

**О ЦЕНТРЕ ДАВЛЕНИЯ КОНИЧЕСКИХ ТЕЛ**

**Н. А. ОСТАПЕНКО**

(Москва)

Рассматриваются формы конических тел, положение центра давления которых при сверхзвуковом обтекании с плоскостью симметрии не зависит от параметров течения.

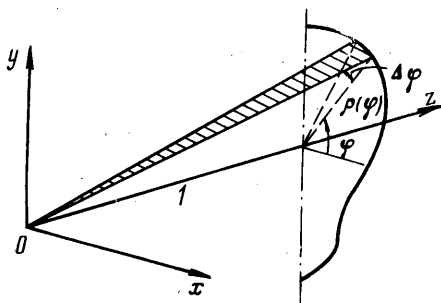
Теоретическое исследование аэродинамических характеристик круговых конусов [1] показало, что их центр давления в случае, когда ударная волна присоединена к вершине конуса, не зависит от угла атаки  $\alpha$ . Экспериментально в [2, 3] для звездообразных тел в широком диапазоне чисел Маха и углов атаки было установлено, что положение центра давления звездообразного тела практически не меняется.

1. Рассмотрим коническое тело (фиг. 1), симметричное относительно плоскости  $yz$ , в сверхзвуковом потоке без скольжения. Тогда единичный вектор скорости потока будет иметь вид

$$(1.1) \quad \mathbf{u} = \sin \alpha \mathbf{j} + \cos \alpha \mathbf{k}$$

где  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  — направляющие векторы осей  $y$  и  $z$  прямоугольной системы координат  $xuz$  с центром в вершине тела.

Пусть форма поперечного контура конического тела в цилиндрической системе координат  $(\rho, \varphi, z)$  (фиг. 1) в сечении  $z=1$  описывается функ-



Фиг. 1

цией  $\rho = \rho(\varphi)$ , где  $\varphi$  — полярный угол, отсчитываемый от положительного направления оси  $x$ . Тогда внешний единичный вектор, нормальный к поверхности тела, и дифференциал площади конической поверхности соответственно запишутся в виде

$$(1.2) \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho'^2 + \rho^2/\rho^2}} \left\{ \left( \cos \varphi + \frac{\rho'}{\rho} \sin \varphi \right), \left( \sin \varphi - \frac{\rho'}{\rho} \cos \varphi \right), -\rho \right\}$$

$$(1.3) \quad ds = \frac{1}{2} L^2 \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$$

где  $L$  — длина тела.

Предположим, что давление  $p$  на поверхности тела является функцией только угла  $\varphi$  и параметров набегающего потока, что справедливо при сверхзвуковом характере течения в ударном слое. В этом случае равнодействующая сил, действующих на элемент конической поверхности, заключенный в малом интервале  $\Delta\varphi$  (обозначен штриховкой на фиг. 1), будет приложена в центре тяжести этого элемента поверхности.

Координаты центра тяжести элемента конической поверхности для ограниченных функций  $\rho(\varphi)$  и ее производной запишутся в виде

$$(1.4) \quad x = \frac{2}{3}L(\rho \cos \varphi + O(\Delta\varphi)), \quad y = \frac{2}{3}L(\rho \sin \varphi + O(\Delta\varphi)), \quad z = \frac{2}{3}L$$

Используя соотношения (1.2) — (1.4) и считая  $p(\varphi) \geq 0$ , найдем выражение для координаты центра давления конического тела

$$(1.5) \quad C_g = \frac{z_g}{L} = \\ = \frac{2}{3} \left[ 1 + \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\varphi) \rho^3 \sin \varphi d\varphi}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\varphi) (\rho \sin \varphi - \rho' \cos \varphi) d\varphi} \right]$$

Пусть положение центра давления не меняется и определяется формулой

$$(1.6) \quad C_g = \frac{2}{3}(1+a^2)$$

где  $a$  — некоторая константа.

Тогда функция  $\rho(\varphi)$  должна удовлетворять уравнению

$$(1.7) \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\varphi) [\rho^3 \sin \varphi - a^2(\rho \sin \varphi - \rho' \cos \varphi)] d\varphi = 0 \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\varphi) (\rho \sin \varphi - \rho' \cos \varphi) d\varphi \neq 0$$

Одно из решений уравнения (1.7) доставляют функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$(1.8) \quad \rho^3 \sin \varphi - a^2(\rho \sin \varphi - \rho' \cos \varphi) = 0$$

интеграл которого запишется в виде

$$(1.9) \quad \rho^2 = \frac{a^2 \rho_0^2 \cos^2 \varphi_0}{\rho_0^2 \cos^2 \varphi_0 + (a^2 - \rho_0^2) \cos^2 \varphi}$$

Здесь  $(\rho_0, \varphi_0)$  — некоторая точка в плоскости  $z=1$ .

Конические тела с формой поперечного контура (1.9) представляют собой эллиптические конуса, у которых тангенс угла наклона образующей к оси  $z$  в плоскости симметрии  $yz$  равен  $a$ .

Таким образом, положение центра давления эллиптического конуса при сверхзвуковом обтекании с плоскостью симметрии полностью определяется отношением полуоси эллипса в миделевом сечении конуса, лежащей в плоскости симметрии, к длине конуса и не зависит от параметров течения.

В частности, для кругового конуса  $a = \operatorname{tg} \theta$  (см. (1.6)) ( $\theta$  — полуугол раствора конуса) и  $C_g = \frac{2}{3}(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)$ , что соответствует результатам [1], полученным численно.

2. Пусть коэффициент давления  $c_p$  определен по формуле Ньютона или ее модификациям:  $c_p = A \cos^2(\mathbf{n}, \mathbf{u})$ , где  $A$  — некоторая константа, в общем случае зависящая от характеристик набегающего потока.

Тогда давление на поверхности тела с учетом (1.1) и (1.2) запишется в виде

$$(2.1) \quad p(\varphi) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2 A \frac{[\sin \alpha (\sin \varphi - \rho' / \rho \cos \varphi) - \rho \cos \alpha]^2}{1 + \rho^2 + \rho'^2 / \rho^2}$$

Здесь  $p_\infty$ ,  $\rho_\infty$ ,  $u_\infty$  — соответственно давление, плотность и скорость невозмущенного потока.

Подставляя (2.1) в (1.7), найдем, что форма поперечного контура конического тела  $\rho(\varphi)$ , не зависящая от угла атаки  $\alpha$ , должна удовлетворять следующим уравнениям

$$(2.2) \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi(\rho, \rho', \varphi) d\varphi = 0, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2 \Phi(\rho, \rho', \varphi) d\varphi = 0$$

$$(2.3) \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \sin \varphi - \frac{\rho'}{\rho} \cos \varphi \right)^2 \Phi(\rho, \rho', \varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho \left( \sin \varphi - \frac{\rho'}{\rho} \cos \varphi \right) \Phi(\rho, \rho', \varphi) d\varphi = 0$$

$$\Phi(\rho, \rho', \varphi) = [\rho^3 \sin \varphi - a^2 (\rho \sin \varphi - \rho' \cos \varphi)] (1 + \rho^2 + \rho'^2 / \rho^2)^{-1}$$

Нетрудно установить, что соотношениям (2.2), (2.3) удовлетворяют четные функции  $\rho(\varphi)$ .

Таким образом, будем искать решение в классе четных функций, удовлетворяющее уравнению

$$(2.4) \quad \int_0^{\pi/2} \rho \left( \sin \varphi - \frac{\rho'}{\rho} \cos \varphi \right) \Phi(\rho, \rho', \varphi) d\varphi = 0$$

Вообще говоря,  $\rho(\varphi)$  в интервале  $[0, \pi/2]$  может не иметь единого аналитического представления, что соответствует наличию изломов поперечного контура, разрыву кривизны и т. п. Тогда функция  $\rho(\varphi)$  должна удовлетворять уравнению (2.4), в котором интеграл взят в пределах от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$ , где  $[\varphi_1, \varphi_2]$  — некоторый подынтервал, заключенный внутри интервала  $[0, \pi/2]$ .

Будем говорить в этом случае, что поперечный контур состоит из циклов.

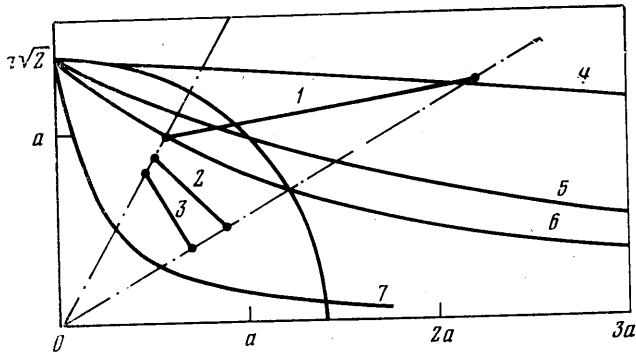
Найдем решения уравнения (2.4) вида

$$(2.5) \quad \rho = c / \cos(\varphi - \sigma)$$

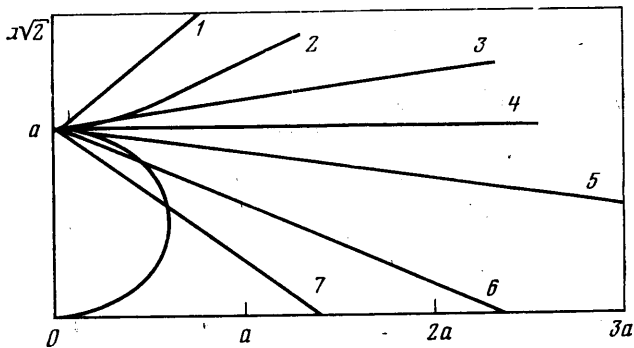
представляющие собой отрезки прямых в интервале  $[\varphi_1, \varphi_2]$ . В выражении (2.5)  $c$  — длина перпендикуляра, опущенного из центра полярной системы координат в плоскости  $z=1$  на указанную прямую,  $\sigma$  — угол, который составляет этот перпендикуляр с положительным направлением оси  $x$ .

Подставляя (2.5) в (2.4) и интегрируя в пределах от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$ , получим

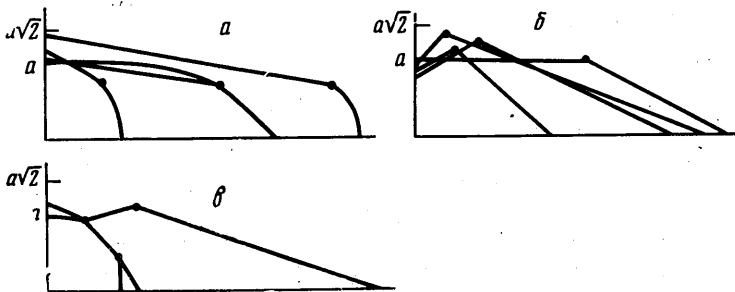
$$(2.6) \quad c^2 = 2a^2 \sin^2 \sigma \left( 1 + \frac{\operatorname{ctg} \sigma - \operatorname{tg} \sigma \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + 2 \operatorname{tg} \sigma \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 + \operatorname{tg} \varphi_2} \right)$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

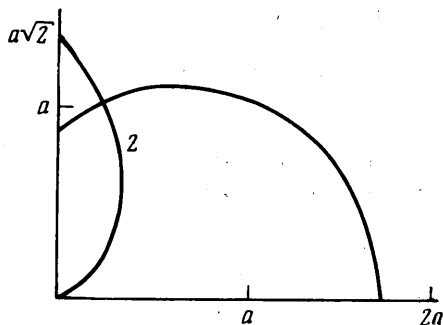
Задавая значения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , можно получить различные отрезки прямых внутри циклов, из которых затем составляется замкнутый поперечный контур конического тела. В качестве примера на фиг. 2 изображены отрезки прямых для различных значений угла  $\sigma$  в интервале  $[\pi/6, \pi/3]$  (линии, ограниченные на концах точками; прямые 1–3 соответствуют значениям угла  $\sigma$ , равным 100, 45 и 30°). Там же линиями, входящими в точку  $(0, a\sqrt{2})$ , нанесены положения границы  $\varphi_2$  прямолинейных циклов  $[0, \varphi_2]$  для значений  $\sigma=80, 45, 30$  и  $5^\circ$  (кривые 4–7 соответственно).

Следует заметить, что решений уравнения (2.6) при  $\varphi_1=0$  и  $\sigma < 0$  не существует. Т. е. прямолинейный цикл, граница которого совпадает с  $\varphi_1=0$ , может быть образован лишь отрезками прямых, имеющих отрицательный наклон.

Используя приведенные на фиг. 2 данные для цикла  $[0, \pi/2]$ , можно сделать заключение, что к телам с неизменным центром давления (1.6) относятся различные ромбовидные крылья. Причем в этом случае  $a = l/2\sqrt{2}$ , где  $l$  — диагональ поперечного сечения крыла в плоскости  $z=1$ , лежащая в плоскости симметрии течения.

Дуга окружности радиуса  $a\sqrt{2}$  на фиг. 2 соответствует положениям границы  $\varphi_2 = \sigma$  прямолинейных циклов  $[0, \sigma]$ . На фиг. 3 линиями, выходящими из точки  $(0, a)$ , нанесены положения границы циклов  $(\varphi_1, \pi/2)$  для значений угла  $\sigma = 135, 120, 100, 90, 80, 60, 45^\circ$  (кривые 1–7 соответственно). Кривая, соединяющая точки  $(0, 0)$  и  $(0, a)$ , соответствует положению границы  $\varphi_1 = \sigma$  прямолинейных циклов  $[\sigma, \pi/2]$ .

Для построения поперечного контура конического тела, состоящего в интервале  $[0, \pi/2]$  из двух прямолинейных циклов, необходимо взять произвольную точку пересечения кривых на фиг. 2 и 3 и вывести из нее под соответствующими углами отрезки прямых до пересечения с осями  $x$  и  $y$ . Кроме того, поперечный контур может быть построен и из комбинации прямолинейного и криволинейного циклов, причем вторыми являются отрезки окружности или эллипсов с полуосью по оси ординат, равной  $a$  в плоскости  $z=1$ .



Фиг. 5

Некоторые из характерных поперечных контуров, состоящие из двух циклов, представлены на фиг. 4, а, б. Точками указаны места сопряжения циклов, в которых поперечный контур терпит излом. На фиг. 4, в изображены контуры, состоящие из трех циклов.

Заметим, что при увеличении количества циклов и  $\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$  соотношение (2.6) переходит в дифференциальное уравнение (1.8) с соответствующим ему решением (1.9).

В общем случае решение уравнения (2.4) можно искать в виде

$$(2.7) \quad \rho = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos^k \varphi$$

Здесь  $b_k$  — постоянные числа.

Два из простых решений вида (2.7) для тонких тел ( $\rho^2 \ll 1$ )  $\rho = 0.85a(1 + \cos \varphi)$  и  $\rho = 1.35a(1 - \cos \varphi)$  представлены на фиг. 5 (кривые 1 и 2 соответственно).

3. Из результатов, приведенных в п. 2, следует, что звездообразные тела не принадлежат к коническим телам с неизменным положением центра давления.

Поперечный контур звездообразного тела можно описать функцией

$$\rho = \frac{r \cos(\beta - \pi/n)}{L \sin[\varphi - (2\pi(k-1)/n \mp \beta)]}$$

$$\frac{\pi}{2} \left[ 1 + \frac{(4k-3) \mp 1}{n} \right] \geq \varphi \geq \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \frac{(4k-5) \mp 1}{n} \right]$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R - r \cos(\pi/n)}{r \sin(\pi/n)}$$

Здесь  $n$  — количество лепестков звездообразного тела,  $k$  — номер лепестка, отсчитываемый против часовой стрелки, причем  $k=1$  соответствует лепестку, симметричному относительно плоскости  $yz$ . Верхний знак соответствует правой грани лепестка, нижний — левой, если смотреть вниз по потоку,  $R$  и  $r$  — расстояния от внешнего и внутреннего ребер звездообразного тела до оси  $z$  в его миделевом сечении.

Откуда с учетом (1.5) следует, что для положения центра давления звездообразного тела будет справедлива следующая оценка:

$$C_g = {}^{2/3} [1 + O(r^2/L^2)]$$

В гиперзвуковом приближении ( $M_\infty \rightarrow \infty$ ) для небольшого числа циклов звездообразного тела, когда можно пренебречь влиянием сосредоточенных сил [4], действующих в окрестности внутренних ребер тела, выражение для координаты центра давления примет вид ( $n=3$ )

$$C_g \equiv \frac{z_g}{L} = {}^{2/3} \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{r^2}{L^2} \frac{1 + O(\alpha)}{(1 - r/R + r^2/R^2)} \right]$$

Отсюда становится ясной слабая зависимость положения центра давления звездообразного тела от угла атаки при малых значениях параметра  $r/L$  [2, 3].

Автор благодарит Г. Г. Черного за обсуждение результатов работы.

Институт механики МГУ

Поступила 30 III 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяконов Ю. Н., Пчелкина Л. В., Сандомирская И. Д. Сверхзвуковое обтекание затупленных тел. М., Изд-во Моск. ун-та, 1971.
2. Гонор А. Л., Казаков М. Н., Швец А. И., Шейн В. И. Аэродинамические характеристики звездообразных тел при сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 1.
3. Гонор А. Л., Зубин М. А., Остапенко Н. А. Экспериментальное исследование аэродинамических характеристик звездообразных тел при сверхзвуковых скоростях. Тр. Ин-та механики МГУ «Неравновесные течения газа и оптимальные формы тел в сверхзвуковом потоке». М., Изд-во Моск. ун-та, 1978.
4. Гонор А. Л. Закон сопротивления Ньютона для тел, образованных пересекающимися поверхностями. Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1.