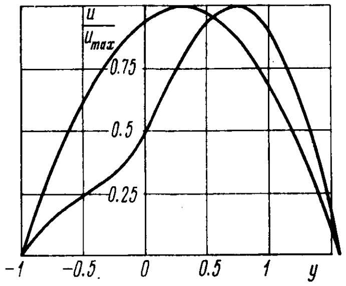
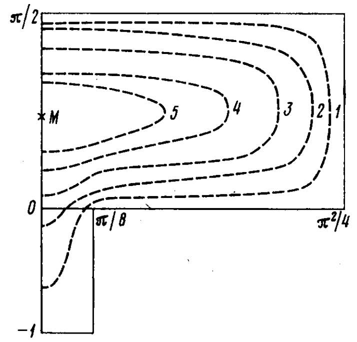
$l_2=\pi/2k$ и $k=0.64$, что соответствует каналу, близкому к прямоугольному ($l_1\approx l_2$), и $k=4$. Решение редуцированной системы (2.12) было выполнено на ЭЦВМ ЕС-1010 методом Гаусса с выбором главного элемента, причем максимальный порядок редукции системы был равен 44.

На фиг. 2 приведены графики отношения $u(x, y)/u_{\max}$ в сечении канала $x=0$ при $k=0.64$ и 4.

На фиг. 3 приведены линии уровня скорости в канале при $k=4$; кривым *1–5* соответствуют значения $u/u_{\max}=0.2$, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, точке $M-u=u_{\max}$.



Фиг. 2



Фиг. 3

В заключение отметим, что при $k=2/\pi$ ($l_1=l_2$) бесконечная алгебраическая система (2.12) расщепляется, определяя точное значение коэффициентов ξ_k и η_k. При этом решение $u(x, y)$ (2.1), (2.2) совпадает с известным точным решением задачи о стационарном протекании несжимаемой вязкой жидкости сквозь трубу прямоугольного сечения [1].

Поступила 19 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.

УДК 532.51.011

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СОСУДЕ

Н. К. РАДЯКИН

(Харьков)

Рассматривается задача о нахождении декремента затухания и частот нормальных колебаний маловязкой жидкости, вращающейся в осесимметричном сосуде. Применение метода пограничного слоя позволяет выписать ответ через решения соответствующей задачи для идеальной жидкости.

1. Постановка задачи. Пусть несжимаемая маловязкая жидкость занимает область Ω, ограниченную стенкой Σ произвольного осесимметричного сосуда и свободной равновесной поверхностью Γ. Будем считать, что сосуд вместе с жидкостью равномерно вращается в условиях, близких к невесомости, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0=\omega_0\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ – орт оси симметрии z.

Рассмотрим задачу о нормальных колебаниях жидкости, т. е. о движениях, зависящих от времени по закону $\exp(\lambda t)$. Линеаризованные уравнения движения жидкости запишем в цилиндрической системе координат $\mathbf{x}=(r, \theta, z)$, жестко связанной с сосудом. Для записи граничных условий на Γ в ее окрестности введем ортогональную криволинейную систему координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3). Координату ξ^3 направим по внешней по отношению к Ω нормали n к Γ, выбрав коэффициент Ляме $h_{\xi^3}=1$ на Γ, т. е. при $\xi^3=0$. Тогда уравнения движения и линеаризованные граничные условия имеют вид ([1], стр. 394)

$$\lambda\mathbf{u}+2\omega_0\mathbf{k}\times\mathbf{u}+\frac{1}{\rho}\nabla p-\nu\Delta\mathbf{u}=0,\qquad \nabla u=0\qquad (\mathbf{x}\in\Omega)$$

$$(1.1)\qquad \left.\begin{array}{l}\nu(u_{1,3}+u_{3,1})=\nu(u_{2,3}+u_{3,2})=0\\ \lambda p-2\lambda\nu\rho u_{3,3}=Bu_n,\qquad B\equiv a-\sigma\Delta_\Gamma,\qquad u_n\equiv\mathbf{un}\end{array}\right\}\ (\mathbf{x}\in\Gamma)$$

$$\mathbf{u}=0\qquad (\mathbf{x}\in\Sigma)$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}(r,\ \theta,\ z)$ – поле скорости, $p(r,\ \theta,\ z)$ – отклонение давления от равновесного давления $p_0(r,z)={}^1/_2\rho\omega_0{}^2-\rho\omega z+\mathrm{const}$, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, ν – коэффициент кинематической вязкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения, $a(\xi^1,\ \xi^2)=-(\partial p_0/\partial n)_\Gamma-\sigma(k_1{}^2+k_2{}^2)$ – заданная функция на Γ, k_1 и k_2 – главные кривизны поверхности Γ, Δ_Γ – оператор Лапласа – Бельтрами на Γ, $u_{i,\,k}$ – ковариантная производная ковариантного вектора u_i по координате ξ^k.

Будем считать, что на контуре γ пересечения поверхностей Γ и Σ выполняется условие

$$(1.2)\qquad \frac{\partial u_n}{\partial e}+\chi u_n=0\qquad (\mathbf{x}\in\gamma),\qquad \chi=\frac{\varkappa_1\cos\delta-\varkappa_2}{\sin\delta}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ – кривизны линий Γ_θ и Σ_θ, получающихся в сечении поверхностей Γ и Σ полуплоскостью $\theta=\mathrm{const}$, δ – угол смачивания $(0<\delta<\pi)$, вектор e расположен в плоскости $(r,\ z)$, касателен к Γ_θ и направлен вне Ω.

Условие (1.2) обычно применяется при исследовании колебаний идеальной жидкости [1–3] и означает, что в процессе колебаний угол смачивания δ сохраняется. Это условие, приводящее к перемещению контура $\gamma=\Gamma\cap\Sigma$, не согласуется с условием (1.1) на Σ, из которого по непрерывности следует $u_n|_\gamma=0$. Принимая условие (1.2) для маловязкой жидкости, допускаем возможность разрыва поля скорости $\mathbf{u}$ на γ и возможность проскальзывания по поверхности Σ частиц жидкости вблизи γ.

2. Применение метода пограничного слоя. Перейдем в (1.1), (1.2) к безразмерным переменным, выбрав в качестве характерных величин ρ, σ и некоторый линейный размер l. Обозначая безразмерные величины прежними буквами, снова придем к задаче (1.1), (1.2), где нужно положить $\rho=\sigma=1$.

Рассмотрим случай, когда силы вязкости малы по сравнению с капиллярными, а последние – одного порядка с центробежными. Тогда в первом уравнении (1.1) при старшей производной будет стоять малый параметр $\nu\ll1$ и для решения этой задачи можно применить метод пограничного слоя [4–6].

Будем искать функции u и p в виде

$$(2.1)\qquad \mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w},\qquad p=q+s$$

Функции $\mathbf{v}(\mathbf{x};\ \nu)$ и $q(\mathbf{x};\ \nu)$ при $\nu\to0$ переходят в решения задачи о колебаниях идеальной жидкости, а функции $\mathbf{w}(\mathbf{x};\ \nu)$ и $s(\mathbf{x};\ \nu)$ – типа пограничного слоя, они быстро (экспоненциально) убывают при отходе от границы $\partial\Omega$ в глубь Ω. Обозначим через D_Σ и D_Γ области пограничного слоя, примыкающие изнутри к поверхностям Σ и Γ соответственно и имеющие толщину порядка $\nu^{1/2}$. Тогда функции $\mathbf{w}(\mathbf{x};\ \nu)$ и $s(\mathbf{x};\nu)$ должны стремиться к нулю при выходе вдоль нормали к $\partial\Omega$ из области $D_\Gamma\cup D_\Sigma$.

Подставив (2.1) в первое уравнение (1.1), получим

$$(\lambda\mathbf{v}+2\omega_0\mathbf{k}\times\mathbf{v}+\nabla q-\nu\Delta\mathbf{v})+(\lambda\mathbf{w}+2\omega_0\mathbf{k}\times\mathbf{w}+\nabla s-\nu\Delta\mathbf{w})=0\qquad (\mathbf{x}\in\Omega)$$

Исходя из характера функций $\mathbf{w}$ и s, естественно потребовать, чтобы каждое из выражений в скобках обращалось в нуль. Аналогично получим $\nabla\mathbf{v}=0$ и $\nabla\mathbf{w}=0$ $(\mathbf{x}\in\Omega)$.

Будем считать, что $\mathbf{v}=\mathbf{v}^\circ+\nu^{1/2}\mathbf{v}^1$, $q=q^\circ+\nu^{1/2}q^1$, $\lambda=\lambda^\circ+\nu^{1/2}\lambda^1$, где $\mathbf{v}^1=\mathbf{v}^1(\mathbf{x};\ \nu)$; $q^1=q^1(\mathbf{x};\ \nu)$, $\lambda^1=\lambda^1(\nu)$ – функции порядка $O(1)$ при $\nu\to0$, а $\mathbf{v}^\circ(\mathbf{x})$, $q^\circ(\mathbf{x})$ и λ° дают решение задачи о колебаниях идеальной жидкости [1–3]

$$\lambda^\circ\mathbf{v}^\circ+2\omega_0\mathbf{k}\times\mathbf{v}^\circ+\nabla q^\circ=0,\qquad \nabla\mathbf{v}^\circ=0\qquad (\mathbf{x}\in\Omega)$$

$$(2.2)\qquad v_n{}^\circ=\mathbf{v}^\circ\mathbf{n}_\Sigma=0\quad (\mathbf{x}\in\Sigma),\qquad \lambda^\circ q^\circ=Bv_n{}^\circ\quad (\mathbf{x}\in\Gamma)$$

$$\frac{\partial v_n{}^\circ}{\partial e}+\chi v_n{}^\circ=0\qquad (\mathbf{x}\in\gamma)$$

Здесь $\mathbf{n}_\Sigma$ – внешняя нормаль к Σ. Задачу (2.2) будем рассматривать в предположении, что состояние относительного равновесия жидкости в сосуде устойчиво по линейному приближению, т. е. выполняется условие

$$\int_\Gamma Bv_n^\circ \bar{v}_n^\circ\, d\Gamma \geqslant C \int_\Gamma |\mathbf{v}^\circ|^2\, d\Gamma, \qquad C>0$$

Как показано в [1, 7], решениями задачи (2.2) могут быть нормальные колебания в виде поверхностных и внутренних волн. При $\lambda^\circ = i\omega$, $|\omega|>2\omega_0$ задача (2.2) имеет дискретный спектр, отвечающий поверхностным волнам в жидкости. В этом случае ее решения в осесимметричной задаче можно искать в виде бегущих волн: $\mathbf{v}^\circ=\exp[i(\omega t-m\theta)]\mathbf{V}(r,z)$, $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$ с вещественной функцией $\mathbf{V}(r,z)$. Условимся считать, что $\omega=\omega_m>0$, тогда значениям $m>0$ отвечают прямые волны, $m<0$ – обратные, а $m=0$ – стоячие волны. Частоты ω_m можно найти методом Ритца [1–3, 6], поэтому будем считать решение задачи (2.2) известным, и наша цель – вычисление для поверхностных волн величины λ_m^1, определяющей декремент затухания $\nu^{1/2}\operatorname{Re}\lambda_m^1$ и поправку $\nu^{1/2}\operatorname{Im}\lambda_m^1$ к частотам колебаний.

Для погранслойных функций $\mathbf{w}$ и s получим следующую задачу:

$$\lambda^\circ\mathbf{w}+2\omega_0\mathbf{k}\times\mathbf{w}+\nabla s-\nu\Delta\mathbf{w}=0, \qquad \nabla\mathbf{w}=0 \quad (\mathbf{x}\in\Omega)$$

$$(2.3) \qquad (\overset{\circ}{v}_{i,3}+\overset{\circ}{v}_{3,i})+(w_{i,3}+w_{3,i})=0 \qquad (i=1,2) \qquad (\mathbf{x}\in\Gamma)$$

$$\mathbf{w}_T=-\mathbf{v}^\circ \quad (\mathbf{x}\in\Sigma), \qquad \mathbf{w}_T\equiv\mathbf{w}-(\mathbf{w}\mathbf{n}_\Sigma)\mathbf{n}_\Sigma$$

В D_Σ введем координаты (η^1, η^2, η^3) аналогично введенной в D_Γ системе (ξ^1, ξ^2, ξ^3). Осуществляя замены $\xi^3=\nu^{1/2}\xi^{*3}$, $\eta^3=\nu^{1/2}\eta^{*3}$, потребуем, чтобы $\mathbf{w}(\mathbf{x};\nu)\to0$, $s(\mathbf{x};\nu)\to0$ вне D_Γ и D_Σ, т. е. при $\xi^{*3}\to-\infty$, $\eta^{*3}\to-\infty$.

Применяя методику построения погранслойных решений, аналогичную [5], получим при $\nu\to0$ асимптотические решения задачи (2.3)

$$w_{\eta^1}(\eta^1,\eta^2,\eta^{*3})=(v_{\eta^1}{}^\circ+iv_{\eta^2}{}^\circ)E_1+(v_{\eta^1}{}^\circ-iv_{\eta^2}{}^\circ)E_2$$

$$w_{\eta^2}(\eta^1,\eta^2,\eta^{*3})=(v_{\eta^2}{}^\circ-iv_{\eta^1}{}^\circ)E_1+(v_{\eta^2}{}^\circ+iv_{\eta^1}{}^\circ)E_2$$

$$(2.4) \qquad w_{\eta^3}=\nu^{1/2}\psi(\eta^1,\eta^2,\eta^{*3}), \qquad \psi(\eta^1,\eta^2,\eta^{*3})=O(1) \quad (\nu\to0),$$

$$s(\eta^1,\eta^2,\eta^{*3})=O(\nu^{1/2})$$

$$w_{\xi^k}=\nu^{1/2}\psi_k(\xi^1,\xi^2,\xi^{*3}), \qquad \psi_k(\xi^1,\xi^2,\xi^{*3})=O(1)$$

$$(\nu\to0), \qquad k=1,2$$

$$w_{\xi^3}=\nu\psi_3(\xi^1,\xi^2,\xi^{*3}), \qquad \psi_3(\xi^1,\xi^2,\xi^{*3})=O(1) \qquad (\nu\to0)$$

$$s(\xi^1,\xi^2,\xi^{*3})=O(\nu)$$

$$E_j=\exp(a_j\eta^{*3}), \qquad a_j=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega_m-(-1)^j2\omega_0(\mathbf{k}\mathbf{n}_\Sigma)} \qquad (j=1,2)$$

Здесь ветвь корня выбирается из условия $\operatorname{Re}\sqrt{z}\geqslant0$.

Формулы (2.4) дают выражение для погранслойного решения всюду в Ω, кроме области $D_\gamma=D_\Sigma\cap D_\Gamma$, примыкающей к контуру γ и имеющей по нормали к γ толщину порядка $\nu^{1/2}$. В этой области функции $\mathbf{w}$ и s имеют более сложный характер. Будем считать, как и в задаче о колебаниях тяжелой невращающейся жидкости (см. [5], стр. 135), что функция $w(\mathbf{x};\nu)$ ограничена в D_γ и имеют место оценки

$$(2.5) \qquad |\mathbf{w}(\mathbf{x};\nu)|=O(1), \qquad |w_{3,3}|=O(\nu^{-1/2}), \qquad |s(\mathbf{x},\nu)|=O(\nu^{1/2}) \qquad (\mathbf{x}\in D_\gamma)$$

3. Определение величины λ^1. Для определения функций $\mathbf{v}^1$ и q^1 имеем следующую задачу

$$\lambda^\circ\mathbf{v}^1+\nabla q^1+2\omega_0\mathbf{k}\times\mathbf{v}^1=-\lambda^1\mathbf{v}^\circ, \qquad \nabla\mathbf{v}^\circ=0 \quad (\mathbf{x}\in\Omega)$$

$$(3.1) \qquad \lambda^\circ q_1-Bv_n{}^1=-\lambda^1q^\circ+\nu^{-1/2}Bw_n-\lambda^\circ\nu^{-1/2}s+2\lambda^\circ\nu^{1/2}w_{3,3} \qquad (\mathbf{x}\in\Gamma)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial n}+\chi v_n{}^1=-\nu^{-1/2}\left(\frac{\partial w_n}{\partial e}+\chi w_n\right) \qquad (\mathbf{x}\in\gamma)$$

$$v^1_\Sigma=-\nu^{-1/2}w_{n_\Sigma} \qquad (\mathbf{x}\in\Sigma)$$

Здесь в граничном условии на Γ последние три члена нужно учитывать только в узкой области шириной порядка $\nu^{1/2}$, примыкающей к контуру γ; в остальной части Γ их можно отбросить в силу (2.4).

Заметим, что однородная задача (3.1) совпадает с (2.2), и воспользуемся условием разрешимости этой задачи. Умножая скалярно первое уравнение (3.1) на $\bar{\mathbf{v}}^\circ$, а второе — на $\bar{q}^\circ$, складывая их и интегрируя по Ω, получим

$$-\lambda^1 \int_\Omega |\mathbf{v}^\circ|^2\, d\Omega = \int_\Gamma (v_n{}^1\bar{q}^\circ + \bar{v}_n{}^\circ q^1)\, d\Gamma + \int_\Sigma (v_{n_\Sigma}{}^1\bar{q}^\circ + \bar{v}_{n_\Sigma}{}^\circ q^1)\, d\Sigma$$

Учитывая граничные условия (2.2) и (3.1), имеем отсюда

$$\lambda^1 \int_\Omega |v^\circ|^2\, d\Omega - \frac{\lambda^1}{\lambda^{\circ 2}} \int_\Gamma (Bv_n{}^\circ)\, v_n{}^\circ\, d\Gamma = \int_\Sigma \frac{w_{n_\Sigma}}{\nu^{1/2}} \bar{q}^\circ\, d\Sigma + \tag{3.2}$$

$$+ \int_\Gamma \frac{w_n}{\nu^{1/2}} \bar{q}^\circ\, d\Gamma + \int_\Gamma (s\nu^{-1/2} - 2\nu^{1/2} w_{3,3})\, \bar{v}_n{}^\circ\, d\Gamma$$

Последний интеграл по поверхности Γ в (3.2) можно опустить, так как подынтегральное выражение в скобках конечно (порядка $O(1)$) лишь в области площадью $O(\nu^{1/2})$ вблизи контура γ (см. (2.5)), а в остальной части Γ это выражение мало. Два оставшихся интеграла в правой части (3.2) преобразуем, используя формулу Остроградского — Гаусса и уравнение $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ $(\mathbf{x} \in \Omega)$

$$\int_{\Gamma+\Sigma} \frac{\mathbf{w}\mathbf{n}}{\nu^{1/2}} \bar{q}^\circ\, dS = \int_\Omega \frac{\nabla(\mathbf{w}\bar{q}^\circ)}{\nu^{1/2}}\, d\Omega = \int_\Omega \nabla\bar{q}^\circ \frac{\mathbf{w}}{\nu^{1/2}}\, d\Omega \tag{3.3}$$

Согласно оценкам (2.4), (2.5), основной вклад в интеграл (3.3) по области Ω внесет интеграл по области D_Σ, в которой можно с точностью до малых высшего порядка функцию $\nabla\bar{q}^\circ(\eta^1, \eta^2, \eta^3)$ вычислять при $\eta^3 = 0$, т. е. на Σ. Так как $\mathbf{w}$ экспоненциально убывает при $\eta^{*3} \to -\infty$, то (3.2) можно переписать в виде

$$\lambda^1 \left[\int_\Omega |\mathbf{v}^\circ|^2\, d\Omega - \frac{1}{\lambda^{\circ 2}} \int_\Gamma (Bv_n{}^\circ)\, v_n{}^\circ\, d\Gamma \right] =$$

$$= \int_\Sigma b_{\eta^1}\, d\Sigma \int_{-\infty}^{0} \frac{w_{\eta^1}}{\nu^{1/2}}\, d\eta^{*3} + \int_\Sigma b_{\eta^2}\, d\Sigma \int_{-\infty}^{0} \frac{w_{\eta^2}}{\nu^{1/2}}\, d\eta^{*3}$$

$$\mathbf{b} \equiv \nabla\bar{q}^\circ(\eta^1, \eta^2, 0) = \lambda^\circ \bar{\mathbf{v}}^\circ - 2\omega_0 \mathbf{k} \times \bar{\mathbf{v}}^\circ$$

После интегрирования и подстановки вместо b_{η^1}, b_{η^2} их значений имеем

$$\lambda_m = i\omega_m - \frac{1+i}{2} \frac{L}{M} \nu^{1/2} \tag{3.4}$$

$$L = \int_\Sigma (\mathbf{v}_m)^2 \sqrt{\omega_m + \sqrt{\omega_m{}^2 - 4\omega_0{}^2 (\mathbf{k}\mathbf{n}_\Sigma)^2}}\, d\Sigma$$

$$M = \int_\Omega (\mathbf{v}_m)^2\, d\Omega + \frac{1}{\omega_m{}^2} \int_\Gamma (Bv_{m_n})\, v_{m_n}\, d\Gamma$$

где $\mathbf{v}_m = \operatorname{Re} \mathbf{v}_m{}^\circ$ $(\sim \operatorname{Im} v_m{}^\circ)$, $v_{m_n} \equiv \mathbf{v}_m \mathbf{n}$

Как показывает формула (3.4), учет сил вязкости приводит к появлению декремента затухания колебаний поверхностных волн ($\operatorname{Re} \lambda_m < 0$), который имеет порядок $\nu^{1/2}$, и к уменьшению частоты ω_m на величину, равную этому декременту.

4. Частные случаи и примеры. Из формулы (3.4) можно получить выражение для λ_m в различных частных случаях. Так, при $\omega_0 = 0$, т. е. для невращающейся капиллярной жидкости, будем иметь $(\mathbf{v}_m = \nabla\varphi_m)$

$$\lambda_m = -i\omega_m - \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \omega_m^{3/2} \int_\Sigma (\nabla\varphi_m)^2\, d\Sigma \left[\int_\Gamma \left(B\frac{\partial\varphi_m}{\partial n} \right) \frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\, d\Gamma \right]^{-1} \nu^{1/2} \tag{4.1}$$

Возвращаясь к размерным величинам, из (3.4) для тяжелой ($\sigma=0$) жидкости получаем

$$\lambda_m = i\omega_m - \frac{1+i}{2}\frac{L}{M_1}\nu^{1/2} \tag{4.2}$$

$$M_1 = \int\limits_\Omega (\mathbf{v}_m)^2\,d\Omega + \frac{1}{\omega_m^2}\int\limits_\Gamma (v_{mn})^2[g\cos(\mathbf{n},z) - \omega_0^2 r\cos(\mathbf{n},r)]\,d\Gamma$$

Из (4.2) при $\omega_0=0$ (либо из (4.1) при $\sigma=0$) имеем известный результат ([5], стр. 137)

$$\lambda_m = i\omega_m - \frac{(1+i)g}{2\sqrt{2}\,\omega_m^{3/2}}\int\limits_\Sigma (\nabla\varphi_m)^2\,d\Sigma\left[\int\limits_\Gamma \varphi_m^2\,d\Gamma\right]^{-1}\nu^{1/2}$$

В тех случаях, когда известны решения задачи (2.2), расчет λ_m^1 сводится к вычислению интегралов по области Ω и поверхностям Γ и Σ. Рассмотрим некоторые такие примеры.

Для задачи о плоских колебаниях жидкого кольца, ограниченного твердой стенкой $\Sigma(r=d)$ и свободной поверхностью $\Gamma(r=1)$, имеем [1, 8]

$$\mathbf{v}_m = \nabla\varphi_m,\qquad \varphi_m = (r^{|m|} + d^{2|m|}r^{-|m|})\cos m\theta,\qquad m=\pm1,\ \pm2,\dots$$

$$\omega_m = -\operatorname{sign} m\mu_m^2\omega_0 + \mu_m\sqrt{\mu_m^2\omega_0^2 + |m|(\omega_0^2+m^2-1)},\qquad \mu_m^2 = \frac{d^{2|m|}-1}{d^{2|m|}+1}$$

$$\lambda_m = i\omega_m - (1+i)\sqrt{2}\,\omega_m^{3/2}\frac{md^{2|m|-1}}{d^{4|m|}-1}\,\frac{1}{\omega_m - \operatorname{sign} m\mu_m^2\omega_0^2}\nu^{1/2}$$

Из (4.1) можно получить значение λ_m для задачи о колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде радиуса R. Здесь жидкость занимает в положении равновесия область $\Omega=\{(r,\theta,z): 0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ -h\leqslant z\leqslant 0\}$, а $\delta=\pi/2$. Тогда

$$\varphi_{mp}(r,\theta,z) = I_{|m|}\left(\frac{\varkappa_{mp}}{R}r\right)\cos m\theta\operatorname{ch}\left[\frac{\varkappa_{mp}}{R}(z+h)\right]\qquad I'_{|m|}(\varkappa_{mp})=0$$

$$\omega_{mp}^2 = \frac{\varkappa_{mp}}{R}\left(g + \frac{\sigma}{\rho}\frac{\varkappa_{mp}^2}{R^2}\right)\operatorname{th}\left(\frac{\varkappa_{mp}}{R}h\right),\quad m=0,\pm1,\pm2,\dots;\ p=1,2,\dots$$

$$\lambda_{mp} = i\omega_{mp} - \frac{1+i}{2\sqrt{2}}\,\frac{g+\sigma\rho^{-1}R^{-2}\varkappa_{mp}^2}{\omega_{mp}^{3/2}}\,\frac{\varkappa_{mp}^2}{R^2}\times$$

$$\times\left[\frac{\varkappa_{mp}^2+m^2}{\varkappa_{mp}(\varkappa_{mp}^2-m^2)}\operatorname{th}\frac{\varkappa_{mp}}{R}h + \frac{1-hR^{-1}}{\operatorname{ch}^2\varkappa_{mp}hR^{-1}}\right]\nu^{1/2}$$

При $\sigma=0$ отсюда получаем формулу (3.11) из [5], стр. 143.

Автор искренне признателен Н. Д. Копачевскому и А. Д. Мышкису за внимание к работе и полезные замечания.

Поступила 11 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. М., «Наука», 1976.
2. *Копачевский Н. Д.* Применение метода С. Л. Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 2.
3. *Копачевский Н. Д., Радякин Н. К.* О малых колебаниях идеальной капиллярной жидкости, вращающейся в осесимметричном сосуде. В сб. Вопр. вычисл. мат. и техн. Киев, «Наук. думка», 1976.
4. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. наук, 1957, т. 12, вып. 5.
5. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., ВЦ АН СССР, 1968.
6. *Радякин Н. К.* Нормальные колебания вращающейся жидкой капли. Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 4.

7. *Копачевский Н. Д.* О существовании поверхностных волн в задаче о нормальных колебаниях идеальной жидкости, вращающейся в частично заполненном сосуде. Функциональный анализ и его приложения, 1978, т. 12, вып. 2.
8. *Копачевский Н. Д.* О свободных колебаниях жидкости, вращающейся в цилиндрическом сосуде в условиях невесомости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.

УДК 532.51.013.4:538.4

О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ

А. И. ЖАКИН

(Харьков)

Течение с острия игольчатого электрода вызывается кулоновской силой, действующей на объемный заряд [1–3]. Причина образования этого заряда объясняется: зависимостью проводимости от температуры, неоднородность которой обуславливается джоулевым нагревом [1] и напряженности электрического поля [2], либо приэлектродными процессами [3–5].

В данной работе рассматривается задача об устойчивости диэлектрической жидкости, находящейся между сферическими электродами, с целью выяснения возможности термоэлектрогидродинамического течения, обусловленного джоулевым нагревом. При наличии внешнего подогрева возможность такого течения показана как экспериментально, так и теоретически [6–8].

1. Рассмотрим два сферических, концентрично расположенных электрода радиусов R_1, R_2 ($R_1<R_2$), между которыми находится диэлектрическая жидкость. Между электродами поддерживается постоянная разность потенциалов U, они имеют температуры T_1, T_2. Максимальное тепловыделение концентрируется в окрестности внутреннего электрода, поэтому полагаем $T_1>T_2$. Зависимость проводимости от температуры предполагается линейной [6–8]

$$\sigma(T)=\sigma_0(1+\alpha T'),\qquad \alpha T'\equiv\alpha(T-\langle T\rangle)\ll 1 \tag{1.1}$$

где $\langle T\rangle$ – постоянная температура электродов и жидкости до включения тока. В дальнейшем будем считать температуру внешнего электрода фиксированной $T_2=\langle T\rangle$, а температуру внутреннего задавать так, чтобы величина разности $\Delta T=T_1-T_2$ соответствовала экспериментально наблюдаемым величинам. Далее отсчет температуры будем производить от значения T_2.

Движение слабопроводящей поляризующейся несжимаемой жидкости описывается уравнениями электрогидродинамики [4, 9]

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right)=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{v}+q\mathbf{E},\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}=0 \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E}=4\pi q,\qquad \mathbf{E}=-\nabla\Phi$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\operatorname{div}(\sigma(T)\mathbf{E}+q\mathbf{v})=0$$

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla T\right)=\varkappa\Delta T+\sigma(T)E^2$$

где η – динамическая вязкость, $\varkappa$ – коэффициент теплопроводности, c_p – теплоемкость при постоянном давлении, q – объемный заряд, p – полное давление [9].

Граничные условия для системы уравнений (1.2) с учетом сделанных предположений имеют вид

$$r=R_1:\quad \mathbf{v}=0,\quad T=\Delta T,\quad \Phi=U \tag{1.3}$$

$$r=R_2:\quad \mathbf{v}=0,\quad \Phi=T=0$$

Заметим, что в силу предположения (1.1) в задаче имеется малый параметр $\mu=\alpha\Delta T$. Корректность этого предположения следует из следующих типичных значений [10, 3]: $\alpha\sim0.1$ *град* $^{-1}$, $\Delta T\sim0.1$ *град*. Это позволяет записать основные уравнения (1.2) в безындукционном ЭГД-приближении [8], когда в выражении для пондеромоторной силы полем **e**, индуцированным объемным зарядом, можно пренебречь