

**ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ ПРОНИЦАЕМОСТИ НА КОНВЕКЦИЮ
И ПЕРЕНОС ТЕПЛА В ПОРИСТОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПРОСЛОЙКЕ**

В. А. БРАЙЛОВСКАЯ, В. Р. КОГАН, В. И. ПОЛЕЖАЕВ

(Горький, Москва)

Исследования конвективного переноса тепла в пористых материалах представляют интерес для многих приложений в связи с проблемой повышения эффективности тепловой изоляции. В работах [1-5] рассматривалась конвекция в изотропных пористых средах. Во многих случаях пористые материалы обладают, однако, существенной анизотропией проницаемости. Особенности конвективного теплообмена в этом случае изучены недостаточно. В работе [6] на основе линеаризованных уравнений рассматривалось возникновение конвекции между бесконечными горизонтальными плоскостями с заполнением из анизотропного материала; найдено значение критического числа Рейля, которое удовлетворительно согласуется с опытными данными.

В данной работе численно исследуется конвекция между двумя бесконечными коаксиальными цилиндрами с анизотропным пористым заполнением на основе уравнений конвекции в приближении Дарси - Буссинеска [1-3]. Тензор проницаемости в кольцевой области построен по его главным значениям, которые могут быть найдены экспериментально. Разработана методика расчета и выполнено параметрическое исследование структуры течения, местных и средних характеристик теплообмена, представляющих интерес для проектирования тепловой изоляции.

1. Тензор проницаемости анизотропного пористого материала в кольцевой области. Обозначим $K_{ij}(x, y)$ тензор проницаемости пористой среды, заполняющей кольцевую прослойку. Будем предполагать, что он симметричен, веществен и ранг его равен двум.

Пусть в каждой точке кольца одно собственное направление тензора K_{ij} совпадает с радиальным, а другое ему ортогонально. Физически это предположение оправдано, например, случаем пористых прослоек, заполненных волоконистым материалом. Очевидно, что в этом случае тензор K_{ij} , а следовательно, и собственные направления l_r, l_φ зависят только от угла φ .

Обозначим через λ диагональную матрицу вида

$$(1.1) \quad \lambda = \begin{pmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_\varphi \end{pmatrix}$$

Пусть k_r, k_φ - собственные значения k_{ij} , отвечающие l_r и l_φ соответственно.

Учитывая свойства симметрических и ортогональных матриц [7] и ортогональности собственных направлений l_r, l_φ , можно показать, что

$$(1.2) \quad K(\varphi) = \begin{pmatrix} k_r \cos^2 \varphi + k_\varphi \sin^2 \varphi & (k_r - k_\varphi) \sin \varphi \cos \varphi \\ (k_r - k_\varphi) \sin \varphi \cos \varphi & k_r \sin^2 \varphi + k_\varphi \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$$

Выражение для обратного тензора $K^{-1}(\varphi)$ имеет вид

$$(1.3) \quad K^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\sin^2 \varphi}{k_\varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{k_r} & \left(\frac{1}{k_r} - \frac{1}{k_\varphi} \right) \sin \varphi \cos \varphi \\ \left(\frac{1}{k_r} - \frac{1}{k_\varphi} \right) \sin \varphi \cos \varphi & \frac{\cos^2 \varphi}{k_\varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{k_r} \end{pmatrix}$$

Нетрудно видеть, что

$$(1.4) \quad K_{11}^{-1}(\varphi) = K_{11}^{-1}(\pi - \varphi), \quad K_{12}^{-1}(\varphi) = -K_{12}^{-1}(\pi - \varphi), \\ K_{22}^{-1}(\varphi) = K_{22}^{-1}(\pi - \varphi)$$

2. Постановка задачи. Уравнение стационарной конвекции в анизотропной пористой кольцевой прослойке при использовании линейного закона Дарси и аппроксимации подъемных сил в приближении Буссинеска запишем в векторном виде

$$(2.1) \quad KV = -\frac{1}{\mu} \text{grad } p + \frac{1}{\mu} \rho g \beta (T - T_0)$$

$$(2.2) \quad \rho C_p (V \nabla) T = \lambda^+ \nabla^2 T, \quad \text{div } V = 0$$

Здесь K — тензор проницаемости, V — вектор скорости, g — вектор силы тяжести, p — отклонение давления от статического, T — температура пористой среды; $T - T_0 = \Delta T$ — разность между местной и некоторой характерной температурами; λ^+ — теплопроводность пористой среды без учета конвекции; μ — динамическая вязкость, β — коэффициент температурного расширения, ρ — плотность, C_p — удельная теплоемкость жидкости, заполняющей поры.

Исключая давление из (2.1), (2.2), получим систему уравнений, которая в полярных координатах с учетом (1.2), (1.3) будет иметь следующий безразмерный вид

$$(2.3) \quad \frac{k_r}{k_\varphi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\text{Ra}^+ \left(\cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right)$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right)$$

$$\text{Ra}^+ = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T \delta c_p k_r}{\mu \lambda}$$

Здесь ψ — функция тока, определяемая в виде $u = -\partial \psi / \partial r$, $v = \frac{1}{r} \partial \psi / \partial \varphi$,

где u , v соответственно, проекции вектора скорости V на оси r , φ , Ra^+ — фильтрационное число Рейлея, отнесенное к проницаемости k_r .

Отметим, что в частном случае изотропного материала при $k_r/k_\varphi = 1$ из (2.3), (2.4) получаем систему уравнений, которая использовалась в работах [4, 5]. В общем случае радиальная часть оператора Лапласа входит в уравнение (2.3) с весом k_r/k_φ .

Будем рассматривать задачу о тепловой конвекции в кольцевой прослойке $r_1 \leq r \leq r_2$ на основе уравнений (2.3), (2.4). Поверхности $r = r_1$ и $r = r_2$ считаются изотермическими, причем $T_2 > T_1$, где T_2 — температура наружной, а T_1 — внутренней поверхностей.

Число Ra^+ в этом случае естественно рассчитывать по зазору $\delta = r_2 - r_1$, а масштабы скорости, температуры, давления в системе (2.3), (2.4) принять равным соответственно a^+/δ , ΔT , $\mu a^+/K_r$, где $a^+ = \lambda^+/C_p \rho$.

Граничные условия системы (2.3), (2.4) для задачи о конвекции в кольцевой области имеют вид

$$(2.5) \quad \theta=1 \quad (r=r_2), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \theta=0, \quad (r=r_1) \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$(2.6) \quad \psi=0, \quad r=r_1, r_2$$

Условие (2.6) означает непроницаемость границы, являющейся линией тока.

Критериальное уравнение для определения средних характеристик теплообмена будет иметь вид $\varepsilon_k = f(\text{Ra}^+, k_r/k_\varphi, r_2/r_1)$. Здесь ε_k — среднее арифметическое значение коэффициентов ε_{k_1} и ε_{k_2} на внутренней и внешней поверхностях, которые определяются в виде

$$\varepsilon_{k_i} = \langle \text{Nu}_i \rangle r_i \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad i=1, 2$$

$$\langle \text{Nu}_i \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_i d\varphi$$

В силу (1.4) система стационарных уравнений (2.3), (2.4) инвариантна относительно замены переменных $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$, $u \rightarrow -u$, $v \rightarrow v$, поэтому достаточно найти ее решение только в половине кольца $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

3. Метод численного решения. Численное решение системы (2.3), (2.4) получено методом сеток. Используется явная дивергентная схема, применявшаяся ранее для расчета тепловой конвекции в изотропных пористых средах [4, 5]. Для решения конечно-разностных уравнений применяется метод Зейделя. Стационарное решение системы находится с помощью итераций по некоторому параметру τ , аналогичному времени. Значения этого параметра выбираются из условия устойчивости и корректируются в практических расчетах для различных значений определяющих критериев Ra^+ , k_r/k_φ , r_2/r_1 . Рабочий диапазон изменения этого параметра $10^{-4} \leq \tau \leq 10^{-3}$. Отметим, что при $200 \leq \text{Ra}^+ \leq 600$ среднее время счета при прочих равных условиях в 6–7 раз меньше, чем при расчете уравнений Буссинеска для однородной среды [8].

Оптимальные сеточные параметры существенно различаются для относительно узких и широких прослоек. В частности, при $1.1 \leq r_2/r_1 \leq 2$ удовлетворительная точность может быть достигнута на сетке 16×30 , а при $2 \leq r_2/r_1 \leq 5$ на сетке 22×22 .

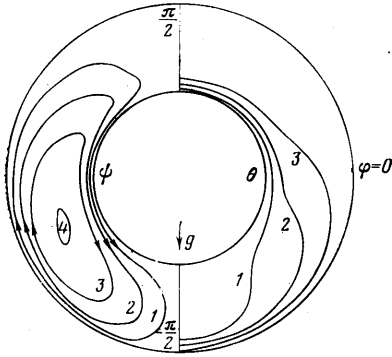
Контроль точности вычислений помимо сопоставления решений на различных сетках осуществляется проверкой невязок интегральных балансов тепла на внешней и внутренней поверхностях прослойки.

Численная реализация системы уравнений (2.3), (2.4) обладает отмечавшейся в [4, 5] спецификой, заключающейся в меньшем количестве необходимых для решения задачи итераций, но большей чувствительности схемы к сеточным параметрам по сравнению со случаем расчета конвекции в однородной жидкости [8]. Ряд дополнительных особенностей расчета конвекции в анизотропных средах связан с наличием в системе нового параметра — коэффициента анизотропии k_r/k_φ .

4. Особенности тепловой конвекции в анизотропной пористой кольцевой прослойке. Рассматриваемые численные решения получены в диапазоне параметров $200 \leq \text{Ra}^+ \leq 1000$; $1.01 \leq r_2/r_1 \leq 5$, коэффициент анизотропии изменялся в пределах $0.01 \leq k_r/k_\varphi \leq 100$. В качестве начальных условий задавались нулевые значения функций тока ψ и логарифмический профиль температуры между внутренней и внешней поверхностями прослойки, что соответствует режиму теплопроводности.

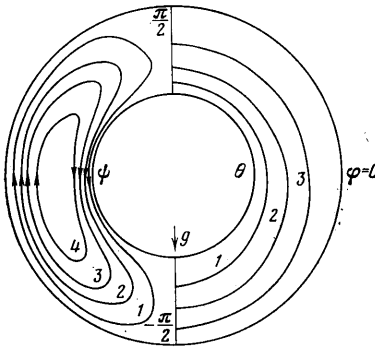
Рассмотрим вначале влияние коэффициента анизотропии проницаемости при фиксированных числах Рейля и геометрии прослойки. Результаты расчетов при $r_2/r_1=2$, $k_r/k_\varphi=1$, $\text{Ra}^+=200$ даны на фиг. 1. Здесь линиями 1–4 на левой части фиг. 1 соответствуют значения $\psi=4, 8, 12, 16$. Линии тока имеют вид серповидных вихрей, вытянутых вдоль контура прослойки. Ли-

ниям 1–3 на правой части фиг. 1 соответствуют значения $\theta=0.25, 0.50, 0.75$. При числе $Ra^+=200$ конвекция заметно влияет на перенос тепла в прослойке, что видно по отклонению изотерм от concentрических окружностей. Эти результаты совпадают с полученными ранее в работе [4].

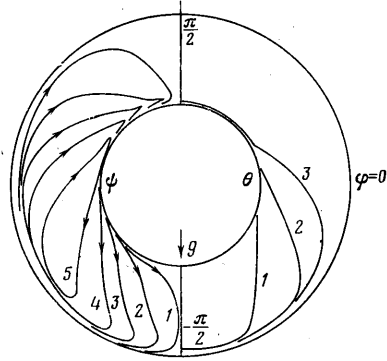


Фиг. 1

Изменение k_r/k_ϕ существенно влияет на интенсивность конвекции, так как при этом изменяется сопротивление движению вдоль волокон, т. е. вдоль линий тока основного движения. В зависимости от k_r/k_ϕ по результатам расчетов можно выделить два предельных режима: $k_r/k_\phi \gg 1$ и $k_r/k_\phi \ll 1$. При больших значениях коэффициента анизотропии k_r/k_ϕ сопротивление движению вдоль волокон велико, вследствие чего происходит ослабление конвекции, и поэтому структура изотерм слабо отличается от concentрических окружностей. Вклад конвекции в суммарный перенос тепла не-



Фиг. 2



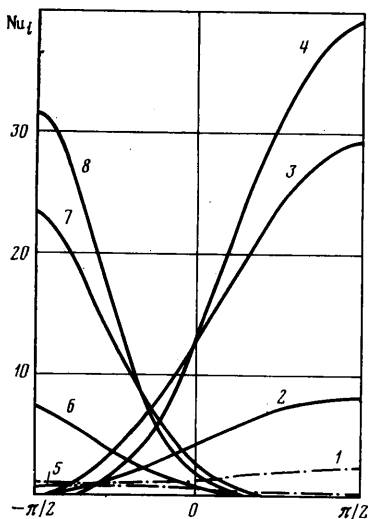
Фиг. 3

велик. Этот результат иллюстрируется фигурой 2 при $k_r/k_\phi=10, Ra^+=200, r_2/r_1=2$. Линиям 1–4 на левой части фиг. 2 соответствуют значения $\psi=0.5, 1, 1.5, 2.0$; линиям 1–3 на правой части – значения $\theta=0.25, 0.5, 0.75$.

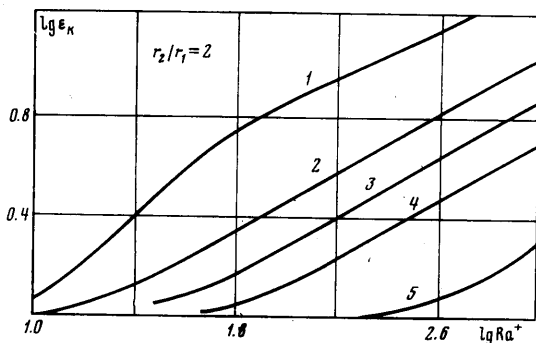
Наиболее важным практически является режим $k_r/k_\phi \ll 1$. На фиг. 3 даны результаты расчета при $k_r/k_\phi=1/20, Ra^+=200, r_2/r_1=2$. Здесь линиям 1–5 на левой части фиг. 3 соответствуют значения $\psi=4, 14, 24, 34, 44$; линиям 1–3 на правой части – значения $\theta=0.25, 0.5, 0.75$. В этом случае сопротивление движению вдоль волокон существенно уменьшается, вследствие чего азимутальная составляющая скорости и максимальное значение функции тока значительно увеличиваются ($\psi_{\max}=2-44$ при $k_r/k_\phi=10-0.05$). Это приводит к увеличению расхода в циркуляционном течении. Приток тепла в верхнюю зону увеличивается, отвод же тепла из этой зоны при прочих равных условиях оказывается меньшим по сравнению с изотропным случаем из-за меньшей интенсивности опускного движения в зоне $\phi=\pi/2$. Это приводит к сильной неравномерности в распределении местных потоков тепла в верхней части области, как показано на фиг. 4, где линии 1–4 обозначают распределение местного числа Нуссельта на внутренней поверхности соответственно при $k_r/k_\phi=10, 1, 0.1, 0.05$; линии 5–8 обозначают распределение местного числа Нуссельта на внешней поверхности при

$k_r/k_\phi = 10, 1, 0.1, 0.05$. Здесь $r_2/r_1 = 2$, $Ra^+ = 200$. В связи со стабилизирующим действием увеличенной вертикальной стратификации происходит характерное отклонение линий тока в верхней зоне, как показано на фиг. 3. При $k_r/k_\phi \gg 1$ неравномерность в распределении местного потока тепла не столь велика, что связано с отсутствием указанных выше особенностей сопротивления движению. В частности, как видно из фиг. 4, при $k_r/k_\phi = 10$ распределение локальных тепловых потоков практически равномерно.

На фиг. 5 дана зависимость коэффициента конвекции, характеризующего эквивалентную теплопроводность прослойки от фильтрационного числа Релея Ra^+ при $r_2/r_1 = 2$. Отличие ϵ_k от единицы является мерой ин-



Фиг. 4



Фиг. 5

тенсивности конвекции и переноса тепла. Линиям 1–5 соответствуют зависимости $\epsilon_k(Ra^+)$ при $k_r/k_\phi = 0.05, 0.5, 1, 2, 10$. Из фиг. 5 видно, что уменьшение проницаемости вдоль прослойки ($k_r/k_\phi \gg 1$) может приводить к существенному уменьшению вклада конвекции в теплоперенос по сравнению со случаем $k_r/k_\phi = 1$, что связано с увеличением сопротивления движению вдоль линий тока основного течения. При этом увеличивается и значение числа Ra^+ , которому соответствует заметный вклад конвекции в перенос тепла. В то же время увеличение проницаемости по углу ($k_r/k_\phi \ll 1$), как видно из фиг. 5, значительно интенсифицирует конвекцию и перенос тепла в целом. Отметим, что при $k_r/k_\phi = 0.05$ в области небольших значений фильтрационного числа Релея ($Ra^+ \leq 100$) наблюдается более резкое увеличение коэффициента конвекции.

Полученные результаты указывают на существенное влияние анизотропии на перенос тепла и позволяют наметить путь повышения эффективности теплоизоляции, который (в случае постоянной пористости) может заключаться, например, в уменьшении проницаемости прослойки по углу по сравнению с проницаемостью по радиусу.

Поступила 23 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Horton C. W., Rogers F. T. Convection current in a porous medium. J. Appl. Phys., 1945, vol. 16, No. 6.
2. Combarous M. Convection naturelle et convection mixte dans une couche poreuse horizontale. Rev. gen. iherm., 1970, vol. 9, No. 108.

3. *Власюк М. П., Полежаев В. И.* Естественная конвекция и перенос тепла в пронизываемых пористых материалах. М., 1975 (Ин-т прикл. матем. АН СССР. Препринт № 77).
4. *Брайловская В. А.* Численное исследование естественной конвекции в пористых цилиндрических прослойках. В кн.: Математические модели течений жидкости. Тр. VI Всесоюзного семинара по числ. методам механики вязкой жидкости, Кунгур, 1976. Новосибирск, 1978.
5. *Брайловская В. А., Петражицкий Г. Б., Полежаев В. И.* Естественная конвекция и перенос тепла в пористых прослойках между горизонтальными коаксиальными цилиндрами. ПМТФ, 1978, № 6.
6. *Gastinel G., Combarrous M.* Critere d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope horizontale. C.r. Acad. Sci., Paris, 1974, Ser. B, t. 278, No. 15.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1966.
8. *Брайловская В. А., Петражицкий Г. Б.* Тепловая ламинарная конвекция жидкости в кольцевой области при заданном потоке тепла. ПМТФ, 1977, № 3.