

нике

$$(r\partial\theta/\partial r)_{r=0} = -Q/2\pi$$

Значения η , соответствующие l и L , в данном случае обозначим через η_{li} и η_{Ll} . Тогда решение имеет вид:

1) Фильтрация в увлажненный грунт

$$\theta = \frac{Q}{4\pi} U(\eta^2) + \theta_0$$

Здесь η_{li} определяется из соотношения $U(\eta_{li}^2) = C$. Сравнение с (17) показывает, что $\eta_l > \eta_{li}$.

2) Фильтрация в сухой грунт

$$(24) \quad \theta = \frac{Q}{4\pi} [U(\eta^2) - U(\eta_{Ll}^2)] + \theta_L$$

Здесь $\eta_{Ll} = L/2\sqrt{D't} = \text{const}$ определяется из соотношения $\eta_{Ll}^2 \exp(\eta_{Ll}^2) = B$.

Из сравнения с (21) следует, что $\eta_{Ll} < \eta_L$.

Уравнение (24) при $\theta = \theta_0$, $\eta = \eta_{li}$ дает соотношение для определения η_{li} — безразмерной величины, соответствующей границе зоны полного насыщения:

$$(25) \quad U(\eta_{li}^2) = U(\eta_{Ll}^2) + A/B$$

Сравним η_{li} с η_l . Соотношение (18) может быть представлено в виде $U(\eta_l^2) = U(\eta_{Ll}^2) + A/\eta_L^2 \exp(\eta_L^2)$, а так как $U(\eta_L^2) < U(\eta_{Ll}^2)$ и $\eta_L^2 \exp(\eta_L^2) > B$, то $U(\eta_l^2) < U(\eta_{li}^2)$ и, следовательно, $\eta_{li} < \eta_l$.

Таким образом получаем, что размеры обеих зон, определяемые значениями величин η_{li} и η_{Ll} , меньше размеров зон, определяемых соответственно значениями η_l и η_L . Однако при малых B , как следует из формул (22), (23), (25), оба способа определения границ зон полного и неполного насыщения приводят к одинаковым результатам.

При орошении из реальных увлажнителей конечных размеров вокруг последних может возникать зона полного насыщения. Ориентировочно можно считать, что при поливе с постоянным расходом из горизонтального увлажнителя в момент времени T не образовалась зона полного насыщения, если $l = 2\sqrt{D't} \eta_l < a$, a — радиус увлажнителя.

Поступила 21 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Philip J. R. Theory of Infiltration Advances Hydrosoci, vol. 5. New York — London, 1969.
2. Крамаровская И. И., Новосельский С. Н. Две задачи внутрпочвенного орошения. Докл. АН УзССР, 1977, № 6.
3. Крамаровская И. И. О фильтрации при неполном насыщении в сухой грунт. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 2.

УДК 532.59.2

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНОЙ КАЧКЕ КАТАМАРАНА НА МЕЛКОВОДЬЕ

Ю. Л. ВОРОБЬЕВ

(Одесса)

Проблема расчета качки многокорпусных судов, которые получают широкое распространение в мировом флоте, разработана недостаточно. Некоторые исследования [1, 2] далеки от практической реализации, другие [3] основаны на слишком грубых упрощающих допущениях. Ниже на основании метода работы [4] дано решение гидродинамической задачи о продольной качке катамарана. Получены формулы для потенциала возмущенных скоростей жидкости, волнового демпфирования и возмущающих сил, приведены результаты расчета гидродинамических характеристик.

1. Рассмотрим двухкорпусное судно — катамаран, плавающее без хода по мелководью глубиной h . Введем связанную с судном прямоугольную систему координат xuz , начало которой расположено в точке пересечения невозмущенной свободной поверхности воды, миделя и диаметральной плоскости, ось x направлена в нос, ось y — на правый борт, ось z — вниз.

Диаметралаи S_{01} правого и S_{02} левого корпусов катамарана расположены симметрично относительно плоскости xz , и расстояние между ними равно $2b$. Пусть корпус катамарана совершает симметричные относительно плоскости xz малые колебания так, что

$$(1.1) \quad v_{ne}(x, \pm c_1, z, t) = f_1(x, z) \cos \sigma t, \quad v_{ni}(x_1, \pm c_2, z, t) = f_2(x, z) \cos \sigma t, \\ c_1 = b + y_1, \quad c_2 = b + y_2, \quad y_2 < 0 < y_1$$

Здесь σ — частота колебаний, $v_{ne}(v_{ni})$ — нормальная составляющая скорости наружных (внутренних) поверхностей корпусов катамарана; $y_1 = y_1(x, z)$ — уравнение поверхности наружного борта правого корпуса в системе координат, сдвинутой относительно исходной системы на b вдоль оси y ; $y_2 = y_2(x, z)$ — уравнение поверхности внутреннего борта правого корпуса в этой же системе координат. Аналогично вводится система координат для записи уравнений поверхности бортов левого корпуса. Жидкость считаем идеальной и несжимаемой, а ее возмущенное движение потенциальным. Пусть $\Phi(x, y, z, t)$ — искомый потенциал возмущенных скоростей жидкости.

Представим его в виде

$$(1.2) \quad \Phi(x, y, z, t) = \Phi_c(x, y, z) \cos \sigma t + \Phi_s(x, y, z) \sin \sigma t$$

Потенциалы Φ_c и Φ_s должны удовлетворять следующим условиям на корпусах катамарана:

$$(1.3) \quad \frac{\partial \Phi_c}{\partial n}(x, \pm c_1, z) = f_1(x, z)$$

$$\frac{\partial \Phi_c}{\partial n}(x, \pm c_2, z) = f_2(x, z), \quad (x, z) \in S_0$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial \Phi_s}{\partial n}(x, \pm c_1, z) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial n}(x, \pm c_2, z) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq z \leq h$$

В (1.3) S_0 — проекция S_{0j} ($j=1, 2$) на плоскость xz .

Сложим почленно равенства (1.3). Тогда

$$(1.5) \quad \frac{\partial \Phi_c}{\partial n}(x, \pm c_1, z) + \frac{\partial \Phi_c}{\partial n}(x, \pm c_2, z) = f_1(x, z) + f_2(x, z) = 2w(x, z), \quad (x, z) \in S_0$$

Введем допущение о тонкости корпусов катамарана. Тогда, как это показано в [4] для однокорпусного судна, потенциалы Φ_c и Φ_s должны удовлетворять следующим дифференциальным системам:

$$(1.6) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in E_0$$

$$(1.7) \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\sigma^2}{g} \right) U(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Sigma_0, \quad \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, h) = 0$$

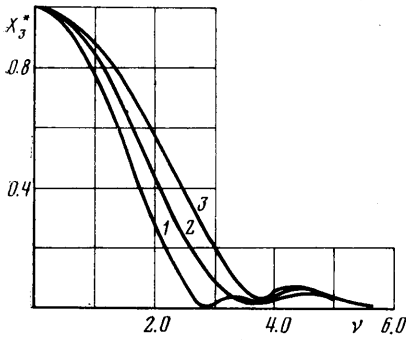
$$(1.8) \quad \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}}} |U(x, y, z)| < C, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \|\text{grad } U(x, y, z)\| = 0, \quad (x, y, z) \in E_0$$

Вследствие тонкости корпусов направления нормалей близки к направлению оси y . Поэтому условия (1.5) и (1.4) следует записать в виде

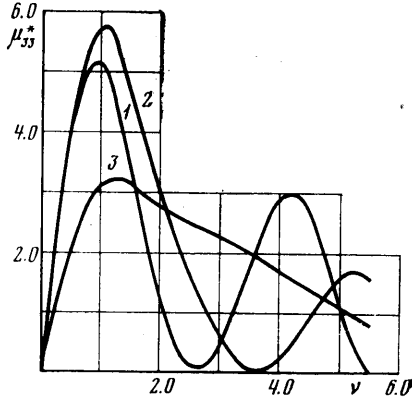
$$(1.9) \quad \frac{\partial \Phi_c}{\partial y} \Big|_{y=\pm(b+0)} - \frac{\partial \Phi_c}{\partial y} \Big|_{y=\pm(b-0)} = 2w(x, z), \quad (x, z) \in S_0$$

$$(1.10) \quad \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \Big|_{y=\pm(b+0)} = \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \Big|_{y=\pm(b-0)} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq z \leq h$$

Здесь область E_0 — часть нижнего полупространства $\{0 \leq z \leq h\}$, ограниченная дном $z=h$, диаметралами S_{0j} и частью Σ_0 плоскости $\{z=0\}$ с исключенными отрезками $\Delta_j = S_{0j} \cap \{z=0\}$ ($j=1, 2$). В плоскостях $y = \pm b$ вне S_{0j} нормальная производная



Фиг. 1



Фиг. 2

потенциала Φ_c непрерывна, и поэтому, положив $f_1(x, z) = f_2(x, z) = 0$ вне S_{0j} , можно считать, что условие (1.9) выполняется всюду при $-\infty < x < \infty$, $0 \leq z \leq h$. Искомый потенциал скоростей должен удовлетворять принципу излучения, согласно которому волны, вызванные колебаниями катамарана и дифракцией набегающих волн, расходятся от судна во все стороны.

2. Используя методику и результаты [4], составляющие искомого потенциала получаем в виде

$$\Phi_c(x, y, z) = \frac{Z_0(z)}{2h} \sum_{j=1}^2 \int_{-L/2}^{L/2} N_0(\alpha_0 R_j) \int_0^T w(\xi, \zeta) Z_0(\zeta) d\zeta d\xi -$$

(2.1)

$$- \frac{1}{\pi h} \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(z) \sum_{j=1}^2 \int_{-L/2}^{L/2} K_0(\alpha_m R_j) \int_0^T w(\xi, \zeta) Z_m(\zeta) d\zeta d\xi$$

(2.2)

$$\Phi_s(x, y, z) = - \frac{Z_0(z)}{2h} \sum_{j=1}^2 \int_{-L/2}^{L/2} J_0(\alpha_0 R_j) \int_0^T w(\xi, \zeta) Z_0(\zeta) d\zeta d\xi$$

(2.3)

$$Z_0(z) = N_0^{-1/2} \operatorname{ch} \alpha_0(z-h), \quad Z_m(z) = N_m^{-1/2} \cos \alpha_m(z-h)$$

(2.4)

$$N_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_0 h}{2\alpha_0 h} \right), \quad N_m = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha_m h}{2\alpha_m h} \right), \quad m=1, 2, \dots$$

Здесь $R_j = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y \mp b)^2}$, причем верхний знак соответствует $j=1$, нижний — $j=2$. Функции $Z_0(z), \dots, Z_m(z)$ образуют полную ортогональную систему на отрезке $[0, h]$, $J_0(u), N_0(u)$ и $K_0(u)$ — бesselова функция 1-го рода, функция Неймана и функция Макдональда соответственно, L и T — длина и осадка катамарана, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ — последовательность действительных положительных корней трансцендентного уравнения (2.5), а α_0 — действительный положительный корень трансцендентного уравнения (2.6)

$$(2.5) \quad \alpha \operatorname{tg} \alpha h + \frac{\sigma^2}{g} = 0$$

$$(2.6) \quad \alpha \operatorname{th} \alpha h - \frac{\sigma^2}{g} = 0$$

Рассмотрим весьма распространенный в практике случай, когда корпуса катамарана одинаковы и симметричны относительно собственных диаметралей S_{0j} . Выпишем асимптотическое при $r \rightarrow \infty$ выражение потенциала $\Phi(x, y, z, t)$, представив его для удобства дальнейшего использования в комплексной форме

$$(2.7) \quad \Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) \exp(i\sigma t)$$

$$(2.8) \quad \varphi(x, y, z) = -\frac{2 \operatorname{ch} \alpha_0(z-h) \operatorname{ch} \alpha_0 h}{\alpha_0 h + \operatorname{sh} \alpha_0 h \operatorname{ch} \alpha_0 h} \sqrt{\frac{2\alpha_0}{\pi r}} [F_s(\theta) - iF_c(\theta)] \times \\ \times \exp \left[i \left(\frac{\pi}{4} - \alpha_0 r \right) \right]$$

$$(2.9) \quad \left. \begin{array}{l} F_c(\theta) \\ F_s(\theta) \end{array} \right\} = \cos(\alpha_0 b \sin \theta) \int_{-L/2}^{L/2} F(\xi) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha_0 \xi \cos \theta) \\ \sin(\alpha_0 \xi \cos \theta) \end{array} \right\} d\xi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$(2.10) \quad F(\xi) = \int_0^x w(\xi, \zeta) (\operatorname{ch} \alpha_0 \zeta - \operatorname{th} \alpha_0 h \operatorname{sh} \alpha_0 \zeta) d\zeta$$

3. Определим возмущающие силы при набегании на катамаран прогрессивных волн малой амплитуды r_b . Следуя методу Хаскинда — Ньюмана [5, 6], вертикальную силу X_3 и момент X_5 вокруг оси y можно представить в виде

$$(3.1) \quad X_p = i\rho\sigma e^{i\sigma t} \int_0^{2\pi} \int_0^h \left(\varphi_0 \frac{\partial \varphi_p}{\partial r} - \varphi_p \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right) r dz d\theta \quad (p=3,5), \quad r \rightarrow \infty$$

$$(3.2) \quad \varphi_p(x, y, z) = ir_b \frac{g \operatorname{ch} \alpha_0(z-h)}{\sigma \operatorname{ch} \alpha_0 h} \exp[-i\alpha_0 r \cos(\theta - \beta)]$$

Здесь $\Phi_0(x, y, z, t) = \varphi_0(x, y, z) \exp(i\sigma t)$ — потенциал набегающего волнения, ρ — плотность жидкости, β — угол между фазовой скоростью волнения и осью x , $\varphi_p(x, y, z)$ — амплитудная часть потенциала скоростей жидкости, вызванных колебаниями катамарана с единичной амплитудой скорости. Учитывая тонкость корпусов, в (2.10) следует принять для вертикальных ($p=3$) и килевых ($p=5$) колебаний соответственно

$$(3.3) \quad w_3(x, z) = \frac{\partial y_1(x, z)}{\partial z}, \quad w_5(x, z) = -xw_3(x, z)$$

Подставляя (2.8), (3.2) в (3.1) и выполняя интегрирование по z , находим

$$(3.4) \quad X_p = -i\rho g r_b \sqrt{\frac{2\alpha_0 r}{\pi}} e^{i(\sigma t + \pi/4)} \int_0^{2\pi} [F_s(\theta) - iF_c(\theta)] [1 - \cos(\theta - \beta)] \times \\ \times \exp\{-i\alpha_0 r [1 + \cos(\theta - \beta)]\} d\theta$$

Интеграл в (3.5) определяется при $r \rightarrow \infty$ методом стационарной фазы [7], и тогда

$$(3.5) \quad X_p = 4i\rho g r_b e^{i\sigma t} [F_s(\beta) + iF_c(\beta)] \quad (p=3, 5)$$

В расчет следует принимать лишь действительную часть (3.5).

Определим волновое демпфирование при вертикальной (μ_{33}) и килевой (μ_{55}) качке катамарана. Используя зависимость волнового демпфирования от амплитуды излучаемых волн на большом удалении от судна [8] и найденное выражение потенциала скоростей $\Phi(x, y, z, t)$, получим формулу для μ_{pp} ($p=3, 5$)

$$(4.1) \quad \mu_{pp} = \frac{4\rho\sigma\alpha_0 \operatorname{ch}^2 \alpha_0 h}{\alpha_0 h + \operatorname{sh} \alpha_0 h \operatorname{ch} \alpha_0 h} \int_{-L/2}^{L/2} F(x) F(\xi) \{J_0[\alpha_0(x-\xi)] + \\ + J_0[\alpha_0\sqrt{(x-\xi)^2 + 4b^2}]\} d\xi dx$$

4. Ниже приведены некоторые результаты расчетов по полученным формулам для катамаранов с разными $b/L=0.1, 0.15$. Корпуса катамаранов симметричны относительно собственных диаметральных плоскостей, имеют коэффициент общей

полноты $\delta=0.6$ и отношение $L/2T=9.377$. На фиг. 1 показана зависимость относительной амплитуды возмущающей силы $X_3^* = |\dot{X}_3|/\rho g r_b w$ при $\beta=120^\circ$, а на фиг. 2 — зависимость коэффициента демпфирования $\mu_{33}^* = (\mu_{33}/\Delta)\sqrt{gL}$ от относительной частоты $\nu = \sigma\sqrt{L}/g$ на мелководье $h/T=1.3$ (w — площадь ватерлинии катамарана, Δ — его весовое водоизмещение). На фигурах кривые 1 соответствуют катамарану, у которого $b/L=0.15$, кривые 2 — катамарану, у которого $b/L=0.1$, а кривые 3 — однокорпусному судну. Приведенные результаты иллюстрируют серьезные различия гидродинамических характеристик катамарана и однокорпусного судна.

Поступила 12 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган Е. М. К гидродинамической теории качки катамарана в жидкости конечной глубины. Тр. Николаевск. кораблестроит. ин-та, 1970, вып. 35.
2. Коган Е. М. К вопросу о качке катамарана на косом волнении. Тр. Николаевск. кораблестроит. ин-та, 1973, вып. 74.
3. Многокорпусные суда. Л., «Судостроение», 1978.
4. Воробьев Ю. Л. Потенциал скоростей жидкости при продольной качке тонкого судна на мелководье. Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 1.
5. Хаскинд М. Д. Гидродинамическая теория качки корабля. М., «Наука», 1973.
6. Newman J. N. The exciting forces on fixed bodies in waves. J. Ship Res., 1962, vol. 6, No. 3.
7. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.

УДК 533.6.011

ДВА МЕТОДА РАСЧЕТА НАГРУЗКИ НА ПОВЕРХНОСТЬ ТОНКОГО ТЕЛА, СОВЕРШАЮЩЕЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

В. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ

(Саратов)

Рассматриваются низкочастотные осесимметричные колебания поверхности тонкого тела в звуковом потоке. Распределение стационарной продольной скорости на теле предполагается линейным. Линейное уравнение с переменными коэффициентами для нестационарной части потенциала скорости решается двумя методами: методом разделения переменных, как это было сделано в [1] для плоского течения, и методом суперпозиции источников. Получены частные решения с требуемой особенностью.

1. Потенциал скорости возмущений медленно изменяющегося со временем околозвукового течения газа удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad [1 - M_\infty^2 - M_\infty^2(\gamma + 1)\varphi_x] \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 2M_\infty^2 \varphi_{xt}$$

Здесь ось x направлена по потоку, x, y, z — безразмерные координаты и время. Поверхность тела задается уравнением

$$r = R(x, t) = R_1(x) + \operatorname{Re}[R_2(x)e^{iht}], \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

Аналогичная задача о расчете давления на поверхность «пульсирующего» тела решалась в [2] при помощи приближенного метода типа метода локальной линейризации.

Если $|R_2| \ll R_1$, то потенциал φ можно приближенно представить в виде

$$\varphi(x, r, t) = \varphi_1(x, r) + \operatorname{Re}[\varphi_2(x, r)e^{iht}]$$

Стационарная часть потенциала φ_1 удовлетворяет нелинейному уравнению, а нестационарная — линейному с переменными коэффициентами

$$(1.2) \quad [(1 - M_1^2)\varphi_{2x}]_x + \varphi_{2rr} + 1/r\varphi_{2r} - 2M_\infty^2 ik\varphi_{2x} = 0$$

$$1 - M_1^2 = 1 - M_\infty^2 - M_\infty^2(\gamma + 1)\varphi_{1x}$$

Условие для скорости на поверхности тела, снесенное на ось, для φ_2 дает

$$(1.3) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r\varphi_{2r} = R_1(R_{2x} + ikR_2) + R_2R_{1x} = \chi(x), \quad 0 < x < 1$$