работах. Детальное рассмотрение этих работ приводит к выводу, что одним из наиболее плодотворных путей теоретического построения профиля скорости в трехмерном турбулентном пограничном слое является путь предварительного определения функции $w(u)$ в плоскости годографа [1-8] (u — компонента скорости в направлении линии тока внешнего потока, w — в перпендикулярном направлении, лежащем в касательной плоскости обтекаемой поверхности, т. е. скорость вторичного течения). В имеющихся печатных работах показано, что, задаваясь некоторым числом параметров, можно найти зависимость $w(u)$, хорошо согласующуюся с экспериментальной, практически для любых, сколь угодно сложных течений в пограничном слое. Важнейшим из этих параметров является наклон кривой $w(u)$ у стенки, т. е. тангенс угла β между предельной линией тока и направлением скорости внешнего потока. Этот параметр (или эквивалентный ему) использовался при большинстве построений профиля скорости трехмерного турбулентного пограничного слоя [1-5, 7-9].

Основная трудность и основная задача состоит в том, как по параметрам внешнего потока определить направление предельной линии тока в пограничном слое. Очевидно, что в точной постановке направление предельной линии тока может быть определено только в результате полного решения задачи, т. е. после интегрирования системы дифференциальных уравнений, описывающих движение в трехмерном пограничном слое. Однако при некоторых допущениях можно надеяться получить зависимость $\tan \beta$ от параметров внешнего потока не решая дифференциальных уравнений. Этот путь имеет два основания: во-первых, в настоящее время нет точной системы уравнений, описывающих турбулентное движение в трехмерном пограничном слое; во-вторых, полученные при известных допущениях без решения уравнений конечные формулы показывают в обозримой форме главные связи, главные зависимости характерных особенностей профиля скорости в трехмерном пограничном слое от тех или иных параметров внешнего потока.

1. Рассмотрим факторы, влияющие на величину угла β между предельной линией тока и скоростью внешнего потока. Так как касательная к предельной линии тока совпадает с вектором напряжения трения на стенке τ_w , то, обозначая через τ_{ws} проекцию τ_w на направление скорости внешнего потока U , а через τ_{wn} — на нормаль к U , сможем записать

$$(1.1) \quad \tan \beta = -\tau_{wn} / \tau_{ws}$$

(за положительное направление n выбрано направление от центра кривизны линии тока внешнего потока).

Из общих соображений можно предположить, что при установившемся режиме течения τ_{wn} должно быть пропорционально проекции p_n' градиента давления на нормаль к скорости внешнего потока и толщине δ пограничного слоя

$$(1.2) \quad \tau_{wn} = -a p_n' \delta$$

(так, например, при установившемся течении несжимаемой жидкости в плоском бесконечном канале с постоянным градиентом давления P напряжение трения на стенке равно $\tau_w = 0.5Ph$, где h — высота канала).

Если бы в направлении скорости внешнего потока составляющая градиента давления равнялась бы нулю, то τ_{ws} было бы пропорционально ρU^2 . При наличии составляющей p_s' можно в первом приближении положить

$$(1.3) \quad \tau_{ws} = b\rho U^2 - cp_s'\delta$$

Здесь предположено, что влияние градиента давления вдоль линии тока аналогично влиянию в поперечном направлении. Знак минус перед вторым членом поставлен с тем, чтобы было $c > 0$. Из (1.1) — (1.3) получаем в безразмерных переменных

$$(1.4) \quad \operatorname{tg} \beta = A\xi(\operatorname{tg} \varphi) / (b_1 - \xi)$$

$$\frac{p_s'\delta}{\rho U^2} = \xi, \quad \frac{p_n'}{p_s'} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{a}{c} = A, \quad \frac{b}{c} = b_1$$

Здесь φ — угол между вектором скорости внешнего потока и градиентом давления.

Когда ξ достигает значения ξ_* , проекция напряжения трения в направлении скорости внешнего потока обращается в нуль. Следовательно, необходимо должно быть $b_1 = \xi_*$ и

$$(1.5) \quad \operatorname{tg} \beta = A\xi(\operatorname{tg} \varphi) / (\xi_* - \xi)$$

2. Рассмотрим подробнее множитель пропорциональности в формуле (1.5). Его величина связана с запаздыванием в установлении интенсивности вторичного течения, соответствующей данному значению $\partial p / \partial n$. При наложении поперечного градиента давления пристеночные частицы отклоняются на конечный угол β не мгновенно, а постепенно в процессе своего движения.

Для выяснения характера установления соответствия между углом β и $\partial p / \partial n$ рассмотрим простейший случай, когда, начиная с некоторого сечения, на поток накладывается постоянный по величине и направленный по нормали к линии тока внешнего потока градиент давления. Иначе говоря, когда линии тока внешнего потока переходят от прямолинейных в начальном сечении к окружностям. На практике течение, достаточно близкое к такому, осуществляется в колене, ширина которого мала по сравнению с радиусом кривизны линии тока.

Поскольку градиент давления в этом случае можно считать на всех линиях тока внешнего потока с большой степенью точности одинаковым, постольку в дальнейших рассуждениях можно говорить о движении вдоль линии тока внешнего потока, не различая, о какой конкретной линии идет речь. За время, за которое пристеночная частица сдвинется в направлении линии тока внешнего потока на величину ds , она приобретет тем большую скорость в поперечном направлении, чем больше величина $\partial p / \partial n$, где n — нормаль к линии тока внешнего потока, и чем больше время пребывания на отрезке ds . Но время прохождения отрезка ds будет тем меньше, чем больше увлекающая частицу сила трения в направлении s , которая пропорциональна ρU^2 . Таким образом, возрастание поперечной скорости пристеночных частиц на отрезке ds будет тем больше, чем больше величина $(1/\rho U^2)(\partial p / \partial n)ds$, а на отрезке линии тока внешнего потока от $s=0$ (начальное сечение, где кривизна линий тока внешнего потока равна нулю)

будет тем больше, чем больше значение интеграла

$$\int_0^s \frac{1}{\rho U^2} \frac{\partial p}{\partial n} ds = \int_0^s \frac{\partial \alpha}{\partial s} ds = \alpha$$

где α — угол наклона касательной к линии тока внешнего потока с осью x декартовой системы координат (при $s=0$ считаем $\alpha=0$).

Чем быстрее возрастает скорость поперечного течения, тем быстрее течение выйдет на установившийся режим (т.е. режим, соответствующий данному значению $\partial p/\partial n$). Поэтому множитель в (1.5), характеризующий выход поперечного течения на стационарное, должен быть пропорционален некоторой функции $f(\alpha)$. Эта функция равна нулю при α , равном нулю (в момент наложения поперечного градиента давления вторичное течение отсутствует), при неограниченном возрастании α $f(\alpha)$ должно стремиться к единице. Одной из простейших функций, удовлетворяющих этим свойствам, является функция $f(\alpha) = 1 - \exp(-B\alpha)$.

Коэффициент B можно определить из экспериментов по течению в колене. В работе [10] исследовалось течение в колене с углом поворота 90° . Выход вторичного течения на стационарное состояние происходил при угле α , равном примерно $45-50^\circ$. Требуя, чтобы при этом отличие $f(\alpha)$ от единицы было бы порядка 0.1, получим, что $B \approx 5$. Таким образом получаем

$$(2.1) \quad f(\alpha) = 1 - \exp(-5\alpha)$$

При произвольном течении составляющая градиента давления по нормали к линии тока внешнего потока меняется как при движении вдоль линии тока внешнего потока, так и при переходе от одной линии тока к другой. Поэтому процесс выхода вторичных токов на стационарное состояние, соответствующее заданному $\partial p/\partial n$, имеет сложный характер и не может, вообще говоря, описываться единой конечной формулой. Однако если изменение составляющей градиента давления поперек линии тока внешнего потока достаточно плавно, а вдоль линии тока, кроме того, еще и монотонно, то можно предположить, что в первом приближении формула (2.1) будет описывать процесс установления вторичного течения и в этом случае. Насколько справедливо такое предположение, должно показать сравнение с экспериментальными данными.

Положим $A = A_1 [1 - \exp(-5\alpha)]$, где A_1 — некоторая константа. Величину A_1 определим из сравнения значения $\operatorname{tg} \beta$, вычисленного по формуле (1.5), с данными эксперимента. Воспользуемся снова экспериментом по течению в колене, так как в этих экспериментах можно найти участки заведомо установившегося вторичного течения. Формулу (1.5) запишем в виде

$$(2.2) \quad \operatorname{tg} \beta = A_1 [1 - \exp(-5\alpha)] \delta / R (\xi_s - \xi)$$

Здесь учтено, что $(\partial p/\partial n)/\rho U^2 = 1/R$, где R — радиус кривизны линии тока внешнего потока, а $\xi \operatorname{tg} \varphi = \delta (\partial p/\partial n)/\rho U^2$.

В работе [11] исследовалось течение в колене с поворотом потока на 60° при двух различных радиусах колена, причем отношение ширины канала к радиусу средней линии большей модели было порядка 0.18. При этом, как утверждают авторы, средняя линия с большой степенью точности была линией тока потока вне пограничного слоя. В работе [10] отношение ширины канала к радиусу средней линии равнялось $2/3$. Вследствие этого средняя линия заведомо не была линией тока. Радиус кривизны линии тока, который необходимо подставлять в (2.2), оказывается неизвестным, что делает невозможным сравнение расчетов по формуле (2.2) с данными работы [10].

Итак, примем при использовании данных работы [11] радиус кривизны линии тока равным радиусу средней линии. Так как скорость на средней линии менялась не более чем на 3%, то можно пренебречь составляющей градиента давления в направлении внешнего потока, т. е. положить $\xi=0$. Для определения A_1 возьмем данные в точке с $\alpha=54^\circ$, т. е. там, где вторичное течение было практически установившимся. В работе [11] приведены значения δ^* и $H=\delta^*/\delta^{**}$. Считая профиль скорости пограничного слоя в направлении внешнего потока степенным, найдем, зная H , значение показателя степени n и по значению δ^* и n определим δ

$$(2.3) \quad n=2/(H-1), \quad \delta=(n+1)\delta^*$$

Произведя для указанной выше точки ($\alpha=54^\circ$) вычисления, найдем, что $\delta/R=0.017$. Принимая значение ξ_* , когда за характерный размер принята толщина пограничного слоя δ , равным 0.03 [12], и значение β в соответствии с экспериментом равным 19.1° , получим, что $A_1 \approx 0.6$.

Формула для тангенса угла пристеночной линии тока принимает окончательно вид

$$(2.4) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{0.6[1-\exp(-5\alpha)]\delta \partial p / \partial n}{\rho U^2 (\xi_* - \xi)}$$

3. Для возможности практического использования этой формулы необходимо знать значение ξ_* . При двумерном течении несжимаемой жидкости величина ξ_* постоянна и равна 0.03. Эксперименты показывают, что трехмерность течения в пограничном слое существенно влияет на величину ξ_* . На устойчивость пограничного слоя к отрыву может оказывать влияние ряд факторов и прежде всего такие, как растекание или сгущение линий тока внешнего потока (и соответственно линий тока в пограничном слое), неравномерность вторичного течения, приводящая как бы к отсосу или вдуву в нижнюю часть пограничного слоя.

В настоящее время нет достаточно обширного экспериментального материала по отрыву трехмерного турбулентного пограничного слоя, используя который можно было бы составить достаточно точное представление о величине ξ_* . Поэтому ограничимся пока учетом в простейшей форме влияния растекания или сгущения линий тока на величину ξ_* . Степень растекания линий тока внешнего потока в данной точке можно характеризовать величиной $\partial \alpha / \partial n$. За местный масштаб длины естественно принять толщину пограничного слоя δ . Примем в качестве первого приближения простейшую линейную зависимость ξ_* от $\partial \alpha / \partial n$, т. е. положим

$$(3.1) \quad \xi_* = a_1 \pm a_2 \delta \partial \alpha / \partial n$$

(знак плюс соответствует повороту от U к n в том же направлении, что и от x к z , минус — в противоположном).

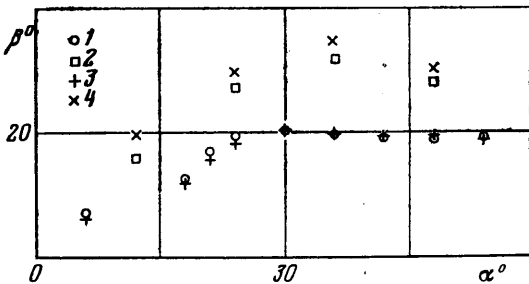
В двумерном турбулентном пограничном слое $\partial \alpha / \partial n = 0$, а $\xi_* = 0.03$. Следовательно, $a_1 = 0.03$. Для определения a_2 воспользуемся результатами эксперимента по обтеканию цилиндра радиуса $R=30.5$ см, стоящего на пластине (ось цилиндра перпендикулярна пластине) [13]. На оси симметрии точка трехмерного отрыва в этих экспериментах находилась в точке с $x/R = -1.90$, т. е. между точками с $x/R = -1.83$ и -1.92 (в которых проводились измерения пограничного слоя). Здесь ось x направлена по направлению скорости набегающего потока, и начало координат помещено в центре цилиндра. Величины δ/R в этих точках были соответственно равны 0.447 и 0.465. Значения p'_z , U , α'_n можно рассчитать по приведенным в [13] данным. Считая, что в точке отрыва значения всех величин с достаточной степенью точности можно вычислить исходя из линейной аппроксимации их значений между указанными точками, получим в искомой точке $\xi = \xi_* = 0.136$, $\delta/R = 0.382$, $R \partial \alpha / \partial n = -0.326$.

Подставляя эти величины в (3.1), найдем $a_2=0.85$. Таким образом, в первом приближении можно положить

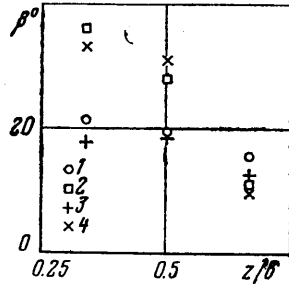
$$(3.2) \quad \xi_* = 0.03 \pm 0.85 \delta \alpha / \partial n$$

Формулы (2.4) и (3.2) позволяют определить при сделанных предположениях угол между пристеночной линией тока и линией тока внешне-го потока, если известно течение вне пограничного слоя.

4. Прежде всего проведем сравнение расчетов по формулам (2.4) и (3.2) с данными работы [11]. В этой работе приведены значения δ^* , $H = \delta^* / \delta^{**}$ и $\text{tg } \beta$, измеренные в различных точках двух моделей, представивших колесо с углом поворота 60° , при двух различных радиусах сред-



Фиг. 1



Фиг. 2

ней линии, равных 1400 и 630 мм. К сожалению, в [11] приведены не все необходимые геометрические размеры моделей. Поэтому для возможности расчета недостающие данные снимались с чертежа или частично брались из [14], в которой использовались части тех же моделей. При расчете принималось, что радиус кривизны линии тока потока вне пограничного слоя равен радиусу окружности, проходящей через соответствующую точку. Расчет толщины пограничного слоя производился по формулам (2.3). При расчете во всех точках пренебрегалось ускорением или торможением потока и поэтому $\xi_* - \xi$ полагалось равным 0.03.

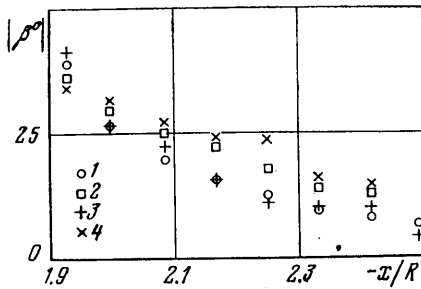
На фиг. 1 символами 1, 3 нанесены значения угла β , взятые из экспериментов [11] и вычисленные по формуле (2.4) для первой модели (радиус средней линии $R=1400$ мм) соответственно. Символами 2 нанесены экспериментальные, а 4 — расчетные значения β для второй модели с радиусом средней линии $R=630$ мм. Фигура 1 показывает вполне удовлетворительное согласие расчета и данных эксперимента, что говорит о том, что формула (2.4) правильно отражает основные факторы, влияющие на угол пристеночной линии тока.

Сравнение при $\alpha=0$ и при $\alpha=60^\circ$ не проводилось в связи с тем, что в эксперименте поперечный градиент давления не возникал и не исчезал внезапно в начальном и конечном сечениях, а передавался вверх и вниз по потоку, вызывая небольшое отклонение пристеночных линий тока и изменения кривизну средней линии тока. Следует еще отметить, что при расчете толщины пограничного слоя в точке $\alpha=48^\circ$ значение H принималось равным экспериментальной величине в точках А и F, расположенных по обе стороны от средней линии, так как величины H в этих точках совпадают между собой, а значение H в точке С, расположенной на средней линии, по непонятной причине сильно отклоняется от них, причем в сторону, не соответствующую общей физической картине течения.

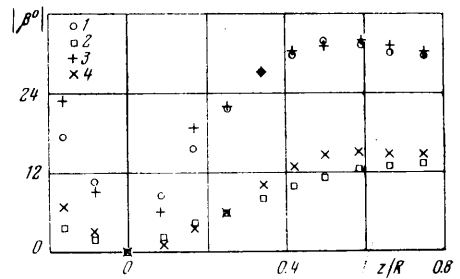
На фиг. 2 приведено изменение угла пристеночной линии тока β в зависимости от отношения расстояния z от внутренней стенки канала к ши-

рине b канала в сечении $\alpha=24^\circ$ первой модели и в сечении $\alpha=48^\circ$ второй модели. Обозначения те же, что и на фиг. 1.

Эти данные интересны потому, что при течении в криволинейном канале (колене) образуется парный вихрь, развитие которого связано со всей конфигурацией канала. Из фиг. 2 видно, что расчет достаточно хорошо улавливает особенности, связанные с большой неравномерностью параметров пограничного слоя по сечению канала, вызванной вторичным течением. Отсюда следует, что в рассматриваемом течении на величину угла пристеночной линии тока в турбулентном пограничном слое основное влия-



Фиг. 3



Фиг. 4

ние, по-видимому, оказывает внешнее течение в малой окрестности данной точки, что и предполагалось при выводе формулы (2.4).

Более сложное и разнообразное течение в пограничном слое происходит при обтекании цилиндра, установленного на пластине [13]. При сравнении с результатами этой работы значения ξ_* рассчитывались по (3.2), значения толщины пограничного слоя δ , c_p и угла α наклона линии тока внешнего потока приведены авторами работы [13] в таблицах. По этим данным рассчитывались все остальные необходимые величины. На фиг. 3, как и прежде, символами 1 и 2 нанесены экспериментально полученные значения β , а 3 и 4 — рассчитанные по формулам (2.4), (3.2). На фиг. 3 приведены значения β в ряде точек вдоль отрезка прямой, параллельной оси симметрии (оси x) и отстоящей от нее на расстоянии $z/R=1/3$ (1 и 3) и $2/3$ (2 и 4) (ось z лежит на пластине и направлена перпендикулярно набегающему потоку). Из фиг. 3 видно, что, несмотря на сложность процесса установления вторичного течения, неоднородность внешнего потока в направлении, перпендикулярном линии тока, значительное торможение при движении вдоль линии тока, расчет по формулам (2.4), (3.2) дает удовлетворительное согласие с опытом вплоть до области в непосредственной близости линии отрыва.

Напомним, что координата точки отрыва на оси симметрии была в этих опытах равна примерно $x/R \approx -1.9$, т. е. линия отрыва находится вблизи последних точек слева на фиг. 3. Диапазон изменения параметров внешнего потока в рассматриваемой области (на рассматриваемых отрезках прямых) можно охарактеризовать следующими цифрами: $R|\partial\alpha/\partial n|$ меняется от 0.088 до 0.193 (в два раза), $R\partial c_p/\partial s$ — от 0.017 до 0.257 (в пятнадцать раз), $R\partial c_p/\partial n$ — от 0.073 до 0.296 (в четыре раза), $\xi_* - \xi$ от 0.056 до 0.017 (в три с лишним раза).

Данные по распределению углов пристеночных линий тока в направлении, перпендикулярном оси симметрии, приведены на фиг. 4.

На фиг. 4 символы 2 и 4 показывают соответственно измеренные в эксперименте и рассчитанные значения $|\beta|$ на линии $x/R = -2.42$, а 1 (эксперимент) и 3 (расчет) — значения $|\beta|$ на линии $x/R = -2$, т. е. вблизи линии отрыва.

Фигура 4 еще раз подтверждает удовлетворительное согласие расчетов по формулам (2.4), (3.2) в области до линии отрыва. Следует отметить, что некоторое отличие данных теории и эксперимента (выпадение отдельных точек) может быть связано с тем, что при расчетах необходимые величины во внешнем потоке ($\partial p/\partial n$, $\partial \alpha/\partial n$) вычислялись по экспериментальным данным о внешнем потоке, а не по формулам обтекания цилиндра идеальной жидкостью, так как течение в опытах работы [13] не вполне соответствовало этим формулам. Вычисление же производных по опытными данным может само вносить заметные погрешности в расчет.

Поступила 29 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Becker E.* Berechnung von Reibungsschichten mit schwacher Sekundärströmung nach dem Impulsverfahren. Z. Flugwiss., 1959, Bd 7, No. 6.
2. *Степанов Г. Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
3. *Johnston J. P.* On three-dimensional turbulent boundary-layer generated by secondary flow. Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engineering, 1960, vol. 82, No. 1.
4. *Prahlad T. S.* A note on the peak of Johnston's triangular model in three-dimensional turbulent boundary layers. Trans. ASME; Ser. I. J. Fluids Engineering, 1976, vol. 98, No. 3.
5. *Shanebrook J. R., Hatch D. E.* Discussion of paper Klinksiak W. F., Pierce F. J. Simultaneous lateral skewing in a three-dimensional turbulent boundary-layer flow. Trans. ASME, Ser. D. J. Basic Engineering, 1970, vol. 92, No. 1.
6. *Shanebrook J. R., Sumner W. J.* Crossflow profiles for compressible, turbulent boundary-layers. J. Aircraft, 1971, vol. 8, No. 3.
7. *Eichelbrenner E. A., Angioletti S., Grellter J. M., Hellerström R. S.* Theoretical investigation and control by measuring tests on the behavior of the three-dimensional turbulent boundary layer on an annular wing at various incidences. Bur. Techn. Zborowski France, Final rept. Clearinghouse Feder. Scient. and Techn. Inform., NAD-428671. S. I., 1963.
8. *Mager A., Mahoney J. J., Budinger R. E.* Discussion of boundary layer characteristics near the wall of an axial-flow compressor. NACA Rep., 1952, No. 1085.
9. *Колесников А. В.* Приближенный метод расчета пространственного пограничного слоя. Тр. ЦАГИ, 1964, вып. 940.
10. *Уханова Л. Н.* Исследование пространственного турбулентного пограничного слоя на торцевой стенке криволинейного канала. В сб. Промышленная аэродинамика. М., «Машиностроение», 1975. Вып. 32.
11. *Francis G. P., Pierce F. J.* An experimental study of skewed turbulent boundary layers in low speed flows. Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engineering, 1967, vol. 89, No. 3.
12. *Бам-Зеликович Г. М.* Расчет отрыва пограничного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
13. *East L. F., Hoxey R. P.* Low-speed three-dimensional turbulent boundary layer data. Aeronaut. Res. Couns. Repts and Mem., 1969 (1971), No. 3653.
14. *Klinksiak W. F., Pierce F. J.* Simultaneous lateral skewing in a three-dimensional turbulent boundary layer flow. Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Eng., 1970, vol. 92, No. 1.