МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1980

УДК 532.5.013.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. М. ПОНОМАРЕВ

(Москва)

В связи с задачами геофизической гидродинамики в последнее время значительно повысился интерес к исследованию крупномасштабных завихренных движений жидкости. Многие свойства таких движений могут быть описаны в рамках конечномерных аппроксимаций уравнений гидродинамики, относящихся к квадратично-нелинейным системам гидродинамического типа [1].

С точки зрения описания процессов, происходящих в реальных условиях, большой интерес представляют простые движения жидкости, для которых можно получить достаточно полные экспериментальные и теоретические результаты. К ним, в частности, можно отнести двумерное течение несжимаемой жидкости в кольцевой области, создаваемое меняющей знак по радиусу азимутальной силой. Это течение является осесимметричным аналогом периодического в пространстве течения, вызываемого синусоидальной силой, для которого получен ряд интересных теоретических результатов (см., например, [2–6]), но постановка соответствующих экспериментов связана с большими трудностями. Осесимметричное течение в кольцевой области при небольшом числе изменений знака вынуждающей силы можно относительно просто осуществить в эксперименте, например с помощью магнитного поля [7].

В данной работе исследуется устойчивость осесимметричного течения относительно бесконечно малых возмущений. Показано, что оно неустойчиво относительно длинноволновых возмущений. В рамках метода Галеркина рассматривается образование вторичного течения.

1. Рассмотрим двумерное движение несжимаемой жидкости в кольцевой области с внешним радиусом R_0 и внутренним радиусом R_i, вызываемое объемной силой, имеющей только азимутальную компоненту F_φ

$$F_\varphi=\gamma J_1(pr/R_0)$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода, γ и p — параметры. Вводя масштабы длины R_0/p, скорости $\gamma R_0^2/\mu p^2$ и времени $\gamma R_0/\mu p$ (μ — коэффициент вязкости) и переходя к безразмерным переменным, представим уравнения движения в виде

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial r}-\frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\right)=\frac{1}{\mathrm{Re}}[J_0(r)+\Delta\Omega]$$

$$\Omega=-\Delta\Psi,\quad u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi},\quad u_\varphi=-\frac{\partial\Psi}{\partial r} \tag{1.1}$$

$$p\frac{R_i}{R_0}<r<p,\quad \mathbf{u}\Big|_{r=p\frac{R_i}{R_0},\,p}=0,\quad \mathrm{Re}=\frac{\gamma\rho R_0^3}{\mu^2p^3}$$

Здесь Ψ — функция тока, Ω — завихренность, Re — число Рейнольдса.

В случае, когда $p=\lambda_k$, где λ_k — k-тый корень уравнения $J_1(\lambda)=0$, ($\lambda_0=0$), и $R_i/R_0=\lambda_{k'}/\lambda_k$ ($k'<k$), (1.1) допускает стационарное решение, соответствующее осесимметричному течению

$$\Psi_0=\Omega_0=J_0(r)\quad (u_r=0,\ u_\varphi=J_1(r)) \tag{1.2}$$

Исследуем устойчивость этого течения. Представляя решение (1.1) в виде $\Psi=\Psi_0+\psi$, $\Omega=\Omega_0+\omega$, получаем для возмущений уравнения в линейном приближении

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{J_1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\omega-\psi)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\omega \tag{1.3}$$

$$\omega=-\Delta\psi,\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=\lambda_{k'},\lambda_k}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right|_{r=\lambda_{k'},\lambda_k}=0$$

Решение (1.3) будем искать в виде ряда по собственным функциям задачи

$$\Delta\omega+h^2\omega=0,\quad \omega=-\Delta\psi$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=\lambda_{k'},\lambda_k}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right|_{r=\lambda_{k'},\lambda_k}=0 \tag{1.4}$$

Решение (1.4) имеет вид

$$\omega_\alpha(r,\varphi)=\omega_\alpha(r)e^{in\varphi},\quad \psi_\alpha(r,\varphi)=\psi_\alpha(r)e^{in\varphi}$$

$$\omega_\alpha(r)=A_\alpha J_n(h_\alpha r)+B_\alpha Y_\alpha(h_\alpha r)$$

$$\psi_\alpha(r)=\frac{1}{h_\alpha^2}[\omega_\alpha(r)+C_\alpha(h_\alpha r)^n+D_\alpha(h_\alpha r)^{-n}],\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

где J_n — функция Бесселя первого рода, Y_n — функция Неймана. Собственные значения h_α и коэффициенты A_α, B_α, C_α и D_α определяются из граничных условий, приводящих к уравнениям (штрихи у функций означают производную по аргументу)

$$\begin{Vmatrix} J_n(\theta) & Y_n(\theta) & \theta^n & \theta^{-n} \\ J_n'(\theta) & Y_n'(\theta) & n\theta^{n-1} & -n\theta^{-n-1} \\ J_n(\xi\theta) & Y_n(\xi\theta) & (\xi\theta)^n & (\xi\theta)^{-n} \\ J_n'(\xi\theta) & Y_n'(\xi\theta) & n(\xi\theta)^{n-1} & -n(\xi\theta)^{-n-1} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_\alpha \\ B_\alpha \\ C_\alpha \\ D_\alpha \end{Vmatrix}=0 \tag{1.5}$$

$$\xi=\lambda_{k'}/\lambda_k,\quad \theta=h_\alpha\lambda_k$$

Из условия разрешимости этой системы следует уравнение для определения h_α

$$[\xi^{n-1}J_{n-1}(\theta)-J_{n-1}(\xi\theta)][Y_{n+1}(\theta)-\xi^{n+1}Y_{n+1}(\xi\theta)]-$$

$$-[\xi^{n-1}Y_{n-1}(\theta)-Y_{n-1}(\xi\theta)][J_{n+1}(\theta)-\xi^{n+1}J_{n+1}(\xi\theta)]=0$$

Корни этого уравнения при заданном n нумеруются индексом j в порядке их возрастания ($j=1,2,\dots$), $\alpha=\{n,j\}$.

Отметим, что система функций (1.5) ортогональна в энергетической норме

$$\int_0^{2\pi}\int_{\lambda_{k'}}^{\lambda_k}\omega_\alpha\bar{\psi}_{\alpha'}r\,dr\,d\varphi=N_\alpha^2\delta_{\alpha\alpha'} \tag{1.6}$$

Представляя решение (1.3) в виде $\omega=\sum_\alpha C_\alpha\omega_\alpha$, $\psi=\sum_\alpha C_\alpha\psi_\alpha$, получаем из (1.3), (1.4) и (1.6) систему уравнений

$$N_\alpha^2\left(\frac{dC_\alpha}{dt}+\frac{h_\alpha^2}{\mathrm{Re}}C_\alpha\right)+i\sum_{\alpha'}V_{\alpha\alpha'}C_{\alpha'}=0 \tag{1.7}$$

$$V_{\alpha\alpha'}=2\pi\delta_{nn'}\int\limits_{\lambda_{k'}}^{\lambda_k}J_1(r)\,(\omega_{\alpha'}-\psi_{\alpha'})\,\overline{\psi}_\alpha dr$$

распадающуюся на независимые подсистемы для каждого азимутального волнового числа n. Для расчета устойчивости течения (1.2) использовались укороченные подсистемы, получаемые из (1.7) при учете взаимодействия только мод с номерами $1\leqslant j\leqslant M$. Характеристические числа системы (1.7) σ полагались равными σ_M, если $|\sigma_{2M}-\sigma_M|\ \mathrm{Re}<5\cdot10^{-3}$.

Если неустойчивость наступала при $\mathrm{Re}\leqslant10^2$, то для определения соответствующих характеристических чисел требовалось 10—20 мод. При $\mathrm{Re}\to\infty$ требуемое число мод резко возрастало. Поэтому для анализа возмущений с азимутальными волновыми числами, которые приводят к неустойчивости при больших числах Рейнольдса, использовалось невязкое приближение уравнений (1.3) с разложением по системе функций

$$\Delta\psi'+h'^2\psi'=0,\qquad \psi'|_{r=\lambda_{k'},\lambda_k}=0,\qquad \psi=\sum_\alpha C_\alpha'\psi_\alpha' \tag{1.8}$$

Получаемая при этом система уравнений

$$N_\alpha'^2\frac{dC_\alpha'}{dt}+i\sum_{\alpha'}V'_{\alpha\alpha'}C_{\alpha'}'=0$$

$$N_\alpha'^2=-\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\lambda_{k'}}^{\lambda_k}\Delta\psi_\alpha'\overline{\psi}_\alpha' r\,dr\,d\varphi \tag{1.9}$$

$$V_{\alpha\alpha'}=2\pi n\delta_{nn'}\int\limits_{\lambda_{k'}}^{\lambda_k}J_1(r)\,(\omega_{\alpha'}'-\psi_{\alpha'}')\,\overline{\psi}_\alpha'\,dr$$

так же как и уравнения (1.3), в невязком приближении сохраняет квадратичный интеграл, представляющий собой разность энергии и квадрата вихря

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\lambda_{k'}}^{\lambda_k}(\psi-\omega)\,\overline{\omega}\,r\,dr\,d\varphi=\frac{d}{dt}\sum_\alpha N_\alpha'^2|C_\alpha'|^2(1-h_\alpha'^2)=0 \tag{1.10}$$

Отсюда следует, что экспоненциально растущие (как, впрочем, и затухающие) возмущения должны удовлетворять условию

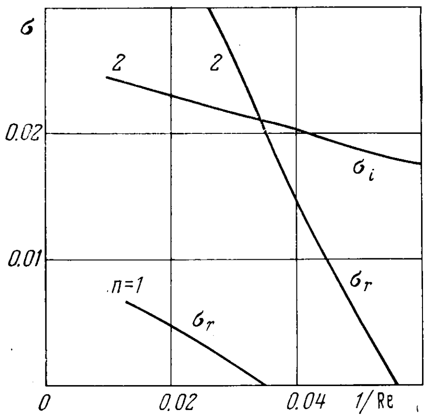
$$\sum_\alpha N_\alpha'^2|C_\alpha'|^2(1-h_\alpha'^2)=0$$

и течение (1.2) может быть неустойчивым, если в начальном возмущении присутствуют крупномасштабные моды с $h_\alpha'<1$. Из решения задачи (1.8) следует, что, начиная с некоторого азимутального волнового числа n^*, $h_{n,1}'>1$ при $n<n^*$, поэтому можно ожидать, что течение (1.2) устойчиво относительно возмущений с такими волновыми числами. Это подтверждается расчетами.

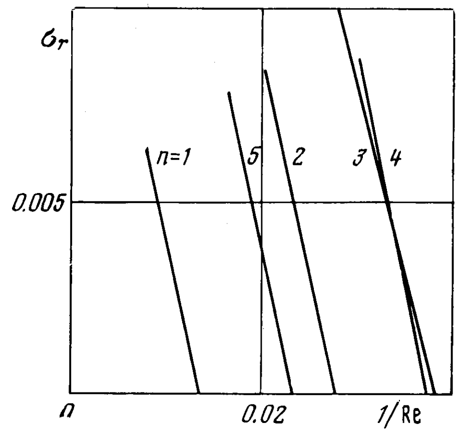
Ниже приводятся результаты расчета устойчивости течения в круге, кольцевой области и в плоском канале, представляющем асимптотически предельный случай очень узкого кольца. Во всех вариантах предполагалось, что скорость (1.2) меняет свой знак по радиусу один раз ($k=k'+2$).

На фиг. 1 показана зависимость вещественных и мнимых частей характеристических чисел, отвечающих неустойчивости течения (1.2) в круге ($R_i=0$). Начальные возмущения с $n>3$ в этом случае затухают. Отметим, что для каждого волнового числа, при котором возможна неустойчивость, как здесь, так и ниже получено только по одному характеристическому числу с положительной вещественной частью.

Течение в кольцевой области при $k=3$ и $R_i/R_0=\lambda_1/\lambda_3$ неустойчиво относительно возмущений с волновыми числами $n\leqslant 6$. На фиг. 2 приведена



Фиг. 1



Фиг. 2

зависимость $\sigma_r(n, \mathrm{Re})$. Минимальное критическое число Рейнольдса определяется возмущениями с $n=3$.

2. В очень узком кольце ($\lambda_k\to\infty$, $\lambda_{k'}/\lambda_k\to 1$) профиль скорости основного течения приближается к синусоидальному. Решение задачи об устойчивости течения (1.2) относительно возмущений с фиксированным волновым числом n в этом случае можно получить из асимптотических представлений функций в (1.2)–(1.7). Однако проще сразу рассматривать устойчивость течения с профилем скорости

(2.1) $$u_x=\sin y,\quad u_y=0$$

в декартовой системе координат в области $0\leqslant y\leqslant m\pi$, $-\infty<x<\infty$, $m=1, 2, \ldots$

Для возмущений параметров получаем уравнения

(2.2) $$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\sin y\frac{\partial}{\partial x}(\omega-\psi)=\frac{1}{\mathrm{Re}_s}\Delta\omega$$
$$\omega=-\Delta\psi,\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{y=0,m\pi}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=0,m\pi}=0$$

В рассматриваемой геометрии решение (1.4) имеет вид

$$\omega_\alpha(x, y)=\omega_\alpha(y)e^{isx},\quad \psi_\alpha(x, y)=\psi_\alpha(y)e^{isx}$$
$$\omega_\alpha(y)=\cos l_\alpha y+A_\alpha\sin l_\alpha y,$$

$$\psi_\alpha(y)=\frac{1}{h_\alpha^2}\left[\omega_\alpha(y)-\operatorname{ch} sy-\frac{l_\alpha}{s}A_\alpha \operatorname{sh} sy\right]$$

$$2(1-\cos ml_\alpha\pi \operatorname{ch} ms\pi)+\left(\frac{s}{l_\alpha}-\frac{l_\alpha}{s}\right)\operatorname{sh} ms\pi \sin ml_\alpha\pi=0 \tag{2.3}$$

$$A_\alpha=\left(\sin ml_\alpha\pi+\frac{l_\alpha}{s}\operatorname{sh} ms\pi\right)/(\cos ml_\alpha\pi-\operatorname{ch} ms\pi)$$

$$h_\alpha^2=l_\alpha^2+s^2,\qquad \alpha=\{s, j\}$$

Из (1.3) и (2.2) можно установить соответствие между параметрами задач по среднему радиусу кольца

$$\mathrm{Re}_s=\frac{2\,\mathrm{Re}}{\sqrt{\pi(\lambda_{k'}+\lambda_k)}},\qquad s=\frac{2n}{\lambda_{k'}+\lambda_k} \tag{2.4}$$

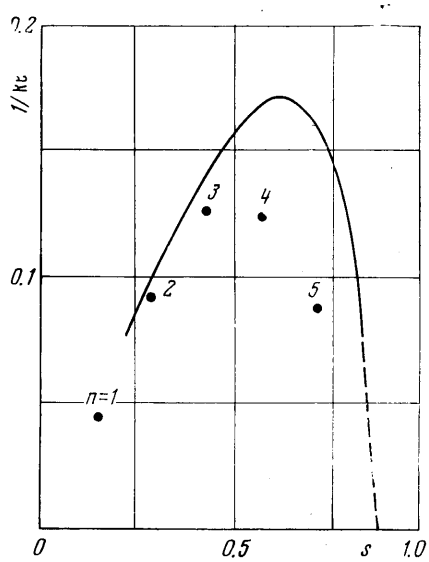
При этом предполагается также масштаб времени измененным в $2(\pi(\lambda_{k'}+\lambda_k))^{-1/2}$ раз.

Устойчивость течения (2.1) относительно периодических по x возмущений с периодом 2π рассматривалась в [2, 3]. Показано, что течение устойчиво относительно возмущений с волновыми числами $s\geqslant1$ и неустойчиво относительно возмущений с $s<1$. Для малых волновых чисел s получена асимптотическая зависимость критического числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_s^*=\sqrt{2}(1+{}^3/_2 s^2+o(s^2)) \tag{2.5}$$

Эти результаты соответствуют предельному случаю $m\to\infty$ в (2.1)–(2.3).

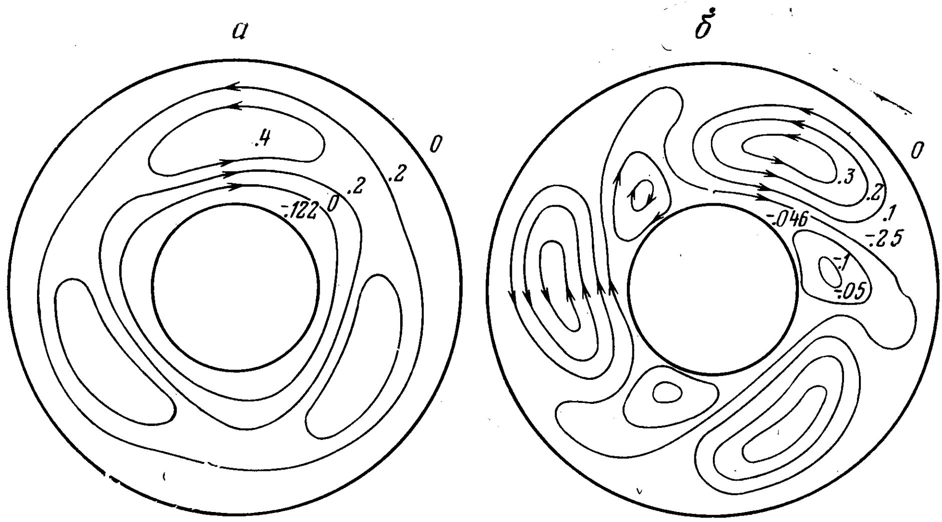
С уменьшением m диапазон волновых чисел, при которых течение (2.1) неустойчиво, сужается, что в основном связано с запретом, налагаемым граничными условиями на возмущения скорости вида $v=e^{isx}$, которые играют важную роль при получении зависимости (2.5). На фиг. 3 приведены результаты расчета $\mathrm{Re}_s^*(s)$, полученные при $m=2$ (одна точка смены направления потока). При этом течение устойчиво относительно начальных возмущений с $s\geqslant s^*\approx0.87$. Для иллюстрации влияния кривизны стенок области на этой фигуре точками показаны также данные для рассмотренной выше кольцевой области с пересчетом по (2.4). Заметим также, что в отличие от кольцевой области симметрия рассматриваемой задачи приводит к тому, что для неустойчивых возмущений мнимая часть характеристических чисел обращается в нуль: $\sigma_i=0$.



Фиг. 3

3. В заключение рассмотрим образование вторичного течения в кольцевой области, учитывая только наиболее опасные возмущения с одним азимутальным волновым числом n. Предположим, что

$$\Psi=C_0\Psi_0+\sum_j(C_{nj}\psi_{nj}+\bar C_{nj}\bar\psi_{nj}) \tag{3.1}$$



Фиг. 4

Подставляя (3.1) в (1.1) и ограничиваясь для простоты $j=1$, 2 (величина Re* при этом определяется с точностью до 10–20%), получаем методом Галеркина систему уравнений (индекс n ниже опускаем)

$$N_0^2\left[\frac{dC_0}{dt}+\frac{1}{\mathrm{Re}}(C_0-1)\right]+iV(C_1\bar{C}_2-\bar{C}_1C_2)=0$$

$$N_1^2\left[\frac{dC_1}{dt}+\frac{h_1^2}{\mathrm{Re}}C_1\right]+iC_0(V_{11}C_1+V_{12}C_2)=0$$

(3.2)
$$N_2^2\left[\frac{dC_2}{dt}+\frac{h_2^2}{\mathrm{Re}}C_2\right]+iC_0(V_{21}C_1+V_{22}C_2)=0$$

$$N_0^2=2\pi\int\limits_{\lambda}^{\lambda_k}\Psi_0^2r\,dr,\qquad V=V_{12}-V_{21}$$

Вместе с комплексно сопряженными уравнениями (3.2) образует систему гидродинамического типа с учетом вязких эффектов, сохраняющую при Re=∞ квадратичный интеграл – энергию.

При Re<Re* система (3.2) имеет устойчивое стационарное решение $C_0=1$, $C_1=C_2=0$, которое при Re>Re* становится неустойчивым и переходит в периодическое решение

$$C_0=\frac{\mathrm{Re}^*}{\mathrm{Re}},\qquad C_1=C_1^0e^{i\delta t},\qquad C_2=C_2^0e^{i\delta t}$$

$$C_2^0=(\beta_r+i\beta_i)C_1^0,\qquad |C_1^0|^2=\frac{\mathrm{Re}^*(\mathrm{Re}^*-\mathrm{Re})v_{12}}{2\,\mathrm{Re}^2\,v}$$

(3.3)
$$\beta_r=-\frac{h_1^2}{v_{12}}\frac{v_{11}-v_{22}}{h_1^2+h_2^2},\qquad \beta_i=\frac{h_1^2}{v_{12}\,\mathrm{Re}^*}$$

$$\frac{\delta}{C_0}=-\frac{h_1^2v_{22}+h_2^2v_{11}}{h_1^2+h_2^2},\qquad v_{ij}=\frac{V_{ij}}{N_i^2},\qquad v=\frac{V}{N_0^2}$$

которому соответствует функция тока (с точностью до сдвига начала отсчета времени)

$$\Psi=C_0\Psi_0+2|C_1^0|\{\psi_1(r)\cos(n\varphi+\delta t)+$$
$$+\psi_2(r)[\beta_r\cos(n\varphi+\delta t)-\beta_i\sin(n\varphi+\delta t)]\}$$

Это течение имеет периодическую по углу φ структуру с периодом $2\pi/n$. Мгновенная картина течения (3.4) в кольцевой области при $n=3$ показана на фиг. 4. При малом превышении Re^* в области появляются три вихря с одинаковым направлением вращения (фиг. 4, *а*, $\mathrm{Re}/\mathrm{Re}^*=1.25$). С увеличением отношения $\mathrm{Re}/\mathrm{Re}^*$ возникают еще три вихря с противоположным направлением вращения (фиг. 4, *б*, $\mathrm{Re}/\mathrm{Re}^*=3.33$).

Автор благодарит А. М. Обухова за постановку задачи и внимание к работе и В. И. Кляцкина за полезные обсуждения.

Поступила 1 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А.* Нелинейные системы гидродинамического типа. М., «Наука», 1974.
2. *Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г.* Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
3. *Юдович В. И.* Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
4. *Юдович В. И.* Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1.
5. *Кляцкин В. И.* К нелинейной теории устойчивости периодических течений. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
6. *Белоцерковский С. О., Мирабель А. П., Чусов М. А.* О построении закритического режима для плоского периодического течения. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1978, т. 14, № 1.
7. *Бондаренко Н. Ф., Гак М. З.* Применение магнитогидродинамических эффектов в электролитах для моделирования вихревых гидродинамических процессов. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1978, т. 14, № 2.