

О РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА К НЕЛИНЕЙНЫМ ЦЕПОЧКАМ КАСКАДНОГО ТИПА

Е. Б. ГЛЕДЗЕР

(Москва)

Рассмотрено фурье-преобразование уравнений Навье — Стокса. Путем рассмотрения вкладов областей суммирования получена цепочка уравнений, моделирующая процесс передачи энергии между возмущениями различных масштабов. Возмущения данного масштаба описываются двумя скалярными величинами, соответствующими проекциям поля скорости несжимаемой жидкости на направления, ортогональные волновым векторам. Качественное и численное исследование приводят к осредненному по времени колмогоровскому спектру энергии в инерционном интервале.

1. Для моделирования каскадных процессов преобразования энергии в турбулентном потоке была предложена многоярусная нелинейная система [1, 2], построенная путем суперпозиции триплетов одинакового масштаба на каждом ярусе, число которых удваивается при переходе к следующему уровню, а масштабы уменьшаются. Каждый триплет состоит из устойчивых и неустойчивых мод, и при возбуждении системы внешней силой, приложенной к первому уровню, в начальный момент развивается последовательность мод, по одной на каждом уровне, так что возбужденные моды $v_i > 0$ образуют цепочку уравнений

$$(1.1) \quad \dot{v}_0 = -p_0 v_0^2 - \lambda v_0 + f, \quad \dot{v}_i = p_{i-1} v_{i-1} v_i - p_i v_{i+1} - \lambda v_i, \quad i=1, 2, \dots$$

Здесь p_i — параметры нелинейных взаимодействий между триплетами размерности обратной длины, λ_i — диссипативные коэффициенты, f — внешняя сила. Если $R = (p_0 f)^{1/2} / \lambda_0$ (аналог числа Рейнольдса) велико, то эта система в условиях геометрического подобия $p_{i+1}/p_i = q$ допускает решение, которое для ограниченного числа ярусов имеет вид $v_i = q^{2/3} w^{1/2} p_i^{-1/2}$, $w = v_0 f$. Это решение аналогично закону Колмогорова — Обухова, описывающему каскадный процесс передачи энергии в развитом турбулентном потоке. Цепочка (1.1) является неустойчивой в том смысле, что после некоторого момента времени одна из компонент меняет знак на отрицательный, в результате чего все последующие за ней в (1.1) возмущения загухают и развивается новая цепочка типа (1.1) в полной системе уравнений [3, 4]. Поэтому движение такой многоярусной нелинейной системы приобретает сложный нерегулярный характер, сопровождающийся возбуждением одних степеней свободы и отмиранием других.

В рассматривавшемся подходе, основанном на использовании суперпозиции триплетов, система уравнений строилась по формальному принципу. Поэтому в настоящей работе сделана попытка построения на основе определенных упрощений уравнений Навье — Стокса нелинейных стохастических уравнений, обобщающих цепочку (1.1), для которых известные законы турбулентных движений находятся, как и для реальных потоков, в результате статистического осреднения. Заметим, что подобный подход получения нелинейных систем из уравнений Навье — Стокса уже использовался рядом авторов. Так, в [5] была получена цепочка уравнений относительно среднеквадратичных по октаве волновых чисел скоростей (в фурье-представлении), имеющая устойчивые стационарные решения колмогоровского типа [6]. В [7-10] рассматривались некоторые малопараметрические системы, в частности для двумерных потоков, полученные путем обрывания соответствующих спектральных уравнений.

2. Ограничиваясь трехмерным случаем, рассмотрим турбулентное течение несжимаемой жидкости в кубическом ящике с ребром L , предполагая поле скорости периодической с периодом L функцией по каждой из

трех пространственных переменных. В силу несжимаемости представим фурье-компоненту $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ поля скорости в виде разложения по двум взаимно ортогональным и ортогональным волновому вектору \mathbf{k} векторам $\mathbf{e}_1(\mathbf{k})$ и $\mathbf{e}_2(\mathbf{k})$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2=0$, $\mathbf{e}_1\mathbf{k}=0$, $\mathbf{e}_2\mathbf{k}=0$, $\mathbf{k}=(m, n, p)2\pi/L$, $\mathbf{e}_\alpha(-\mathbf{k})=-\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k})$

$$(2.1) \quad \mathbf{u}(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_1(\mathbf{k})u_1(\mathbf{k}) + \mathbf{e}_2(\mathbf{k})u_2(\mathbf{k})$$

$$(2.2) \quad \bar{u}_\alpha(\mathbf{k}) = -u_\alpha(-\mathbf{k}), \quad \alpha=1, 2$$

где m, n, p — положительные и отрицательные целые числа, включая нуль. Уравнения для $u_\alpha(\mathbf{k})$ имеют вид

$$(2.3) \quad \left(\frac{d}{dt} + \nu k^2 \right) u_\alpha(\mathbf{k}) + i \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\beta, \gamma=1,2} \left(\frac{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}{2} \mathbf{e}_\gamma(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1) \right) \times \\ \times (\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) \mathbf{e}_\beta(-\mathbf{k}_1)) u_\gamma(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1) u_\beta(-\mathbf{k}_1) = 0$$

Легко видеть, что в отсутствие вязкости система (2.3) сохраняет энергию

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \alpha} |u_\alpha(\mathbf{k})|^2$$

Разобьем область суммирования векторов \mathbf{k}_1 по отношению к вектору \mathbf{k} на ряд включающих друг друга областей, как на фиг. 1, причем выделим особо область значений $-\mathbf{k}_1$ вблизи \mathbf{k} , заштрихованную на фигуре. Радиусы выделенных областей могут отличаться друг от друга в заданное число раз, так что максимальному радиусу отвечает максимальное волновое число рассматриваемого течения, а минимальное сравнимо с волновым числом всего течения. Каждой области фиг. 1 присвоим порядок: области II, чей радиус меньше k , порядок $n-1$, области I порядок $n-2$ и т. д.; области IV с радиусом больше k порядок $n+1$ и т. д. Волновое число k находится в области III n -го порядка.

Рассмотрим сначала вклад в сумму уравнения (2.3) области вокруг $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k} = 0$ (на фиг. 1 заштрихована).

Приближенно имеем

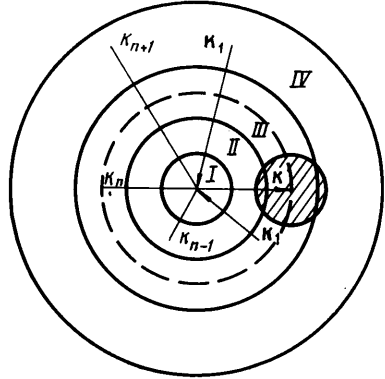
$$\frac{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1) \approx \mathbf{k} \mathbf{u}(\mathbf{k}_0), \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k} + \mathbf{k}_1, \quad k_0 \ll k$$

$$(\mathbf{e}_m(\mathbf{k}) \mathbf{e}_p(-\mathbf{k}_1)) u_p(-\mathbf{k}_1) \approx u_m(\mathbf{k})$$

поскольку здесь $|\mathbf{k}+\mathbf{k}_1| < k$. Уравнение примет вид

$$(2.4) \quad \left(\frac{d}{dt} + \nu k^2 \right) u_m(\mathbf{k}) + i u_m(\mathbf{k}) (\mathbf{k} \mathbf{u}_0) + i \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{p,q} \left(\frac{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}{2} \mathbf{e}_p(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1) \right) (\mathbf{e}_m(\mathbf{k}) \mathbf{e}_q(-\mathbf{k}_1)) u_p(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1) u_q(-\mathbf{k}_1) = 0$$

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{\mathbf{k}_0} \mathbf{u}(\mathbf{k}_0), \quad k_0 \ll k$$



Фиг. 1

где штрих в сумме означает, что в нее входит выделенный вторым слагаемым в (2.4) вклад указанной области, а u_0 слабо зависит от k , так как содержит основными вклады фурье-компонент поля скорости с минимальными волновыми числами. С учетом этого сделаем следующую замену:

$$(2.5) \quad v_m(\mathbf{k}) = u_m(\mathbf{k}) \exp \left\{ ik \int_0^t u_0(\tau) d\tau \right\} \\ \left(\frac{d}{dt} + vk^2 \right) v_m(\mathbf{k}) + i \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\beta, \gamma} \left(\frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}_1}{2} e_\beta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) \right) (e_m(\mathbf{k}) e_\alpha(-\mathbf{k}_1)) v_\beta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) v_\alpha(-\mathbf{k}_1) = 0$$

Отметим, что указанная замена означает переход в новую систему координат, в которой возмущения данного масштаба переносятся без существенных искажений со скоростью более крупномасштабных возмущений. Сумма в (2.5) теперь распространена на области $k_1 < k$ и $k_1 > k$. Разложим в оставшихся областях суммирования слагаемые в суммах уравнения (2.5) в ряды Тейлора, пользуясь этими соотношениями для векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k} . В области II, I и т. д. и внутренней части области III имеем $k_1 < k$, поэтому приближенно

$$(2.6) \quad \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}_1}{2} v(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) \approx \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}_1}{2} \left(v(\mathbf{k}) + k_{1\beta} \frac{\partial v(\mathbf{k})}{\partial k_\beta} \right) = \\ = -\frac{k_1}{2} v(\mathbf{k}) + \frac{k_{1\beta}}{2} \frac{\partial}{\partial k_\beta} (k v(\mathbf{k})) - \frac{k_1}{2} v(\mathbf{k}) = -k_1 v(\mathbf{k})$$

В области IV и других, включающих IV, и внешней части области III, где $k_1 > k$, получаем

$$(2.7) \quad \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}_1}{2} v(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) \approx \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}_1}{2} \left(v(\mathbf{k}_1) + k_{1\beta} \frac{\partial v(\mathbf{k}_1)}{\partial k_{1\beta}} \right) = k v(\mathbf{k}_1)$$

Ясно, что эти разложения становятся все более точными в областях, где $k_1 \gg k$ и $k_1 \ll k$. Тогда из (2.5) — (2.7) получим

$$(2.8) \quad \left(\frac{d}{dt} + vk^2 \right) v_\alpha(\mathbf{k}) - i \sum_{k_1 < k} \sum_{\beta, \gamma} (k_1 e_\gamma(\mathbf{k})) (e_\alpha(\mathbf{k}) e_\beta(-\mathbf{k}_1)) \times \\ \times v_\gamma(\mathbf{k}) v_\beta(-\mathbf{k}_1) + i \sum_{k_1 > k} \sum_{\beta, \gamma} (k e_\gamma(\mathbf{k}_1)) (e_\alpha(\mathbf{k}) e_\beta(-\mathbf{k}_1)) \times \\ \times v_\gamma(\mathbf{k}_1) v_\beta(-\mathbf{k}_1) = 0$$

Как следует из замечания, приведенного выше, в суммах уравнения (2.8) достаточно точно описан вклад областей суммирования по k_1 , в которых $k_1 \ll k$ и $k_1 \gg k$. Вклад других же областей, таких, как II, III, IV и примыкающих к ним, представлен в (2.8) довольно грубо.

Будем теперь считать, что каждая из представленных в суммах уравнения (2.8) областей состоит из некоторого количества фиксированных волновых векторов. Для области n -го порядка обозначим их через \mathbf{k}_j^n , где j принимает столько значений $I(n)$, сколько выбрано векторов в n -области. Очевидно, что с увеличением n это число, вообще говоря, растет. Растет и величина самого вектора \mathbf{k}_j^n , так что максимальному n соответствуют и

наибольшие волновые векторы. Перепишем тогда (2.8) в виде

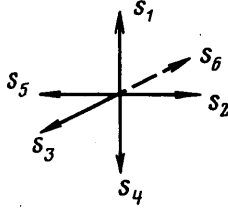
$$(2.9) \quad A_{ij,r}^{\alpha\beta\gamma} = (e_\alpha(\mathbf{k}_i^n) e_\beta(-\mathbf{k}_j^{n-r})) (\mathbf{k}_j^{n-r} e_\gamma(\mathbf{k}_i^n))$$

$$B_{ij,r}^{\alpha\beta\gamma} = (e_\alpha(\mathbf{k}_i^n) e_\beta(-\mathbf{k}_j^{n+r})) (\mathbf{k}_i^n e_\gamma(\mathbf{k}_j^{n+r}))$$

$$(2.10) \quad \left(\frac{d}{dt} + \nu(k_i^n)^2 \right) v_\alpha(\mathbf{k}_i^n) - i \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^{I(n-r)} \sum_{\beta,\gamma} A_{ij,r}^{\alpha\beta\gamma} v_\gamma(\mathbf{k}_i^n) v_\beta(-\mathbf{k}_j^{n-r}) + \\ + i \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{I(n+r)} \sum_{\beta,\gamma} B_{ij,r}^{\alpha\beta\gamma} v_\gamma(\mathbf{k}_j^{n+r}) v_\beta(-\mathbf{k}_j^{n+r}) = 0$$

В (2.10) индексом r в первой и второй сумме учитываются вклады последовательности областей суммирования, входящих в n -область и включающих ее в себя.

Система (2.10), несмотря на проделанные упрощения исходных фурье-уравнений, является все же слишком громоздкой и сложной для



Фиг. 2

того, чтобы проводить какое-либо изучение ее свойств. Поэтому в качестве следующего шага, огрубляющего систему, будем считать, что каждая область суммирования характеризуется шестью равными по величине волновыми векторами, представляющими все направления в трехмерном пространстве, так что $I(n) = 6$ при всех n (см. фиг. 2). На фиг. 2 $s_1 = (1, 0, 0)$, $s_2 = (0, 1, 0)$, $s_3 = (0, 0, 1)$, $s_4 = (-1, 0, 0)$, $s_5 = (0, -1, 0)$, $s_6 = (0, 0, -1)$, причем для \mathbf{k}_i^n выполняется $\mathbf{k}_i^n = k_n s_i$. Выпишем уравнения для $v_i(\mathbf{k}_i^n)$. Составим вначале таблицу векторов $e_1(s_i)$ и $e_2(s_i)$, $i = 1, \dots, 6$:

s	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
$e_1(s)$	s_2	s_3	s_1	$-s_2$	$-s_3$	$-s_1$
$e_2(s)$	s_3	s_1	s_2	$-s_3$	$-s_1$	$-s_2$

Тогда из (2.9)

$$(2.11) \quad A_{ij,r}^{1\beta\gamma} = (s_2 e_\beta(-s_j)) (s_j e_\gamma(s_1)) k_{n-r}$$

Выражение (2.11) отлично от нуля, если $\beta = \gamma = 2$, $j = 3$ или $\beta = \gamma = 2$, $j = 6$. Поэтому

$$A_{13,r}^{122} = (s_2(-s_2)) (s_3 s_3) k_{n-r} = -k_{n-r}$$

$$A_{16,r}^{122} = (s_2 s_2) (-s_3 s_3) k_{n-r} = -k_{n-r}$$

Второе слагаемое в (2.10) примет вид

$$(2.12) \quad ik_{n-r} v_2(\mathbf{k}_1^n) (v_2(-\mathbf{k}_3^{n-r}) + v_2(\mathbf{k}_3^{n-r}))$$

Аналогично для коэффициентов B , которые в рассматриваемом случае одинакового расположения векторов в областях всех порядков от r не зависят, $B_{ij}^{1\beta\gamma} = (s_2 e_\beta(-s_j)) (s_1 e_\gamma(s_j)) k_n$, отличными от нуля будут компоненты при $\beta=2, \gamma=1, j=3$ и при $\beta=2, \gamma=1, j=6$

$$(2.13) \quad B_{13}^{121} = (s_2(-s_2)) (s_1 s_1) k_n = -k_n, \quad B_{16}^{121} = (s_2 s_2) (-s_1 s_1) k_n = -k_n$$

Учитывая, что $\bar{v}_\alpha(\mathbf{k}) = -v_\alpha(-\mathbf{k})$ (см. (2.2)), из (2.12) и (2.13) получим

$$(2.14) \quad \left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2 \right) v_1(\mathbf{k}_1^n) + i \sum_{r=1}^n k_{n-r} v_2(\mathbf{k}_1^n) (v_2(\mathbf{k}_3^{n-r}) - \bar{v}_2(\mathbf{k}_3^{n-r})) + \\ + ik_n \sum_{r=1}^{\infty} (v_1(\mathbf{k}_3^{n+r}) \bar{v}_2(\mathbf{k}_3^{n+r}) + \bar{v}_1(\mathbf{k}_3^{n+r}) v_2(\mathbf{k}_3^{n+r})) = 0$$

Аналогично можно получить уравнение для $v_2(\mathbf{k}_1^n)$

$$(2.15) \quad A_{1j,r}^{2\beta\gamma} = (s_3 e_\beta(-s_j)) (s_2 e_\gamma(s_1)) k_{n-r} = -k_{n-r} \\ (\beta=\gamma=1, j=2), \quad (\beta=\gamma=1, j=5) \\ B_{1j}^{2\beta\gamma} = (s_3 e_\beta(-s_j)) (s_1 e_\gamma(s_j)) k_n = -k_n \\ (\beta=1, \gamma=2, j=2), \quad (\beta=1, \gamma=2, j=5) \\ \left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2 \right) v_2(\mathbf{k}_1^n) + i \sum_{r=1}^n k_{n-r} v_1(\mathbf{k}_1^n) (v_1(\mathbf{k}_2^{n-r}) - \bar{v}_1(\mathbf{k}_2^{n-r})) + \\ + ik_n \sum_{r=1}^{\infty} (v_2(\mathbf{k}_2^{n+r}) \bar{v}_1(\mathbf{k}_2^{n+r}) + \bar{v}_2(\mathbf{k}_2^{n+r}) v_1(\mathbf{k}_2^{n+r})) = 0$$

Из (2.14) и (2.15) уже легко получить уравнения для $v_\alpha(\mathbf{k}_i^n)$, $i=2, 3$, пользуясь соответствующей перестановкой индексов у векторов s_j на фиг. 2. Таким образом, можно выписать систему уравнений относительно шести комплексных параметров $v_\alpha(\mathbf{k}_i^n)$, $\alpha=1, 2, i=1-3$. В дальнейшем ограничимся частным случаем этой системы, полагая

$$(2.16) \quad v_\alpha(\mathbf{k}_1^n) = v_\alpha(\mathbf{k}_2^n) = v_\alpha(\mathbf{k}_3^n) \equiv u_\alpha^n, \quad \alpha=1, 2, \quad n=0, 1, \dots, N$$

где u_α^n — параметры, определяющие скорость на n -уровне. Тогда остается система двух комплексных уравнений:

$$(2.17) \quad \left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2 \right) u_1^n + i \sum_{r=1}^n k_{n-r} u_2^n (u_2^{n-r} - \bar{u}_2^{n-r}) + \\ + ik_n \sum_{r=1}^{\infty} (u_1^{n+r} \bar{u}_2^{n+r} + \bar{u}_1^{n+r} u_2^{n+r}) = 0 \\ \left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2 \right) u_2^n + i \sum_{r=1}^n k_{n-r} u_1^n (u_1^{n-r} - \bar{u}_1^{n-r}) +$$

$$+ ik_n \sum_{r=1}^{\infty} (u_1^{n+r} \bar{u}_2^{n+r} + \bar{u}_1^{n+r} u_2^{n+r}) = 0$$

Теперь заметим, что как в уравнениях (2.14), (2.15), так и в (2.17) можно в суммах оставить только слагаемые с $r=1$. Действительно, в первых суммах указанных уравнений k_{n-1} , поскольку k_i растет с увеличением i : $k_{i+1} > k_i$. Во вторых суммах уравнений (2.14), (2.15), (2.17) максимальными будут фурье-компоненты $v_\alpha(k_i^{n+1})$, так как с увеличением k $|u(k)|$ уменьшается с определенной степенью, обеспечивающей сходимость соответствующих рядов Фурье. Поэтому и в этих суммах оставляем слагаемое только с $r=1$. Разделяя теперь действительные и мнимые части, получим систему

$$\begin{aligned} u_1^n &= \xi_n + i\eta_n, & u_2^n &= \varphi_n + i\psi_n \\ \left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) \xi_n - 2k_{n-1} \psi_{n-1} \varphi_n &= 0 \\ \left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) \eta_n - 2k_{n-1} \psi_{n-1} \psi_n + 2k_n (\xi_{n+1} \varphi_{n+1} + \eta_{n+1} \psi_{n+1}) &= 0 \\ \left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) \varphi_n - 2k_{n-1} \eta_{n-1} \xi_n &= 0 \\ \left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) \psi_n - 2k_{n-1} \eta_{n-1} \eta_n + 2k_n (\xi_{n+1} \varphi_{n+1} + \eta_{n+1} \psi_{n+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

В отсутствие вязкости система сохраняет интеграл энергии и фазовый объем

$$(2.19) \quad E = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (\xi_n^2 + \varphi_n^2 + \eta_n^2 + \psi_n^2)$$

$$(2.20) \quad \sum_{n=0}^N \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial \xi_n} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varphi_n} + \frac{\partial \eta_n}{\partial \eta_n} + \frac{\partial \psi_n}{\partial \psi_n} \right) = 0$$

Таким образом, уравнения (2.18) (при $\nu=0$) представляют собой систему гидродинамического типа.

Будем в дальнейшем рассматривать частное решение системы (2.18), полагая $\xi_n = \varphi_n = 0$, $n=0, \dots, N$. Тогда с некоторыми очевидными изменениями получим систему

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) \eta_n &= k_{n-1} \psi_{n-1} \psi_n - k_n \eta_{n+1} \psi_{n+1} + f_n \\ \left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) \psi_n &= k_{n-1} \eta_{n-1} \eta_n - k_n \eta_{n+1} \psi_{n+1} + g_n \end{aligned} \quad (2.21)$$

где f_n и g_n описывают внешние силы, действующие на каждом уровне. Если только f_0 и g_0 отличны от нуля, то внешние силы действуют на самом крупномасштабном уровне. Поэтому положим далее $f_n = \delta_n o f$, $g_n = \delta_n o g$. Относительно k_n предполагаем геометрическое подобие: $k_n = k_0 k^n$, $k > 1$

Если $f_n = g_n$, то система (2.22) допускает решение

$$\eta_n = \psi_n, \quad n=0, \dots, N$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2 \right) \eta_n = k_{n-1} \eta_{n-1} \eta_n - k_n \eta_{n+1}^2 + f_n$$

что совпадает с цепочкой (1.1), свойства которой были рассмотрены в работах [2-4].

3. Выпишем стационарные решения системы (2.21) при $\nu=0$, т. е. на тех уровнях, где действие вязкости пренебрежимо мало. Имеем тогда при $n \geq 1$

$$(3.1) \quad k_{n-1} \psi_{n-1}^\circ \psi_n^\circ - k_n \psi_{n+1}^\circ \eta_{n+1}^\circ = 0$$

$$k_{n-1} \eta_{n-1}^\circ \eta_n^\circ - k_n \psi_{n+1}^\circ \eta_{n+1}^\circ = 0$$

где величины с нулем обозначают искомые стационарные решения. Из этих уравнений следует $\psi_{n-1}^\circ / \eta_{n-1}^\circ = \eta_n^\circ / \psi_n^\circ$, откуда легко получить

$$(3.2) \quad \eta_n / \psi_n = b_0^{(-1)^n}, \quad b_0 = \eta_0^\circ / \psi_0^\circ$$

Поскольку уравнения при $n=0$ имеют вид

$$(3.3) \quad \frac{d\eta_0^\circ}{dt} = -k_0 \eta_1^\circ \psi_1^\circ - \nu_0 k_0^2 \eta_0^\circ + f = 0$$

$$\frac{d\psi_0^\circ}{dt} = -k_0 \eta_1^\circ \psi_1^\circ - \nu_0 k_0^2 \psi_0^\circ + g = 0$$

где вязкость ν_0 оставлена для того, чтобы стационарные значения η_0° и ψ_0° существовали, то определяемые из этих уравнений η_0° и ψ_0° могут быть различными в зависимости от величины и знаков «сил» f и g . Поэтому b_0 принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Далее из (3.1) для величины $a_n = \psi_n^\circ \eta_n^\circ$ получим

$$(3.4) \quad a_{n-1} a_n = \frac{k_n^2}{k_{n-1}^2} a_{n+1}^2 = k^2 a_{n+1}^2$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$(3.5) \quad a_n = k^\alpha \left(\frac{a_0}{a_1} \right)^\beta, \quad \alpha = \frac{1-2n}{3} + \frac{1 - (-1/2)^{n-2}}{9}, \quad \beta = \frac{1 - (-1/2)^{n-1}}{3}$$

Отметим также, что если $b_0 < 0$, то, как следует из уравнения $\psi_{n-1}^\circ \psi_n^\circ = \eta_{n-1}^\circ \eta_n^\circ$, выполняется $a_n < 0$ при всех допустимых n . Однако из последнего неравенства и из уравнений

$$k_{n-1} \psi_{n-1}^\circ \psi_n^\circ = k_n a_{n+1}, \quad k_{n-1} \eta_{n-1}^\circ \eta_n^\circ = k_n a_{n+1}$$

следует, что $\psi_{n-1}^\circ \psi_n^\circ < 0$ и $\eta_{n-1}^\circ \eta_n^\circ < 0$, т. е. знаки мод ψ_n° чередуются и противоположны знакам мод η_n° . Можно назвать этот вид стационарного решения антисимметричным в отличие от симметричного при $b_0 > 0$.

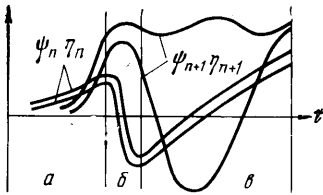
Таким образом, из (3.2), (3.4), (3.5) можно получить η_n° и ψ_n° , задав в качестве «граничного условия» η_0° и ψ_0° (или b_0 и a_0) и определив из

(3.3) a_1 . При этом будет иметь место соотношение

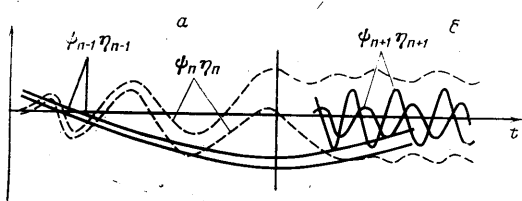
$$(3.6) \quad (\psi_n^\circ)^2 + (\eta_n^\circ)^2 = a_n \left(b_0 + \frac{1}{b_0} \right)$$

Это соответствует колмогоровскому спектру (в левой части стоит величина, пропорциональная энергии n -го уровня), поскольку $a_n \sim k_n^{-2/3}$ при достаточно больших n .

4. Найденное стационарное решение системы (2.21) может иметь смысл при моделировании турбулентности, если оно либо устойчиво, либо, в случае неустойчивости, изменение мод каждого из уровней происходит с амплитудами, близкими по порядку к определенным из (3.6). Поэтому рассмотрим сначала вопрос об устойчивости стационарных решений системы (2.21). В двух случаях, при $b_0=1$ и -1 , определение нужных собственных значений соответствующих линеаризованных уравнений можно привести аналитически. В первом случае, когда $\psi_n^\circ = \eta_n^\circ$, задача сводится к уравнениям, исследованным в [3, 4], где была показана неустойчивость стационар-



Фиг. 3



Фиг. 4

ных решений. Во втором случае, антисимметричном, когда $\psi_n^\circ = -\eta_n^\circ$, возможно исследование с помощью теории возмущений по величине $1/k^{2/3}$, т. е. при достаточно больших k .

Уравнения относительно сумм $y_n = \psi_n' + \eta_n'$ и разностей $x_n = \eta_n' - \psi_n'$ величин возмущений ψ_n' , η_n' ($\psi_n = \psi_n^\circ + \psi_n'$, $\eta_n = \eta_n^\circ + \eta_n'$) имеют вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_n &= d_{n-1}y_n + c_n y_{n-1}, & x_{-1} &= y_{-1} = x_{N+1} = 0, & c_n &= k_{n-1} \psi_n^\circ \\ \dot{y}_n &= -d_{n-1}x_n - c_n x_{n-1} - 2c_{n+1}x_{n+1}, & d_n &= k_n \psi_n^\circ, & n &= 0, \dots, N \end{aligned}$$

Перепишем их путем замены $z_n = (x_n + iy_n) \exp(id_{N-1}t)$

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \dot{z}_n &= -i(d_{n-1} - d_{N-1})z_n - ic_n \exp[i(d_{N-1} - d_{N-2})t]z_{n-1} \\ &\quad - 2ic_n \exp(id_{N-1}t) \operatorname{Re}(z_{n+1}) \end{aligned}$$

Поскольку, согласно (3.4) и (3.6), $\psi_n^\circ \sim k^{-n/3}$, $d_n \sim k^{2n/3}$, то при больших k $|d_{n-1}| \ll |d_{N-1}|$, $n < N$. Таким образом, в (4.2) можно в первом слагаемом правой части пренебречь величиной d_{n-1} по сравнению с d_{N-1} . Поэтому, возвращаясь к переменным x_n и y_n , получим систему нулевого приближения

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \dot{x}_n &= c_n y_{n-1}, & \dot{y}_n &= -c_n x_{n-1} - 2c_{n+1} x_{n+1}, & n &= 0, \dots, N-1 \\ \dot{x}_N &= d_{N-1} y_N + c_N y_{N-1}, & \dot{y}_N &= -d_{N-1} x_N - c_N x_{N-1} \end{aligned}$$

Легко показать, что система (4.3) имеет только мнимые различные собственные значения. Включение вязкости приводит к появлению отрицательных действительных частей. Это устойчивость.

Далее можно в (4.3) добавить члены с коэффициентом d_{N-2} . Соответствующая система имеет близкие к (4.3) корни, и при больших k положительных действительных частей не появляется. Численные расчеты показали устойчивость стационарного решения $\psi_n^\circ = -\eta_n^\circ$ ($b_0 = -1$) и неустойчивость всех других с $b_0 \neq 1$ решений. Отметим, однако, что случай $b_0 = -1$ может реализоваться только при специальном способе возбуждения исследуемой цепочки уравнений — отдельные выбранные значения «сил» f и g и начальных условий. В общем случае решение цепочки имеет нестационарный характер.

Поэтому рассмотрим качественно некоторые черты поведения решения системы (2.21). Выпишем уравнения для выбранных n и $n+1$ уровней, считая малыми моды $n+2$ уровня

$$(4.4) \quad \dot{\eta}_n = k_{n-1} \psi_{n-1} \psi_n - k_n \psi_{n+1} \eta_{n+1}, \quad \dot{\psi}_n = k_{n-1} \eta_{n-1} \eta_n - k_n \psi_{n+1} \eta_{n+1}$$

$$(4.5) \quad \dot{\eta}_{n+1} = k_n \psi_n \psi_{n+1}, \quad \dot{\psi}_{n+1} = k_n \eta_n \eta_{n+1}$$

Если вначале возбуждены моды ψ_{n-1} и η_{n-1} и обе положительны (и, для простоты, примерно равны), то начинают возрастать в положительную сторону моды ψ_n , η_n и ψ_{n+1} , η_{n+1} так, что их разность убывает (фиг. 3, а), а степень их роста определяется множителями

$$\exp \left[k_{n-1} \int \sqrt{\psi_{n-1} \eta_{n-1}} dt \right] \quad \text{и} \quad \exp \left[k_n \int \sqrt{\psi_n \eta_n} dt \right]$$

Сильное возрастание произведения $\psi_{n+1} \eta_{n+1}$ приводит к преобладанию вторых слагаемых правых частей уравнений (4.4): η_n и ψ_n уменьшаются (фиг. 3, б).

Когда ψ_n и η_n становятся отрицательными, из (4.5) (полагая для простоты $\psi_n \approx \eta_n$) получим, что сумма $\psi_{n+1} + \eta_{n+1}$ стремится к нулю, а разность $\psi_{n+1} - \eta_{n+1}$ по модулю возрастает, т.е. ψ_{n+1} и η_{n+1} становятся разного знака (фиг. 3, в).

При этом второе слагаемое $-k_n \psi_{n+1} \eta_{n+1}$ в правой части (4.4) становится положительным и при превышении по модулю первого поворачивает кривые ψ_n , η_n в положительную полуплоскость (фиг. 3, в). Видно, что амплитуда построенных автоколебаний определяется балансом первых и вторых слагаемых правой части (4.4).

Возрастание произведения $\psi_n \eta_n$ (из фиг. 3 видно, что ψ_n и η_n почти всегда имеют один знак) приводит к уменьшению и переходу в отрицательную полуплоскость кривых ψ_{n-1} и η_{n-1} (как и для ψ_n и η_n). Это приводит к увеличению расстояния между ψ_n и η_n ($\psi_n + \eta_n \rightarrow 0$, $|\psi_n - \eta_n|$ растет), так что они становятся разного знака (как и для ψ_{n+1} и η_{n+1}). При этом ψ_n и η_n колеблются (см. фиг. 4, а).

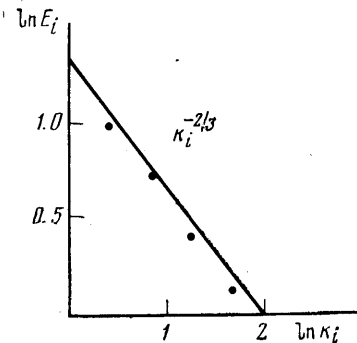
Разные знаки у ψ_n и η_n приводят к осцилляциям ψ_{n+1} и η_{n+1} (см. (4.5)) вокруг нуля с амплитудами, с которыми ψ_{n+1} и η_{n+1} пришли к моменту появления разных знаков у ψ_n , η_n (фиг. 4, б).

При этом возникают колебания у ψ_n и η_n вокруг определяемых из предыдущих моментов времени значений без, однако, существенного увеличения их величины.

Это следует из (4.5), поскольку ψ_{n+1} и η_{n+1} описываются приближенно соответственно синусом и косинусом или наоборот; их произведение пропорционально синусу удвоенного аргумента, что дает вынуждающие осциллирующие слагаемые в (4.4). Разные знаки у ψ_n и η_n заставляют ψ_{n-1} и η_{n-1} переходить в положительную полуплоскость. В дальнейшем поведение ψ_{n-1} и η_{n-1} становится таким же, как и ψ_n и η_n на фиг. 4.

Таким образом, каждая пара кривых ψ_i и η_i в своем развитии проходит несколько стадий: фаза автоколебаний (как у ψ_n , η_n на фиг. 4, а), определяемых балансом первых и вторых слагаемых правых частей рассматриваемых уравнений; колебания вокруг нулевого состояния (как на фиг. 4, б) из-за первых слагаемых осцилляции вокруг нулевых меняющихся положений под действием сил, связанных с колебаниями нижнего яруса (фиг. 4, б).

Амплитуды двух последних указанных стадий определяются амплитудами первой и не превышают



Фиг. 5

их (как правило, меньше), т.е. в своем развитии у каждой кривой период интенсивных изменений сменяется периодом более спокойного развития.

Проведенное выше рассмотрение показывает, что амплитуды всех возникающих в системе (2.21) колебаний определяются балансом первых и вторых слагаемых правых частей. Поэтому в среднем правые части равны нулю, а интенсивность колебаний мод n -го уровня имеет порядок $a_n \sim k_n^{-2/3}$, определяемый из решения стационарных уравнений. Таким образом, статистическое (осредненное по времени) распределение энергии по уровням у рассматриваемой системы должно быть близким к колмогоровскому. Для подтверждения этого вывода система (2.21) решалась численно при заданных внешних силах ($f=1.4$, $g=1$) и достаточно малой вязкости. Вычисление среднего по времени значения энергии i -го уровня проводилось за период, малый по сравнению со временем значительного изменения энергии нулевого уровня (на котором действуют силы), но включающий в себя достаточное количество различных колебаний ψ_i и η_i , описанных выше. Величина k выбиралась с учетом не очень большого времени счета

$k=1.5-2$. На фиг. 5 представлены в логарифмическом масштабе нормировочные значения E_i для нескольких уровней ($i=2-5$), находящихся вне областей диссипации и притока энергии ($k=1.5, N=9$). Фигура показывает хорошее согласие с законом $k_n^{-2/3}$. Численный счет также подтвердил описанное выше качественно поведение мод ψ_i и η_i и показал на наличие в модельной системе (2.21) указанных эффектов перемежаемости, связанных с чередованием периодов интенсивного и слабого развития уровней.

Автор благодарит А. М. Обухова за полезные обсуждения.

Поступила 12 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Oboukhov A. M.* On the problem of nonlinear interactions in fluid dynamics. *Gerlands Beitr. Geophys.*, 1973, vol. 82, No. 4.
2. Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А. Нелинейные системы гидродинамического типа. М., «Наука», 1974.
3. Глуховский А. Б. Об устойчивости нелинейных систем типа цепочек, моделирующих каскадные процессы передачи энергии. *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1975, т. 11, № 8.
4. Глуховский А. Б. Эффект квадратичного трения в многоярусных нелинейных системах. *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1977, т. 13, № 9.
5. Деснянский В. Н., Новиков Е. А. Моделирование каскадных процессов в турбулентных течениях. *ПММ*, 1974, т. 38, вып. 3.
6. Деснянский В. Н., Новиков Е. А. Эволюция спектров турбулентности к режиму подобия. *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1974, т. 10, № 2.
7. *Lee J.* The triad-interaction representation of homogeneous turbulence. *J. Math. Phys.*, 1975, vol. 16, No. 7.
8. *Hald O. H.* Constants of motion in models of two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 1976, vol. 19, No. 6.
9. *Lee J.* Isolating constants of motion in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 1977, vol. 20, No. 8.
10. *Kells L. C., Orszag S. A.* Randomness of low-order models of two-dimensional inviscid dynamics. *Phys. Fluids*, 1978, vol. 21, No. 2.