

СТАЦИОНАРНАЯ КОНВЕКЦИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

Т. П. ЛЮБИМОВА, Д. В. ЛЮБИМОВ

(Пермь)

Рассматривается плоскопараллельное конвективное движение вязкопластичной жидкости между параллельными вертикальными плоскостями, на которых поддерживаются разные температуры. В отличие от [1] предельное напряжение сдвига τ_0 не является постоянным, а считается функцией температуры, причем начиная с некоторой критической температуры T_* предельное напряжение равно нулю, так что при $T > T_*$ жидкость является чисто ньютоновской. Изучена структура зон квазитвердого и вязкопластического течений в зависимости от реологических параметров. Найдены профили скорости, соответствующие различным режимам течения, определены границы между режимами и продольный тепловой поток.

Рассмотрим стационарное конвективное движение вязкопластичной жидкости в бесконечном вертикальном слое. На границах слоя $x = \pm h$ поддерживаются постоянные разные температуры $T = T_0 \mp \Theta$. В плоскопараллельном движении отлична от нуля лишь вертикальная составляющая скорости $v_y = v(x)$, а температура зависит лишь от поперечной координаты $T = T(x)$. В этом случае уравнения конвекции в приближении Буссинеска в безразмерной форме имеют вид

$$(1) \quad -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \vartheta = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = 0$$

где p — конвективная добавка к гидростатическому давлению, τ — напряжение сдвига, $\vartheta = (T - T_0)/\Theta$ — температура. В качестве единиц измерения длины, температуры, напряжения и давления выбраны соответственно: h , Θ , $\rho g \beta \Theta h$ (ρ — плотность жидкости при температуре T_0 , β — коэффициент теплового расширения, g — ускорение силы тяжести).

Уравнения (1) должны быть дополнены реологическим соотношением, которое для вязкопластической жидкости имеет вид (модель Шведова — Бингама)

$$(2) \quad \tau = \frac{dv}{dx} + \tau_0 \operatorname{sign} \left(\frac{dv}{dx} \right)$$

У многих реальных вязкопластичных сред предельное напряжение сдвига τ_0 убывает с ростом температуры, причем начиная с некоторой критической температуры T_* жидкость не проявляет свойств пластичности. В качестве простейшей модели, описывающей такое поведение, примем следующую зависимость τ_0 от температуры:

$$(3) \quad \tau_0 = \lambda(\vartheta_* - \vartheta) \quad (\vartheta < \vartheta_*), \quad \tau_0 = 0 \quad (\vartheta > \vartheta_*) \\ \lambda = \Lambda / \rho g \beta h, \quad \vartheta_* = (T_* - T_0) / \Theta$$

где Λ — коэффициент температурной зависимости предельного напряжения.

На границах слоя ставятся условия прилипания и изотермичности стенок канала и, кроме того, считается выполненным условие замкнутости течения

$$(4) \quad v(\pm 1) = 0, \quad \vartheta(\pm 1) = \mp 1$$

$$(5) \quad \int_{-1}^1 v dx = 0$$

Задача (1) – (5) содержит два безразмерных параметра (λ и ϑ_*). В дальнейшем окажется удобным использовать еще два параметра – число Грасгофа G и параметр Π

$$G = \rho^2 g \beta \Theta h^3 \eta^{-2}, \quad \Pi = \rho \Lambda (T_* - T_0 + \Theta) h^2 \eta^{-2}, \quad \Pi = \lambda (\vartheta_* + 1) G$$

При условии $\Pi > 0$ параметр Π характеризует предельное напряжение при температуре холодной стенки.

Из уравнения теплопроводности следует: $\vartheta = -x$. Исключая из первых двух уравнений системы (1) давление и интегрируя, получим

$$\tau = \frac{1}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

где C_1, C_2 – постоянные, подлежащие определению из граничных условий.

Введем функцию $f(x)$ соотношением

$$f(x) = \tau - \tau_0 \operatorname{sign} \tau \quad (|\tau| \geq \tau_0), \quad f(x) = 0 \quad (|\tau| < \tau_0)$$

Тогда условия прилипания и замкнутости течения можно переписать в виде

$$(6) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 x f(x) dx = 0$$

Уравнения (6) служат для определения постоянных C_1 и C_2 . Зная C_1 и C_2 , можно построить распределение скорости в слое, пользуясь выражением

$$v(x) = \int_{-1}^x f(\xi) d\xi$$

Важной характеристикой является конвективный поток тепла вдоль слоя, который дается выражением (в размерном виде)

$$Q = \rho c_p \int_{-h}^h v(x) T(x) dx$$

Для случая ньютоновской жидкости [2]

$$Q_0 = \frac{2}{45} \frac{\rho^2 c_p g \beta \Theta^2 h^3}{\eta}$$

В безразмерной форме продольный теплоток равен

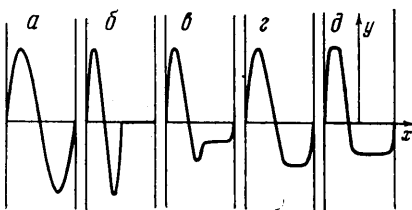
$$N = \frac{Q}{Q_0} = \frac{45}{2} \int_{-1}^1 v(x) \vartheta(x) dx = \frac{45}{4} \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx$$

Уравнения (6) для C_1, C_2 решались численно с использованием метода Гаусса [3]. В отдельных частных случаях решение удалось получить аналитически.

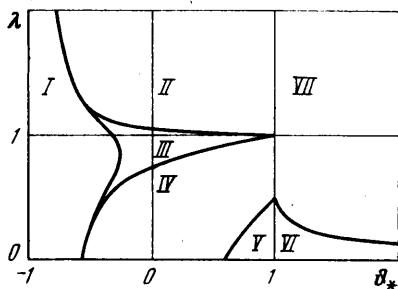
В зависимости от значений параметров λ и ϑ_* могут реализоваться различные режимы течения.

При $\vartheta_* < -1$ всюду внутри слоя $\tau_0 = 0$ (ньютоновская жидкость). Этот случай подробно рассмотрен в [2]. В дальнейшем всюду будет считаться $\vartheta_* > -1$.

При $\vartheta_* > 1$ всюду внутри слоя предельное напряжение отлично от нуля. Это означает, что при достаточно малых разностях температур между границами слоя конвективное движение невозможно. При превышении некоторой пороговой разности температур в слое возникает конвективное движение. Оно имеет вид двух встречных потоков, в центральной части каждого из которых находится зона квазитвердого движения. Типичный профиль скорости для этого случая изображен на фиг. 1, ϑ ($\lambda =$



Фиг. 1



Фиг. 2

$= 0.2, \vartheta_* = 1.2$). На границе существования данного режима зоны квазитвердого движения должны захватывать весь слой, т. е.

$$\tau(\pm 1) = \tau_0(\pm 1), \quad \tau(x_a) = -\tau_0(x_a), \quad \tau'(x_a) = -\tau_0'(x_a)$$

где x_a — точка слияния зон квазитвердого движения. Исключая из написанных четырех уравнений C_1, C_2 и x_a , получим $\vartheta_* = (4\lambda^2 + 1) / 4\lambda, \lambda < 1/2$, откуда для порогового значения числа Грасгофа G_* , по достижении которого начинается конвекция, следует формула:

$$G_* = \frac{4\pi}{(2\lambda + 1)^2}, \quad \lambda < \frac{1}{2}$$

При $\lambda > 1/2$ конвекция отсутствует при любых $\vartheta_* > 1$, т. е. до тех пор, пока температура горячей стенки меньше T_* . Это означает, что при $\lambda > 1/2$ пороговое значение числа Грасгофа дается выражением $G_* = \pi / 2\lambda$.

При $\vartheta_* < 1$ ($G > \pi / 2\lambda$) температура горячей стенки выше T_* , поэтому конвективное движение будет иметь место при любых λ . Расчеты показывают, что при $-1 < \vartheta_* < 1$ возможны различные режимы течения. Области их существования на плоскости $\lambda\vartheta_*$ изображены на фиг. 2. При достаточно большой температуре горячей стенки (ϑ_* близко к -1 , область I на фиг. 2) предельное напряжение отлично от нуля лишь в узкой области около холодной стенки. При этом всюду в слое напряжение больше предельного, т. е. квазитвердые зоны отсутствуют. Наличие участка с отличным от нуля предельным напряжением проявляется лишь в том, что в отличие от ньютоновской жидкости течение не обладает определенной симметрией. Около холодной стенки скорость движения меньше, чем у горячей, что объясняется эффективным увеличением вязкости. В силу условия замкнутости течения точка изменения знака скорости при этом сме-

щается от середины слоя в сторону горячей стенки. Пример профиля скорости изображен на фиг. 1, а ($\lambda=0.8$, $\vartheta_*=-0.7$). Для данного случая удастся также получить явное выражение для теплового потока

$$N=1-^{15}/_{16}\lambda(1-\vartheta_*^2)^2$$

При достаточно больших λ (большой коэффициент температурной зависимости предельного напряжения) и фиксированном ϑ_* предельное напряжение около холодной стенки настолько велико, что жидкость в некоторой области около этой стенки остается в покое. На фиг. 2 этому режиму соответствует область II. Типичный профиль скорости ($\lambda=2$, $\vartheta_*=0$) изображен на фиг. 1, б. Граница между областями I и II дается выражением

$$\lambda = \frac{4}{3(1+\vartheta_*)(1-\vartheta_*)^2}, \quad \vartheta_* < -\frac{1}{2}$$

При $\vartheta_* > -1/2$ (ньютоновская область занимает больше четверти слоя) с уменьшением λ предельное напряжение на холодной стенке уменьшается и около этой стенки появляется область вязкопластического течения (область III на фиг. 2). При этом квазитвердая зона уже не может быть неподвижной, однако скорость в ней не достигает экстремального значения (профиль скорости для $\lambda=0.9$, $\vartheta_*=0$ приведен на фиг. 1, в). Граница между областями II и III описывается формулой

$$(7) \quad \lambda = \frac{2(11-\vartheta_*+\sqrt{\vartheta_*^2+22\vartheta_*+13})^3}{81(5+\vartheta_*+\sqrt{\vartheta_*^2+22\vartheta_*+13})^2}, \quad \vartheta_* > -\frac{1}{2}$$

При дальнейшем уменьшении λ интенсивность движения в правой половине слоя возрастает, экстремум скорости смещается в сторону холодной стенки и достигает левой границы зоны квазитвердого движения при выполнении условия

$$(8) \quad \lambda = \frac{4-12\vartheta_*x_*+12\vartheta_*^2+x_*^3}{6(\vartheta_*-1)^2}$$

$$(9) \quad 3x_*^4+4(1-\vartheta_*)x_*^3-24(1+\vartheta_*)^2x_*+8(3\vartheta_*^3+6\vartheta_*^2+7\vartheta_*+2)=0$$

где x_* — координата правой границы зоны квазитвердого движения — определяется из уравнения (9).

Если зафиксировать λ между значениями, определяемыми формулами (7) и (8), и уменьшать ϑ_* (увеличивать температуру горячей стенки), то ширина квазитвердой зоны будет уменьшаться вплоть до нуля. Граница между областями I и III имеет вид

$$\lambda = \frac{4}{(\vartheta_*-1)^2(3\pm\sqrt{-3(\vartheta_*^2+4\vartheta_*+1)})}$$

При значениях λ , меньших λ , определяемого формулой (8), реализуется движение с одной квазитвердой зоной в нисходящем потоке, причем в ней достигается экстремальное значение скорости (область IV на фиг. 2; профиль скорости для $\lambda=0.4$, $\vartheta_*=0$ на фиг. 1, г). Наконец, при значениях ϑ_* , достаточно близких к единице (предельное напряжение отлично от нуля в большей части слоя), и небольших λ квазитвердая зона появляется и в восходящем потоке (область V на фиг. 2). Граница между областями IV и V может быть найдена из системы уравнений

$$(10) \quad \begin{aligned} 2-6A\vartheta_*+\lambda(8\lambda^2+6A^2+3\vartheta_*^2+12A\vartheta_*-6\vartheta_*-3) &= 0 \\ 2\vartheta_*-2A+\lambda(8\lambda^2\vartheta_*+16\lambda^2A+6A^2\vartheta_*-\vartheta_*^3+4A^3-3\vartheta_*-2) &= 0 \end{aligned}$$

где A — полусумма координат границ квазитвердой зоны в нисходящем потоке.

Кривая $\lambda(\vartheta_*)$, определяемая уравнениями (10), при ϑ_* , близких к единице, описывается выражением

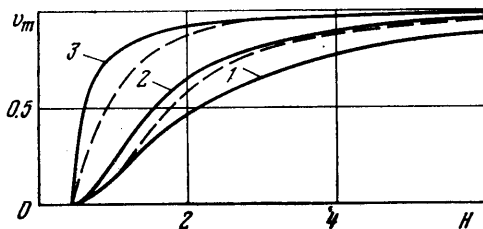
$$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4}(1-\vartheta_*)^{\frac{3}{2}} + O(1-\vartheta_*)$$

т. е. подходит к точке $\lambda=1/2$, $\vartheta_*=1$ с бесконечной производной — особенностью, неразрешаемая в масштабе фиг. 2.

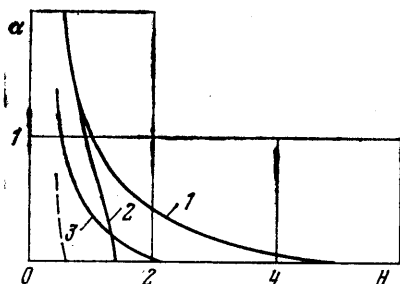
Течение в области V имеет тот же характер, что и в обсуждавшемся выше случае $\vartheta_* > 1$ (область VI), так что граница между ними $\vartheta_*=1$, имеет условный характер, разделяя случаи, когда температура горячей стенки выше или ниже T_* .

На фиг. 2 изображена также область VII, в которой конвективное движение отсутствует.

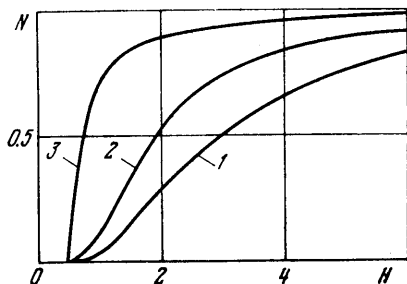
На фиг. 3 изображена зависимость от $G\lambda/\Pi=H$ максимального (сплошные линии) и минимального (штриховые линии) значений



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

скорости в слое, отнесенных к соответствующим величинам для ньютоновской жидкости. Кривые 1—3 соответствуют значениям $\lambda=2, 0.9, 0.2$. Как видно, различие в скоростях восходящего и нисходящего потоков заметно лишь при достаточно малых числах Грасгофа. Для $\lambda=2$ (кривая 1) максимальная и минимальная скорости в масштабе графика совпадают. Это связано с тем, что большую часть области, в которой отлично от нуля предельное напряжение, занимает неподвижная квазитвердая зона, так что в оставшейся части формируется практически симметричный ньютоновский профиль скорости.

На фиг. 4 изображена (для тех же значений λ) зависимость от H ширины квазитвердой зоны в нисходящем потоке (сплошные линии). Штриховой линией изображена ширина квазитвердой зоны в восходящем потоке для $\lambda=0.2$. При $\lambda=2$ и 0.9 квазитвердые зоны в восходящем потоке отсутствуют. Отметим, что на границе областей III и I ширина квазитвердой зоны обращается в нуль по корневому закону, тогда как в остальных случаях производная по G остается конечной. Выражения для производных громоздки и здесь не приводятся.

На фиг. 5 приведена зависимость приведенного теплового потока N от параметра H (нумерация кривых та же, что и на фиг. 3). Как видно, конвективный перенос тепла вдоль слоя всюду меньше, чем поток при соответ-

ствующих числах Грасгофа в ньютоновской жидкости, асимптотически приближаясь к последнему при $G \rightarrow \infty$.

Авторы благодарят Г. З. Гершуни и А. А. Непомнящего за полезное обсуждение работы.

Поступила 3 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Янг Вен-ей, Е Су-чень. Свободная конвекция пластика Бингама между двумя вертикальными пластинами. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., Сер. С. Теплопередача, 1965, т. 87, № 2.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
3. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1963.