

7. Копачевский Н. Д. О существовании поверхностных волн в задаче о нормальных колебаниях идеальной жидкости, вращающейся в частично заполненном сосуде. Функциональный анализ и его приложения, 1978, т. 12, вып. 2.
8. Копачевский Н. Д. О свободных колебаниях жидкости, вращающейся в цилиндрическом сосуде в условиях невесомости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.

УДК 532.51.013.4:538.4

## О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ

А. И. ЖАКИН

(Харьков)

Течение с острия игольчатого электрода вызывается кулоновской силой, действующей на объемный заряд [1-3]. Причина образования этого заряда объясняется: зависимостью проводимости от температуры, неоднородность которой обуславливается джоулевым нагревом [1] и напряженности электрического поля [2], либо приэлектродными процессами [3-5].

В данной работе рассматривается задача об устойчивости диэлектрической жидкости, находящейся между сферическими электродами, с целью выяснения возможности термоэлектродинамического течения, обусловленного джоулевым нагревом. При наличии внешнего подогрева возможность такого течения показана как экспериментально, так и теоретически [6-8].

1. Рассмотрим два сферических, концентрично расположенных электрода радиусов  $R_1, R_2$  ( $R_1 < R_2$ ), между которыми находится диэлектрическая жидкость. Между электродами поддерживается постоянная разность потенциалов  $U$ , они имеют температуры  $T_1, T_2$ . Максимальное тепловыделение концентрируется в окрестности внутреннего электрода, поэтому полагаем  $T_1 > T_2$ . Зависимость проводимости от температуры предполагается линейной [6-8]

$$(1.1) \quad \sigma(T) = \sigma_0(1 + \alpha T'), \quad \alpha T' = \alpha(T - \langle T \rangle) \ll 1$$

где  $\langle T \rangle$  — постоянная температура электродов и жидкости до включения тока. В дальнейшем будем считать температуру внешнего электрода фиксированной  $T_2 = \langle T \rangle$ , а температуру внутреннего задавать так, чтобы величина разности  $\Delta T = T_1 - T_2$  соответствовала экспериментально наблюдаемым величинам. Далее отсчет температуры будем производить от значения  $T_2$ .

Движение слабопроводящей поляризуемой несжимаемой жидкости описывается уравнениями электрогидродинамики [4, 9]

$$(1.2) \quad \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + q \mathbf{E}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\text{div } \varepsilon \mathbf{E} = 4\pi q, \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \text{div}(\sigma(T) \mathbf{E} + q \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T \right) = \kappa \Delta T + \sigma(T) E^2$$

где  $\eta$  — динамическая вязкость,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении,  $q$  — объемный заряд,  $p$  — полное давление [9].

Граничные условия для системы уравнений (1.2) с учетом сделанных предположений имеют вид

$$(1.3) \quad r = R_1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = \Delta T, \quad \Phi = U$$

$$r = R_2: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \Phi = T = 0$$

Заметим, что в силу предположения (1.1) в задаче имеется малый параметр  $\mu = \alpha \Delta T$ . Корректность этого предположения следует из следующих типичных значений [10, 8]:  $\alpha \sim 0.1 \text{ град}^{-1}$ ,  $\Delta T \sim 0.1 \text{ град}$ . Это позволяет записать основные уравнения (1.2) в безындукционном ЭГД-приближении [8], когда в выражении для ponderomotorной силы полем  $\mathbf{e}$ , индуцированным объемным зарядом, можно пренебречь

по сравнению с полем  $E_0$ , создаваемым внешними зарядами на электродах, гармонический потенциал которого удовлетворяет граничным условиям (1.3).

Представим суммарное поле  $E$  в виде  $E = E_0 + e$  и выберем в качестве единиц измерения длины радиус внутреннего электрода  $R_1$ , времени  $-R_1^2/\nu$ , скорости  $-R_1/t_e$ , давления  $-\eta/t_e$ , внешнего поля — напряжение внешнего поля на внутреннем электроде  $E_{01}$ , температуры  $-T^{(0)} = \sigma_0 E_{01}^2 R_1^2 / 2\kappa$ , заряда  $-(e/4\pi)\alpha T^{(0)} E_{01} / R_1$ , индуцированного поля  $-\alpha T^{(0)} E_{01}$ .

Тогда, сохраняя для безразмерных переменных прежние обозначения, в безындукционном приближении из (1.2), (1.3) получим

$$(1.4) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + P_e^{-1} (v \nabla) v = -\nabla p + \Delta v + \frac{1}{32\pi^2} E_d q E_0$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{div} e = q, \quad e = -\nabla \Phi$$

$$P_e \frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} (T E_0 + e + qv) = 0$$

$$P \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{Pv} \nabla T = \Delta T + E_0^2$$

$$\Phi = 0, \quad v = 0 \quad (r=1, r=h^{-1})$$

$$T = T_d \quad (r=1), \quad T = 0 \quad (r=h^{-1})$$

Здесь  $P_e = \nu t_e / R_1^2$  — электрическое число Прандтля,  $t_e = e / 4\pi \sigma_0$  — время релаксации заряда,  $E_d = \alpha e^2 E_{01}^4 R_1^2 / \kappa \eta$  — безразмерный критерий устойчивости,  $T_d = 2\kappa \Delta T / \sigma_0 E_{01}^2 R_1^2$  — безразмерный параметр, характеризующий степень прогресса внутреннего электрода,  $P = \nu / \chi$  — тепловое число Прандтля,  $\Pi = P / P_e$ ,  $h = R_1 / R_2$ , а вычисления проводятся в безразмерной сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , начало которой помещено в центре симметрии.

Нетрудно получить решения для внешнего поля

$$E_0 = (E_0, 0, 0), \quad E_0 = r^{-2}, \quad E_{01} = UR_2 / [R_1(R_2 - R_1)]$$

и для равновесного состояния ( $v = 0, \partial/\partial t = 0$ )

$$T_0(r) = -\frac{1}{r^2} + \frac{1+h}{r} - h + \frac{T_d(1-rh)}{r(1-h)}, \quad q_0(r) = -\frac{1}{r^2} \frac{dT_0(r)}{dr}$$

2. Исследование устойчивости равновесия будем проводить методом малых колебаний [11]. Представляя возмущенное состояние скоростью  $v(r)e^{\lambda t}$ , давлением  $p_0 + p(r)e^{\lambda t}$  (где  $p_0$  — равновесное полное давление), напряженностью электрического поля  $e_0 + e(r)e^{\lambda t}$ , объемным зарядом  $q_0 + q(r)e^{\lambda t}$ , температурой  $T_0 + T(r)e^{\lambda t}$ , для возмущений из (1.4) получим следующие линеаризованные уравнения:

$$(2.1) \quad \lambda v = -\nabla p + \Delta v + \frac{1}{32\pi^2} E_d q E_0, \quad \operatorname{div} v = 0$$

$$(2.2) \quad (1 + \lambda P_e) q + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{dq_0}{dr} v_r = 0, \quad -\Delta \Phi = q$$

$$(2.3) \quad \lambda P T + \Pi \frac{dT_0}{dr} v_r = \Delta T$$

Граничные условия для скорости, потенциала электрического поля и температуры следуют из условий прилипания, постоянства потенциала и температуры на электродах:

$$(2.4) \quad v = 0, \quad \Phi = 0, \quad T = 0 \quad (r=1, r=h^{-1})$$

Здесь необходимо отметить следующее. В плоскопараллельной системе электродов при достаточно большом расстоянии между последними (порядка 1 см) обычно выполняется  $\Pi \gg 1$ , что приводит к реализации возмущений только колебательного типа [7]. В данном случае за счет выбора достаточно малой величины внутреннего радиуса  $R_1$  можно добиться того, чтобы  $\Pi = 4\pi \sigma_0 R_1^2 / e\chi \ll 1$ . Например, для трансформаторного масла с проводимостью  $\sigma_0 = 10^{-13} \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$  и  $R_1 = 0.01$  имеем  $\Pi = 0.07$ . Малость  $\Pi$  указывает на то, что возмущения электрических величин релаксируют значительно быстрее тепловых. В этом случае второй член в левой части

уравнения (2.3) можно опустить, а для полученной задачи можно доказать, что при  $T_d > (3/2 - h)(1 - h)$  верен принцип монотонной смены устойчивости. Действительно, при ненулевых температурных возмущениях спектр задачи (2.1)–(2.4) определяется из

$$\lambda P T = \Delta T, \quad T = 0 \quad (r=1, r=h^{-1})$$

откуда следует [12, 13], что спектр веществен и отрицателен, т.е. по отношению к таким возмущениям жидкость устойчива. Если же  $T = 0$ , то спектр определяется уравнениями (2.1), (2.2), в которых необходимо положить  $T = 0$ , и граничными условиями (2.4). Тогда по аналогии с [12] можно получить

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_{\Omega} \left( |v|^2 + \frac{32\pi^2}{E_d f(r)} P_e |q|^2 \right) d\Omega = 0$$

$$f(r) = -\frac{dq_0}{dr} = \frac{4}{r^5} \left( 1 + h + \frac{T_d}{1-h} - \frac{5}{2r} \right)$$

Здесь область интегрирования распространяется на весь объем жидкости. Очевидно,  $f(r) > 0$  при  $T_d > (3/2 - h)(1 - h)$ , откуда следует положительность интеграла, т.е. вещественность  $\lambda$ .

Поэтому будем определять критические значения критериев устойчивости из условия  $\lambda = 0$ , считая, что при  $\Pi \sim 1$  устойчивость исследуется по отношению к монотонным возмущениям. Тогда из (2.1)–(2.4) получим

$$(2.5) \quad \Delta v - \nabla p = \frac{1}{32\pi^2} E_d \left( \frac{dq_0}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial r} \right) E_0$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \Delta T = \Pi \frac{dT_0}{dr} v_r$$

$$v = 0, \quad T = 0 \quad (r=1, r=h^{-1})$$

Применив операцию  $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$  к уравнениям изменения импульсов (2.5) и проектируя полученное уравнение на радиальное направление для  $v = rv_r$ ,  $T$ , получим следующую задачу на собственные значения относительно  $E_d$

$$(2.6) \quad L^2 v = -\Delta_{\theta\varphi} E_d \left( \frac{4}{r^5} f_1(r, T_d) v + \frac{1}{r^5} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \frac{1}{32\pi^2}$$

$$L T = -\Pi f_2(r, T_d) \frac{v}{r^3}$$

$$v = \frac{\partial v}{\partial r} = T = 0 \quad (r=1, r=h^{-1})$$

$$L \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi}$$

$$\Delta_{\theta\varphi} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$f_1(r, T_d) = 1 + h + \frac{T_d}{1-h} - \frac{5}{2r}, \quad f_2(r, T_d) = 1 + h + \frac{T_d}{1-h} - \frac{2}{r}$$

Таким образом, устойчивость состояния равновесия описывается тремя безразмерными числами: критерием  $E_d$ , параметром прогресса  $T_d$  и отношением чисел Прандтля  $\Pi = P/P_e$ .

Собственные функции задачи (2.6) будем искать в виде

$$v(r) = v_l(r) P_{ml}(\cos \theta) \cos m\varphi$$

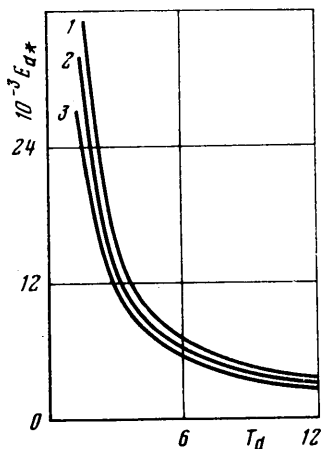
$$T(r) = T_l(r) P_{ml}(\cos \theta) \cos m\varphi \quad (l=1, 2, \dots; m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l)$$

где  $P_{ml}(\cos \theta)$  – присоединенные функции Лежандра.

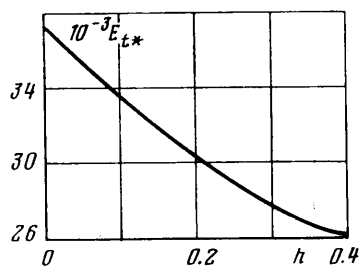
После замены переменных  $s=1/r$ ,  $w(s)=v_l(1/s)$ ,  $\Theta(s)=T_l(1/s)$  получим краевую задачу, решение которой можно свести [13] к задаче об отыскании характеристических чисел интегрального уравнения с непрерывным ядром вида

$$(2.7) \quad w(s) = \lambda \int_h^1 G(s, t) \left[ t^5 f_1(t^{-1}, T_d) w(t) - \frac{\Pi t^3}{4} \frac{d}{dt} \int_h^1 K(t, x) x^{-1} f_2(x^{-1}, T_d) w(x) dx \right] dt$$

где  $\lambda = l(l+1)E_d/8\pi^2$ ,  $G(s, t)$  — функция Грина оператора  $L_1 s^4 L_1$  и граничных условий  $w = dw/ds = 0$  ( $s=h; 1$ ),  $L_1 \equiv d^2/ds^2 - l(l+1)/s^2$ ,  $K(t, x)$  — функция Грина оператора  $L_1$  и граничных условий  $\Theta=0$  ( $s=h; 1$ ).



Фиг. 1



Фиг. 2

Заметим, что при достаточно малых  $\Pi$  ядро интегрального уравнения (2.7) положительно. В этом случае можно воспользоваться теорией интегральных уравнений с положительными ядрами [13], откуда следует, что уравнение (2.7) имеет единственную (с точностью до постоянного множителя) неотрицательную собственную функцию, а соответствующее характеристическое число  $\lambda_1$  положительное, простое и меньше по модулю любого другого характеристического числа этого уравнения.

Вычисления  $\lambda_1$  осуществлялись с использованием ЭВМ по схеме, предложенной в [13], с относительной погрешностью, меньшей 1%. Критические значения при этом определялись из условия  $E_{d*} = \min_{l=1,2,\dots} 8\pi^2 \lambda_1 / l(l+1)$ .

3. Результаты вычислений показали, что при  $\Pi \leq 1$  критические значения  $E_{d*}$  весьма слабо зависят от отношения чисел Прандтля  $\Pi$ , и с увеличением величины параметра прогрева  $T_d$  эта зависимость еще более ослабевает. Так, при  $h=0.1$ ,  $\Pi=0.01$  и  $0.1$  значения  $E_{d*}$  для  $T_d=3$  отличаются менее 0.5%, а для  $T_d=15$  — уже на сотые доли процента. Поэтому дальнейшие вычисления были проделаны при  $\Pi=0$ .

На фиг. 1 изображены нейтральные кривые, разделяющие области устойчивости (области, расположенные ниже кривых) и неустойчивости. Здесь кривым 1–3 соответствуют значения  $h=0.01; 0.1; 0.2$ .

Используя эти данные для  $R_2=1$  см,  $h=0.01$ , была проведена оценка критических напряженностей  $E_{01*}$ , разностей потенциалов  $U_*$  и соответствующих значений  $\Delta T$  для трансформаторного масла. При этом использовались следующие значения физических параметров [3, 10]:

$$\sigma_0 = 10^{-13} \text{ ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}; \quad \eta = 0.22 \text{ П}; \quad \epsilon = 2.25;$$

$$\kappa = 0.119 \text{ вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}; \quad \alpha = 0.1 \text{ град}^{-1}$$

Результаты этих вычислений приведены ниже:

$T_d$	3	10	50	95
$E_{d*}$	15 583	3 929	744	389
$E_{01*}, \text{ кв/см}$	284	201	132	113
$\Delta T, \text{ град}$	0.0010	0.0017	0.0037	0.0051
$U_*, \text{ кв}$	2.8	2.0	1.3	1.1

Из приведенных данных видно, что даже весьма незначительный нагрев внутреннего электрода ( $\Delta T \approx 0.005$  град) приводит к потере устойчивости при разности потенциалов порядка 1 кВ.

Далее, при  $T_d \rightarrow \infty$  произведение  $E_{d*} T_d = E_{t*}$  стремится к некоторому предельному значению  $E_{t*}(h)$ , зависящему от  $h$ . Эта зависимость  $E_{t*} = E_{t*}(h)$  представлена на фиг. 2, из которой следует, что при достаточно сильном нагреве внутреннего электрода ( $T_d \gg 1$ ) с увеличением радиуса последнего величина критической напряженности уменьшается. Например, для  $\Delta T = 1$  град при  $h = 0.05$  имеем  $E_{01*} = 10.62$  кВ/см при этом  $T_d = 26\ 418$ , а при  $h = 0.2$ :  $E_{01*} = 9.82$  кВ/см,  $T_d = 31\ 041$ .

Поступила 18 XII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Майбуров С. П., Остроумов Г. А. Электрический ветер в жидкости и его реакция на острие. Электронная обработка материалов, 1967, № 4.
2. Янговский Е. И. Об изотермической электроконвекции. В кн. 8-е Рижское совещание по магнитной гидродинамике, т. 1. Рига, «Зинатне», 1975.
3. Михайлов А. А., Стишков Ю. К. Некоторые электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. Магнитная гидродинамика, 1977, № 2.
4. Мелчер Дж. Электрогидродинамика. Магнитная гидродинамика, 1974, № 2.
5. Atten P., Moreau R. Critère de stabilité hydrodynamique des fluides incompressibles isolants soumis à une injection unipolaire très faible. C. r. Acad. Sci., 1969, t. 269, No. 12.
6. Turnbull R. J. Electroconvective instability with a stabilizing temperature gradient. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 12.
7. Болога М. К., Бурштейн И. Ф., Гросу Ф. П. Неустойчивость термически неоднородного слоя слабопроводящей жидкости в электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
8. Саранин В. А. О конвективной устойчивости слабопроводящей жидкости в электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5.
9. Остроумов Г. А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М., «Наука», 1979.
10. Скнави Г. И. Физика диэлектриков (область слабых полей). М.—Л., Гостехиздат, 1949.
11. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5.
12. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
13. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М., «Наука», 1976.

УДК 532.525

### НЕСИММЕТРИЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА СТРУЕЙ ДОЗВУКОВОЙ И ЗВУКОВОЙ СКОРОСТИ

Н. А. ПОДСЫПАНИНА, Э. Г. ШИФРИН

(Москва)

Рассматривается случай обтекания бесконечного клина струей с дозвуковой или звуковой скоростью на границе, когда критическая линия тока разветвляется в его вершине. Этот режим может реализоваться лишь при определенном (заранее неизвестном) соотношении геометрических параметров. Задача решается в плоскости годографа численным методом [1], развитым применительно к проблеме профилирования сопла Лавала. Решение несимметричной задачи, полученное в плоскости годографа, может быть реализовано физически лишь при определенном соотношении между граничными значениями для функции тока. Это соотношение (обобщающее известную формулу Прандтля [2], выведенную для случая несимметричного обтекания пластины струей несжимаемой жидкости из теоремы импульсов) получено из анализа асимптотики решения вблизи критической точки. Приводятся примеры расчетов.

Пусть струя сжимаемого идеального газа обтекает клин, разветвляясь в его вершине. Этот случай исключительный; в общем случае струя обтекает клин, разветвляясь на его боковой стороне с образованием в районе вершины местной сверхзвуковой зоны со скачком уплотнения (фиг. 1). При дозвуковой скорости на границе струя имеет бесконечную протяженность. При звуковой скорости прямые звуковые