МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1980

УДК 532.501

К ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

К. Б. ПАВЛОВ, И. А. ФЕДОТОВ, А. А. ШИРШОВ

(Москва)

Построено точное решение задачи о стационарном течении несжимаемой вязкой жидкости в прямой трубе, сечение которой образует два сочлененных прямоугольника.

1. Рассматривается стационарное градиентное течение вязкой жидкости в прямом канале, сечение которого образовано несколькими сочлененными прямоугольниками, причем сечение канала в принципе может представлять собой даже многосвязную область. Не ограничивая общности рассмотрения, которое может быть применено в случае указанных каналов, в данной работе исследуется течение в канале с сечением, образованным двумя симметрично расположенными прямоугольниками: $G_+\{|x|\leqslant l_1,\ 0\leqslant y\leqslant h_1\}$ и $G_-\{|x|\leqslant l_2,\ h_2\leqslant y\leqslant 0\}$ (фиг. 1).

Уравнение Навье – Стокса с условиями «прилипания» жидкости на стенках канала [1], записанными в безразмерной форме, приводят к задаче

$$\Delta u=1,\qquad u|_\Gamma=0 \tag{1.1}$$

Здесь $u(x,\ y)$ – проекция скорости жидкости, Γ – контур области $G=G_+\cup G_-$.

2. Представим решение задачи (1.1) в виде

$$u(x,y)=\begin{cases}u_+(x,y), & x,y\in G_+\\ u_-(x,y), & x,y\in G_-\end{cases} \tag{2.1}$$

причем функции $u_\pm(x,\ y)$ (2.1) должны удовлетворять уравнениям $\Delta u_\pm=1$ в $G_\pm$.

Воспользуемся в G_+ и G_- соответственно формулами:

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2}{l_1\lambda_k}\cos\lambda_k x,\qquad \lambda_k\equiv\frac{2k+1}{2l_1}\pi$$

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2}{l_2\mu_k}\cos\mu_k x,\qquad \mu_k\equiv\frac{2k+1}{2l_2}\pi$$

и будем искать $u_+(x,\ y)$ и $u_-(x,\ y)$ в форме

$$u_+(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}[\eta_k\operatorname{ch}\lambda_k y+\gamma_k\operatorname{sh}\lambda_k y-\omega_k]\cos\lambda_k x$$

$$u_-(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}[\xi_k\operatorname{ch}\mu_k y+\beta_k\operatorname{sh}\mu_k y-\nu_k]\cos\mu_k x \tag{2.2}$$

$$\gamma_k\equiv\frac{\omega_k-\eta_k\operatorname{ch}\lambda_k h_1}{\operatorname{sh}\lambda_k h_1},\qquad \omega_k\equiv\frac{(-1)^k2}{l_1\lambda_k^3}$$

$$\beta_k\equiv\frac{\nu_k-\xi_k\operatorname{ch}\mu_k h_2}{\operatorname{sh}\mu_k h_2}\qquad \nu_k\equiv\frac{(-1)^k2}{l_2\mu_k^3}$$

Построенная таким образом функция $u(x, y)$ (2.1), (2.2) удовлетворяет уравнению (1.1), а также краевым условиям при $x=\pm l_1$, $y>0$; $x=\pm l_2$, $y<0$ и $y=h_1$, h_2. Очевидно, что коэффициенты ξ_k, η_k должны быть выбраны так, чтобы было удовлетворено условие прилипания при $l_1\leqslant|x|\leqslant l_2$, $y=0$, а также условие непрерывности $u(x, y)$ всюду в G

(2.3) $$u_+(x,0)=\begin{cases}0, & l_1\leqslant|x|\leqslant l_2\\ u_-(x,0), & |x|\leqslant l_2\end{cases}$$

Для выполнения первого условия (2.3) продолжим функцию $u_-(x, 0)$ нулем на отрезок $[l_1, l_2]$ и обозначим через $l\{u_-\}$ четное, нечетно-периодическое продолжение полученной функции с периодом $4l_1$. Если функцию $l\{u_-\}$ разложить в ряд Фурье по $\cos\lambda_k x$, то второе условие (2.3) приводит к бесконечной алгебраической системе

(2.4) $$\eta_k-\omega_k=\frac{2}{l_1}\sum_{j=0}^{\infty}(\xi_j-\nu_j)a_{jk}$$

(2.5) $$a_{jk}\equiv\frac{(-1)^j\mu_j\cos\lambda_k l_2}{\mu_j^2-\lambda_k^2}$$

Систему (2.4) можно представить в форме

(2.6) $$\eta=\frac{2}{l_1}\mathbf{A}^*\xi+\mathbf{f}$$

$$\mathbf{A}\equiv\|a_{jk}\|_{j,k=0}^{\infty},\qquad f_k\equiv\omega_k-\frac{2}{l_1}\sum_{j=0}^{\infty}a_{jk}\nu_j$$

$$\eta\equiv\begin{pmatrix}\eta_0\\ \eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\end{pmatrix},\qquad \xi\equiv\begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\end{pmatrix},\qquad \mathbf{f}\equiv\begin{pmatrix}f_0\\ f_1\\ f_2\\ \vdots\end{pmatrix}$$

Здесь $\mathbf{A}^*$ – матрица, транспонированная к матрице $\mathbf{A}$. Решение исходной задачи (1.1) должно удовлетворять условию непрерывности первой производной

(2.7) $$\frac{\partial u_+}{\partial y}(x,0)=\frac{\partial u_-}{\partial y}(x,0)$$

вытекающему из физических требований непрерывности всюду в жидкости касательных напряжений. Для этого рассмотрим значение функции $\partial u_+(x,0)/\partial y$ на отрезке $|x|\leqslant l_2$ и продолжим его четно, нечетно-периодически с периодом $4l_2$. Обозначая указанное продолжение через $l\{\partial u_+(x,0)/\partial y\}$ и разлагая его по $\cos\mu_k x$, имеем из (2.7) и (2.2) бесконечную алгебраическую систему

(2.8) $$\xi=\frac{2}{l_2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AL}\eta+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{g}$$

(2.9) $$\mathbf{M}\equiv\|\mu_k^*\delta_{ki}\|_{k,i=0}^{\infty},\qquad \mathbf{L}\equiv\|\lambda_j^*\delta_{jk}\|_{j,k=0}^{\infty}$$

(2.10) $$\mu_k^*\equiv\mu_k\operatorname{cth}\mu_k h_2,\qquad \lambda_k^*\equiv\lambda_k\operatorname{cth}\lambda_k h_1$$

(2.11) $$g_k\equiv\frac{\mu_k\nu_k}{\operatorname{sh}\mu_k h_2}-\frac{2}{l_2}\sum_{j=0}^{\infty}a_{kj}\frac{\lambda_j\omega_j}{\operatorname{sh}\lambda_j h_1}$$

$$\mathbf{g}\equiv\begin{pmatrix}g_0\\ g_1\\ g_2\\ \vdots\end{pmatrix}$$

δ_{kj} – символ Кронекера, $\mathbf{M}^{-1}$ – матрица, обратная к матрице $\mathbf{M}$.

Для дальнейшего решения системы (2.6) и (2.8) целесообразно объединить в одну

(2.12) $$\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{B}\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{h}$$

$$\boldsymbol{\zeta}\equiv\begin{pmatrix}\eta_0\\ \xi_0\\ \eta_1\\ \xi_1\\ \vdots\end{pmatrix},\qquad \mathbf{h}\equiv\begin{pmatrix}f_0\\ \mathbf{M}^{-1}g_0\\ f_1\\ \mathbf{M}^{-1}g_1\\ \vdots\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}\equiv\|b_{ij}\|_{i,j=0}^{\infty}$$

Здесь матрица **B** построена естественным образом из матричных элементов матриц **A** и $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AL}$, причем элементы b_{ij} с четной суммой $i+j$ тождественно равны нулю.

Соотношения (2.1), (2.2) с коэффициентами ξ_k, η_k, определяемыми из бесконечной алгебраической системы (2.12), определяют точное решение задачи (1.1).

3. Бесконечная алгебраическая система (2.12) может быть решена методом редукции, если матрица **B** определяет линейный, ограниченный и вполне непрерывный оператор из $\mathbf{l}_2$ в $\mathbf{l}_2$ [2].

Для доказательства линейности и ограниченности оператора **B** достаточно показать [2], что

(3.1) $$\|\mathbf{B}\|=\sup_{\|\boldsymbol{\zeta}\|<1}\left|\sum_{i,j=0}^{\infty}b_{ij}\zeta_i\zeta_j\right|<\infty$$

$$\forall\boldsymbol{\zeta}\in\mathbf{l}_2,\qquad \|\boldsymbol{\zeta}\|^2=\sum_{i,j=0}^{\infty}\zeta_i^2$$

Раскрывая выражения матричных элементов b_{ij}, имеем

(3.2) $$\sum_{i,j=0}^{\infty}b_{ij}\zeta_i\zeta_j=\frac{2}{l_1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mu_k\cos\lambda_m l_2}{\mu_k^2-\lambda_m^2}\eta_k\xi_m+$$

$$+\frac{2}{l_1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\mu_m\cos\lambda_k l_2}{\mu_m^2-\lambda_k^2}\alpha_{mk}\eta_k\xi_m\equiv S_1+S_2$$

Здесь $\alpha_{mk}\equiv\operatorname{th}\mu_m h_2\operatorname{cth}\mu_k h_1$ и снова введены обозначения $\zeta_{2k}=\eta_k$, $\zeta_{2k+1}=\xi_k$. Оценим отдельно каждую из сумм S_1 и S_2.

Запишем выражение S_1 в форме

(3.3) $$S_1=\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2}{l_1}a_{km}\xi_m$$

Можно видеть, что $2a_{km}/l_1$ являются коэффициентами Фурье функции $l\{\cos\mu_k x\}$, разложенной по $\cos\lambda_m x$, а $\{\xi_m\}\in\mathbf{l}_2$. Следовательно, по теореме Фишера – Рисса существует функция $\varphi(x)\in\mathbf{L}_2$, коэффициенты Фурье которой равны ξ_m, причем $\varphi(x)=$ $=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\xi_m\cos\lambda_m x$. Используя равенство Парсеваля, получим

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2}{l_1}a_{km}\xi_m=\frac{2}{l_1}\int_0^{l_2}\varphi(x)\cos\mu_k x\,dx=\frac{l_2}{l_1}\frac{2}{l_2}\int_0^{l_2}\varphi(x)\cos\mu_k x\,dx$$

т. е. внутренняя сумма в выражении S_1 (3.3) представляет собой коэффициент Фурье разложения функции $\varphi(x)$, продолженной четно и нечетно-периодически на интервал с периодом $4l_2$. Обозначим указанные коэффициенты Фурье через ξ_k^1. Тогда

$$S_1=\frac{l_2}{l_1}\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k\xi_k^1,\qquad |S_1|\leqslant\frac{l_2}{l_1}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k\xi_k^1\right|\leqslant\frac{l_2}{l_1}\|\eta\|\|\xi^1\|$$

Можно показать, что $\|\xi^1\|$ равномерно ограничена на шаре $\|\xi\|\leqslant 1$. Действительно

$$\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k^{1^2}=\frac{2}{l_2}\int_0^{l_2}\varphi^2(x)\,dx\leqslant\frac{2}{l_2}\int_0^{l_1}\varphi^2(x)\,dx=\frac{l_1}{l_2}\frac{2}{l_1}\int_0^{l_1}\varphi^2(x)\,dx=\frac{l_1}{l_2}\|\xi\|^2$$

Окончательно имеем

$$|S_1|\leqslant\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{1/2}\|\xi\|\|\eta\| \tag{3.4}$$

При оценке суммы S_2 запишем ее в форме

$$\frac{l_1}{2}S_2=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\mu_k\cos\lambda_k l_2}{\mu_m^2-\lambda_k^2}\alpha_{mk}\eta_k\xi_m= \tag{3.5}$$

$$=\frac{l_1}{l_2}\sum_{m=0}^{\infty}\xi_m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k a_{mk}}{\mu_m}\alpha_{mk}\eta_k$$

Учитывая, что

$$l\{\sin\mu_m x\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\lambda_k\cos\lambda_k l_2}{\mu_m^2-\lambda_k^2}\sin\lambda_k x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{l_1}\frac{\lambda_k a_{mk}}{\mu_m}\sin\lambda_m x$$

и так как $\{\alpha_{mk}\eta_k\}\in\mathbf{l}_2$, то по теореме Фишера – Рисса существует функция

$$\psi_k(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{mk}\eta_m\sin\lambda_m x$$

В силу равенства Парсеваля внутренняя сумма в (3.5) равна

$$\frac{2}{l_1}\int_0^{l_2}\psi_m(x)\sin\mu_m x\,dx$$

и, следовательно,

$$\frac{l_1}{2}S_2=\frac{l_1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\xi_m\frac{2}{l_2}\int_0^{l_2}\psi_m(x)\sin\mu_m x\,dx=\frac{l_1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\xi_m\eta_m^1$$

откуда

$$|S_2|\leqslant\|\xi\|\|\eta^1\| \tag{3.6}$$

Аналогично тому, как это было сделано при оценке S_1, можно показать, что имеет место $\|\eta^1\|^2\leqslant l_1/l_2\|\eta\|^2$.

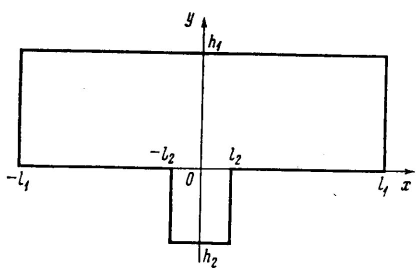
Следовательно

$$|S_2|\leqslant(l_1/l_2)^{1/2}\|\xi\|\,\|\eta\|$$

Из (3.1), (3.2), (3.4), (3.6) следует, что **B** есть линейный ограниченный оператор из $\mathbf{l}_2$ в $\mathbf{l}_2$. Аналогично доказывается полная непрерывность оператора **B**.

Таким образом, бесконечная алгебраическая система (2.12) действительно может быть решена методом редукции.

4. Расчет значений скорости $u(x, y)$ (2.1) с помощью выражений (2.2) и бесконечной алгебраической системы (2.12) был проведен для канала, изображенного на фиг. 1 при $h_1=\pi/2$, $h_2=-1$, $l_1=\pi^2/4$,

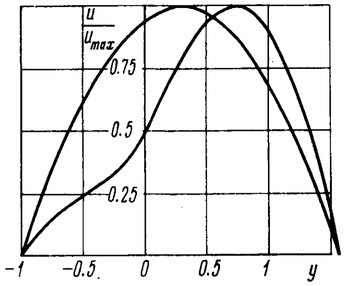


Фиг. 1

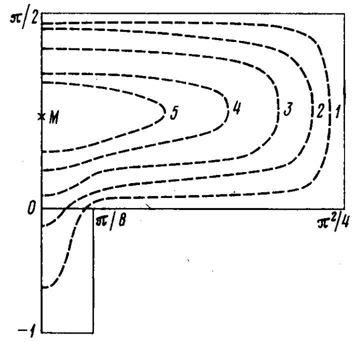
$l_2=\pi/2k$ и $k=0.64$, что соответствует каналу, близкому к прямоугольному ($l_1 \approx l_2$), и $k=4$. Решение редуцированной системы (2.12) было выполнено на ЭЦВМ ЕС-1010 методом Гаусса с выбором главного элемента, причем максимальный порядок редукции системы был равен 44.

На фиг. 2 приведены графики отношения $u(x, y)/u_{max}$ в сечении канала $x=0$ при $k=0.64$ и 4.

На фиг. 3 приведены линии уровня скорости в канале при $k=4$; кривым *1–5* соответствуют значения $u/u_{max}=0.2$, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, точке $M-u=u_{max}$.



Фиг. 2



Фиг. 3

В заключение отметим, что при $k=2/\pi$ ($l_1=l_2$) бесконечная алгебраическая система (2.12) расщепляется, определяя точное значение коэффициентов ξ_k и η_k. При этом решение $u(x, y)$ (2.1), (2.2) совпадает с известным точным решением задачи о стационарном протекании несжимаемой вязкой жидкости сквозь трубу прямоугольного сечения [1].

Поступила 19 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.

УДК 532.51.011

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СОСУДЕ

Н. К. РАДЯКИН

(Харьков)

Рассматривается задача о нахождении декремента затухания и частот нормальных колебаний маловязкой жидкости, вращающейся в осесимметричном сосуде. Применение метода пограничного слоя позволяет выписать ответ через решения соответствующей задачи для идеальной жидкости.

1. Постановка задачи. Пусть несжимаемая маловязкая жидкость занимает область Ω, ограниченную стенкой Σ произвольного осесимметричного сосуда и свободной равновесной поверхностью Γ. Будем считать, что сосуд вместе с жидкостью равномерно вращается в условиях, близких к невесомости, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0=\omega_0\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ – орт оси симметрии z.

Рассмотрим задачу о нормальных колебаниях жидкости, т. е. о движениях, зависящих от времени по закону $\exp(\lambda t)$. Линеаризованные уравнения движения жидкости запишем в цилиндрической системе координат $\mathbf{x}=(r, \theta, z)$, жестко связанной с сосудом. Для записи граничных условий на Γ в ее окрестности введем ортогональную криволинейную систему координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3). Координату ξ^3 направим по внешней по отношению к Ω нормали n к Γ, выбрав коэффициент Ляме $h_{\xi^3}=1$ на Γ, т. е. при $\xi^3=0$. Тогда уравнения движения и линеаризованные граничные условия