

Из приведенных данных видно, что даже весьма незначительный нагрев внутреннего электрода ( $\Delta T \approx 0.005$  град) приводит к потере устойчивости при разности потенциалов порядка 1 кВ.

Далее, при  $T_d \rightarrow \infty$  произведение  $E_{d*} T_d = E_{t*}$  стремится к некоторому предельному значению  $E_{t*}(h)$ , зависящему от  $h$ . Эта зависимость  $E_{t*} = E_{t*}(h)$  представлена на фиг. 2, из которой следует, что при достаточно сильном нагреве внутреннего электрода ( $T_d \gg 1$ ) с увеличением радиуса последнего величина критической напряженности уменьшается. Например, для  $\Delta T = 1$  град при  $h = 0.05$  имеем  $E_{01*} = 10.62$  кВ/см при этом  $T_d = 26\,418$ , а при  $h = 0.2$ :  $E_{01*} = 9.82$  кВ/см,  $T_d = 31\,041$ .

Поступила 18 XII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Майбуров С. П., Остроумов Г. А. Электрический ветер в жидкости и его реакция на острие. Электронная обработка материалов, 1967, № 4.
2. Янговский Е. И. Об изотермической электроконвекции. В кн. 8-е Рижское совещание по магнитной гидродинамике, т. 1. Рига, «Зинатне», 1975.
3. Михайлов А. А., Стишков Ю. К. Некоторые электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. Магнитная гидродинамика, 1977, № 2.
4. Мелчер Дж. Электрогидродинамика. Магнитная гидродинамика, 1974, № 2.
5. Atten P., Moreau R. Critère de stabilité hydrodynamique des fluides incompressibles isolants soumis à une injection unipolaire très faible. C. r. Acad. Sci., 1969, t. 269, No. 12.
6. Turnbull R. J. Electroconvective instability with a stabilizing temperature gradient. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 12.
7. Болога М. К., Бурштейн И. Ф., Гросу Ф. П. Неустойчивость термически неоднородного слоя слабопроводящей жидкости в электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
8. Саранин В. А. О конвективной устойчивости слабопроводящей жидкости в электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5.
9. Остроумов Г. А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М., «Наука», 1979.
10. Сканава Г. И. Физика диэлектриков (область слабых полей). М.—Л., Гостехиздат, 1949.
11. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5.
12. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
13. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М., «Наука», 1976.

УДК 532.525

### НЕСИММЕТРИЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА СТРУЕЙ ДОЗВУКОВОЙ И ЗВУКОВОЙ СКОРОСТИ

Н. А. ПОДСЫПАНИНА, Э. Г. ШИФРИН

(Москва)

Рассматривается случай обтекания бесконечного клина струей с дозвуковой или звуковой скоростью на границе, когда критическая линия тока разветвляется в его вершине. Этот режим может реализоваться лишь при определенном (заранее неизвестном) соотношении геометрических параметров. Задача решается в плоскости годографа численным методом [1], развитым применительно к проблеме профилирования сопла Лавала. Решение несимметричной задачи, полученное в плоскости годографа, может быть реализовано физически лишь при определенном соотношении между граничными значениями для функции тока. Это соотношение (обобщающее известную формулу Прандтля [2], выведенную для случая несимметричного обтекания пластины струей несжимаемой жидкости из теоремы импульсов) получено из анализа асимптотики решения вблизи критической точки. Приводятся примеры расчетов.

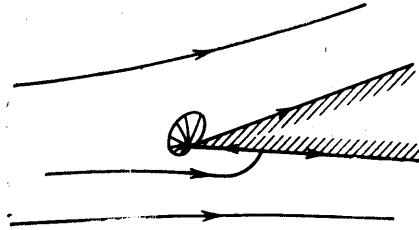
Пусть струя сжимаемого идеального газа обтекает клин, разветвляясь в его вершине. Этот случай исключительный; в общем случае струя обтекает клин, разветвляясь на его боковой стороне с образованием в районе вершины местной сверхзвуковой зоны со скачком уплотнения (фиг. 1). При дозвуковой скорости на границе струя имеет бесконечную протяженность. При звуковой скорости прямые звуковые

линии, отделяющие область двумерного дозвукового течения от равномерных звуковых потоков, устанавливаются на конечном расстоянии от острия клина [3] (фиг. 2).

Геометрическими параметрами течения являются угол раствора  $\beta_0$ , угол наклона  $\beta_1$  оси клина к оси набегающей струи, смещение  $\epsilon$  острия клина относительно оси симметрии набегающей струи.

Образ области течения в плоскости годографа  $\alpha\beta$  является прямоугольником (фиг. 2):  $\alpha_{O_1O_2}=0$ ,  $\beta_{O_1B}=0$ ,  $\beta_{O_2A}=\beta_0$ ,  $\alpha_{AB}\leq(\kappa-1)/(\kappa+1)$  ( $\alpha$  — переменная Чаплыгина,  $\beta$  — угол наклона вектора скорости). Для функции тока  $\psi(\alpha, \beta)$ , подчиняющейся уравнению Чаплыгина, ставятся граничные условия  $\psi=0$  на  $AOB$ ,  $\psi=-1$  на  $BD$ ,  $\psi=C$  на  $AD$ . Сформулированная задача Дирихле имеет единственное ограниченное решение [4], зависящее от параметра  $C$ . Выбор  $C$  определяется следующими соображениями, связанными с физической реализуемостью решения (с однозначностью отображения в физическую плоскость).

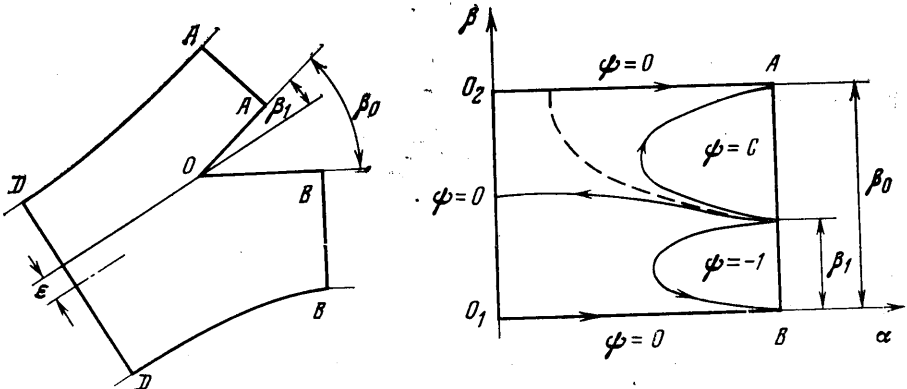
Величина  $C$  представляет собой значение функции тока на одной из границ струи в физической плоскости, причем  $\psi=-1$  на другой границе,  $\psi=0$  на критической линии тока, находящейся внутри струи, если решение  $\psi(\alpha, \beta)$  физически



Фиг. 1

реализуется. Отсюда следует, что  $C > 0$ , и, значит, внутри прямоугольника  $AO_1O_2$  в плоскости годографа имеется линия уровня решения  $\psi=0$ , выходящая из точки  $D$  (узла).

Из принципа максимума и из того, что  $\psi \neq 0$  на открытых промежутках  $AB$ ,  $BD$ , следует, что эта линия другим своим концом опирается на контур  $AO_2O_1B$ . Решение  $\psi(\alpha, \beta)$  может быть физически реализовано, только если эта кривая опирается на контур  $O_1O_2$ . Если это так, из принципа максимума следует, что внутри прямоуголь-



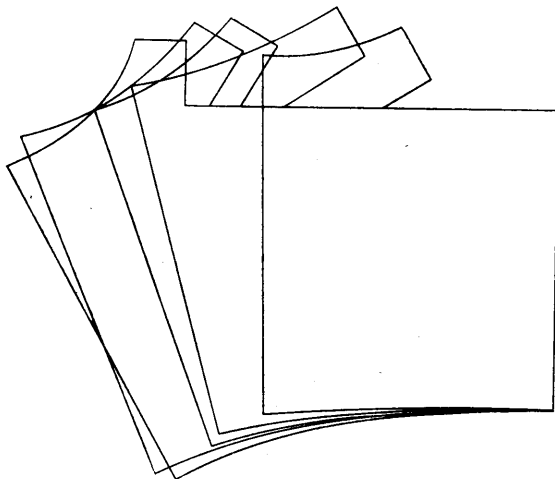
Фиг. 2

ника не существует других линий уровня решения  $\psi=0$ , опирающихся одним концом на прямую  $AO_2$  или на  $BO_1$ , поэтому сформулированное условие не только необходимо, но и достаточно для однозначности отображения решения  $\psi(\alpha, \beta)$  в физическую плоскость. (Неоднозначность отображения может иметь место только при наличии нулей  $\nabla\psi$  — седловых точек линий уровня  $\psi$  — в точках плоскости годографа, не лежащих на прямой  $O_1O_2$  — образе вершины клина. Отсутствие таких точек на кривых  $\psi=0$  указано выше; из принципа максимума легко вывести также отсутствие нулей  $\nabla\psi$  на кривых  $\psi \neq 0$ .)

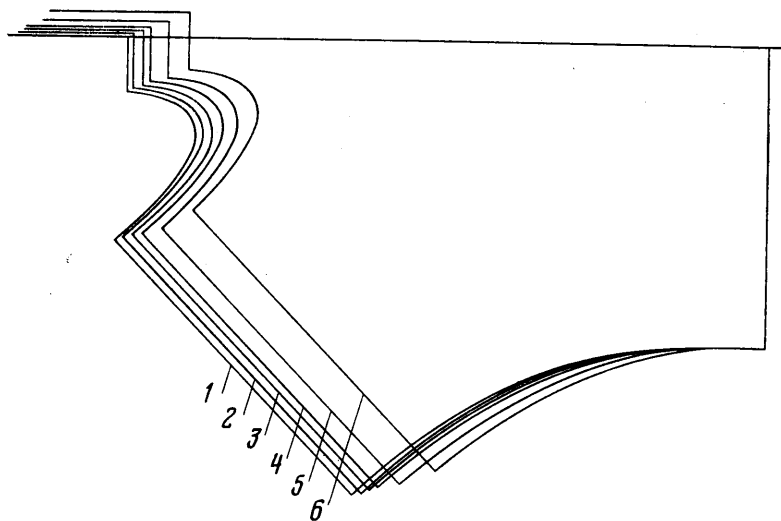
Для математической записи сформулированного условия рассмотрим представление решения в виде ряда [5]

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha^{\pi n / 2 \beta_0} y_n(\alpha) \sin \frac{\pi n \beta}{\beta_0}$$

Здесь  $y_n(\alpha)$  — гипергеометрические функции, использованные Чаплыгиным;  $y_n(\alpha)$  не имеют нулей при дозвуковых и звуковых значениях  $\alpha$  [5].



Фиг. 3



Фиг. 4

В окрестности отрезка  $O_1O_2$  этот ряд дает асимптотическое разложение по степеням  $\alpha$ . Поэтому единственная внутренняя линия уровня  $\psi=0$  будет выходить из отрезка  $O_1O_2$ , тогда и только тогда, когда ряд начинается со второго члена, т. е.  $a_1=0$ ,  $a_2 \neq 0$ . Приравняв нулю первый коэффициент Фурье граничного значения при  $\alpha = \alpha_{AB}$

$$0 = \int_0^{\beta_0} \psi|_{AB} \sin \frac{\pi \beta}{\beta_0} d\beta = - \int_0^{\beta_1} \sin \frac{\pi \beta}{\beta_0} d\beta + C \int_{\beta_1}^{\beta_0} \sin \frac{\pi \beta}{\beta_0} d\beta$$

получим

$$(1) \quad C = tg^2(\pi\beta_1/2\beta_0)$$

Эта формула является обобщением формулы Прандтля ([<sup>2</sup>] стр. 70), выведенной из теоремы импульсов для случая несимметричного обтекания пластины струей несжимаемой жидкости ( $\beta_0 = \pi$ ). Заметим, что вывод из теоремы импульсов не допускает распространения на случай клина  $\beta_0 \neq \pi$ . Интересным свойством формулы (1), так же как и формулы Прандтля, является независимость от фактора сжимаемости.

Если величина  $C$  вычислена по формуле (1), то  $a_2 \neq 0$  и функция  $\psi$  имеет при  $\alpha \rightarrow 0$  асимптотику

$$(2) \quad \psi = a_2 \alpha^{\pi/\beta_0} \sin \frac{2\pi\beta}{\beta_0} + \dots$$

т. е. линия уровня  $\psi = 0$  пересекает  $O_1O_2$  в точке  $\beta = \beta_0/2$ . Это выражает свойство, что в физической плоскости критическая линия тока в вершине клина касается прямой  $y = x \operatorname{tg} \beta_0/2$ , иначе говоря, в главном приближении вблизи точки торможения течения симметрично.

Сформулированная задача Дирихле при  $C$ , определенной по формуле (1), решалась численным методом сеток [<sup>1</sup>]. На фиг. 3 приводятся результаты расчетов обтекания клина струей со звуковой скоростью на границе (границы струй, стороны клина и прямые звуковые линии, отделяющие области равномерных звуковых потоков) при следующих значениях параметров:  $\kappa = 1.4$ ;  $\beta_0 = \pi/6, \pi/3, \pi/2$ ;  $\beta_1/\beta_2 = 1/4, 1/3$ .

Задача решалась без выделения особенностей, возникающих в точках разрыва граничного условия. Сетка так разбивала прямоугольник  $O_1O_2AB$ , чтобы  $\beta_0 = Nh$ ,  $\beta_1 = (M + 1/2)h$ , где  $h$  — шаг сетки по направлению  $\beta$ ;  $N, M$  — целые числа. Граничное значение  $\psi = 0$  задавалось во всех узлах прямых  $\beta = 0; \beta_0$ .

Применявшийся численный метод [<sup>1</sup>] имеет погрешность  $O(h^2)$  на гладких решениях. Однако в рассматриваемой задаче граничная функция разрывна, поэтому, по-видимому, решение задачи в целом имеет несколько большую погрешность. Вопрос о погрешности решения принципиально важен при истолковании результатов расчетов, рассматриваемых вблизи прямой  $O_1O_2$ . В связи с тем что точное решение вблизи этой прямой близок к нулю, погрешность численного решения может оказаться там преобладающей.

Как показали проведенные расчеты, преобладание погрешности над точным решением при сетке  $30 \times 30, 50 \times 50$  или  $70 \times 70$  имеет место на двух — четырех лучах  $\alpha = \text{const}$ ; это выражается в том, что линия уровня  $\psi = 0$  приходит не на отрезок  $O_1O_2$ , а на какую-нибудь из сторон  $O_2A, O_1B$  по второму, третьему или четвертому лучу. При измельчении сетки наблюдалось приближение линии  $\psi = 0$  к требуемому положению. При увеличении угла  $\beta_0$  эффект преобладания погрешности ослабевал; это объясняется уменьшением показателя степени в асимптотическом представлении (2): уровень погрешности решения при увеличении  $\beta_0$  остается примерно неизменным, зато при удалении от  $O_1O_2$  точное решение возрастает быстрее. Следует отметить, что при проведении численного эксперимента выявление этого факта потребовало проведения расчетов с завышенным по сравнению с обычно применяющимся количеством итераций — с целью исключения погрешности, связанной с установлением численного решения.

При расчете несимметричного обтекания пластины ( $\beta_0 = \pi$ ) влияние погрешности наглядно проявляется в том, что стороны  $AO$  и  $BO$  не сливаются в одну прямую при грубой сетке; при измельчении сетки расстояние между прямыми стремится к нулю (на фиг. 4 цифры 1—6 относятся к сеткам  $70 \times 70, 66 \times 66, 62 \times 62, 54 \times 54, 42 \times 42, 30 \times 30$  соответственно).

Условие бесконечности клина относится только к случаю дозвуковой струи; при обтекании звуковой струей требуется только, чтобы клин был достаточно велик.

Полученные результаты, по-видимому, могут оказаться также пригодными для приближенного описания обтекания заостренного тела (близкого к клину) слабосверхзвуковой струей, так как при этом можно ожидать в силу непрерывной зависимости решения от граничных условий близости минимальной области влияния смежного течения в струе (пунктир на фиг. 2) к области дозвукового течения при обтекании звуковой струей.

Поступила 29 XII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Подсыпанина Н. А., Шифрин Э. Г. Об одном методе профилирования коротких плоских сопл. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 1.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 1. М., Физматгиз, 1963.

3. Овсянников Л. В. Об одном газовом течении с прямой линией перехода. ПММ, 1949, т. 13, вып. 5.
4. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., «Наука», 1966.
5. Чаплыгин С. А. О газовых струях. М., Гостехиздат, 1949.
6. Шифрин Э. Г. К задаче течения бесконечного клина сверхзвуковой струей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.

УДК 532.546

## О ПРОТИВОТОЧНОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ПРОПИТКЕ ГИДРОФИЛЬНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

П. В. ИНДЕЛЬМАН, Р. М. КАЦ

(Москва)

С помощью модели двухфазной фильтрации, предложенной в [1], исследуется процесс впитывания смачивающей фазы в гидрофильный образец. Показано, что на некотором интервале времени количество впитавшейся жидкости линейно зависит от  $\sqrt{t}$  ( $t$  — время), что согласуется с результатами лабораторных и теоретических исследований [2–8]. Полученные результаты позволяют судить о характере распределения фаз по полю и о влиянии отношения вязкостей и степени неоднородности образца по проницаемости на интенсивность противоточной пропитки.

1. Рассмотрим процесс противоточной пропитки в области  $D$  прямоугольной формы со сторонами  $l$  и  $b$ , вдоль которых направлены оси координат  $x$ ,  $y$ . К сечению  $x=0$  («вход») области  $D$ , содержащей несмачивающую фазу (нефть), подведем смачивающую фазу (воду), три другие стороны непроницаемы.

Для описания процесса противоточной пропитки воспользуемся моделью двухфазной фильтрации, математическое описание которой и метод решения даны в [1, 9]. На входе области зададим постоянное давление, жидкости предполагаются несжимаемыми, пористость — постоянной, а абсолютная проницаемость — однородным изотропным случайным полем.

$J$	$I=1$	2	3	4	5
15	0.76	0.81	1.13	0.89	1.22
14	0.93	1.18	1.16	0.96	0.71
13	0.95	0.74	0.68	1.25	0.90
12	1.12	1.04	0.84	0.94	0.75
11	0.77	0.89	1.31	1.03	1.31
10	0.75	0.69	0.70	1.26	1.15
9	0.98	0.96	0.86	0.82	0.93
8	0.90	1.22	1.04	1.11	1.04
7	1.06	1.03	0.74	0.99	0.86
6	0.99	0.91	1.20	1.56	0.78
5	0.70	1.01	0.82	0.82	0.97
4	0.86	1.18	0.97	1.09	1.16
3	0.86	1.12	1.09	1.40	1.00
2	0.75	0.69	1.06	1.11	1.36
1	1.32	1.27	1.00	1.26	1.32

Численное моделирование осуществлялось на разностной сетке с числом узлов 15 и 45 вдоль осей  $x$  и  $y$ . Область  $D$  разбивалась на квадратные блоки. Каждому блоку в предположении логнормального закона распределения приписывалось случайное значение проницаемости, независимое от значений проницаемости в остальных блоках. Все расчеты проводились при  $l=5$  см и  $b=15$  см.

Пусть  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — вязкости воды и нефти,  $\sigma$  — межфазное натяжение,  $m$  — пористость,  $k_0$  и  $d$  — среднее значение и среднее квадратическое отклонение поля проницаемости.

Введем безразмерный параметр [2]  $\tau = (a^2/l^2)t$ ,  $a^2 = (\sigma/\mu_2)\sqrt{k_0/m}$ . На фиг. 1 показаны положения границы раздела при противоточной пропитке на моменты времени  $\sqrt{\tau} = 0.40, 1.74$  и  $4.48$  (кривые 1–3). Задача решалась при следующих данных:  $\mu_1 = 1$  снз,