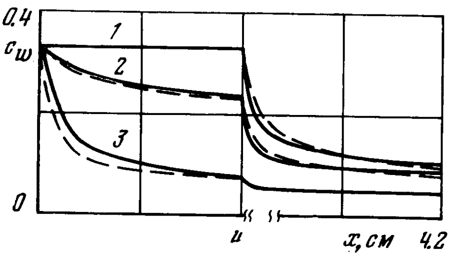
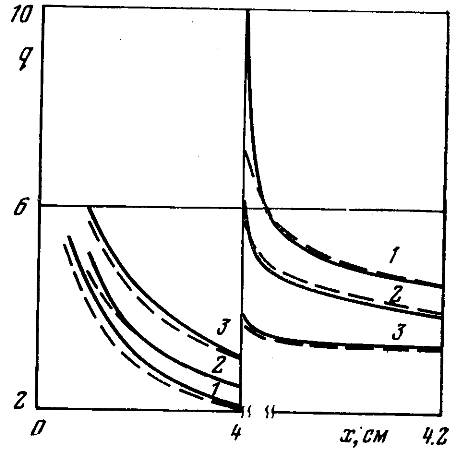


Фиг. 2



Фиг. 3

Распределения концентрации атомов и теплового потока (в *мвт/м*^{2}) на пластине и калориметре показаны на фиг. 2 и 3. Масштаб по оси абсцисс при $x>x_0$ увеличен в 20 раз. Сплошными линиями показаны результаты расчетов по предложенной методике, штриховыми изображены результаты численного расчета по программе [5]. Цифрами *1*, *2*, *3* обозначены кривые, соответствующие значениям $K_{w1}=0$, 1, 7 *м/сек* соответственно. Приемлемое совпадение результатов приближенного аналитического решения и численных расчетов свидетельствует о высокой эффективности метода среднемассовых величин и применимости полученных конечных формул на практике.

Концентрация атомов на поверхности калориметра, обладающего более высокой, чем пластина, каталитической активностью, становится меньше, а тепловой поток, обусловленный каталитической рекомбинацией на поверхности, становится больше, чем на пластине без разрыва каталитичности. Конвективная составляющая теплового потока на калориметре рассчитывается по (1.6) и резких изменений не испытывает.

Анализ результатов показывает, что тепловой поток к поверхности каталитического калориметра сильно зависит от каталитических свойств пластины, находящейся перед ним. Это свойство калориметра использовано в способе определения каталитической активности материалов [2].

Поступила 1 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лунев В. В.* Метод среднемассовых величин для пограничного слоя во внешнем потоке с поперечной неоднородностью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
2. *Яхлаков Ю. В., Воронкин В. Г., Беспалов В. Л.* Способ определения каталитической активности материалов. Авт. свид. № 442400, опубл. 5.09.74, Класс *G*01, *n*, 25/00.
3. *Землянский Б. А., Маринин В. П.* К теории калориметра на проницаемой поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.
4. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. М., «Машиностроение», 1972.
5. *Воронкин В. Г., Гераскина Л. К.* Неравновесный ламинарный пограничный слой диссоциирующего воздуха на осесимметричных телах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.

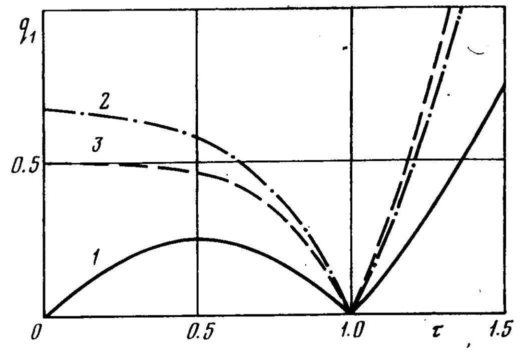
УДК 533.6.011.8

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В СИЛЬНО РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

О. Г. ФРИДЛЕНДЕР

(Москва)

Рассматривается плоская задача теплопередачи в разреженном газе. Изучается немонотонное изменение потока тепла между пластинами при понижении температуры одной из них. Указывается на парадокс, возникающий в этой задаче при описании взаимодействия молекул газа с поверхностью с помощью коэффициентов аккомодации.



Фиг. 1

1. Рассматривается теплопередача молекулами газа, находящегося между параллельными пластинами, нагретыми до температур T_1, T_2. Предполагается, что молекулы газа отлетают от пластин с максвелловским распределением, соответствующим температурам T_1, T_2. Пусть сначала газ находится в свободномолекулярном состоянии. Тогда тепловой поток определяется формулой

$$q_1=q/q_0=\tau|1-\tau|, \quad \tau=(T_2/T_1)^{1/2}, \quad q_0=\pi^{-1/2}\rho_0(2RT_1)^{3/2} \tag{1.1}$$

которая отличается от приведенной в [1] только тем, что введена средняя плотность молекул газа ρ_0 (R – газовая постоянная) и тепловой поток отнесен к величине q_0. График зависимости q_1 приведен на фиг. 1, кривая *1*. Как видно из (1.1) и фиг. 1, тепловой поток монотонно растет с ростом большей температуры, но немонотонно меняется с уменьшением меньшей. Максимальный тепловой поток к пластине *2* достигается не тогда, когда T_2 обращается в нуль, как можно было бы ожидать, а при $T_2=0.25\,T_1$ ($\tau=0.5$); при $T_2=0$ тепловой поток обращается в нуль. Немонотонность потока тепла объясняется влиянием двух факторов. С одной стороны, энергия молекул, улетающих с холодной пластины, уменьшается при уменьшении T_2/T_1, что приводит к увеличению теплового потока к холодной пластине. С другой стороны, плотность вылетающих молекул ρ_2 растет, вследствие чего уменьшается плотность ρ_1 и количество молекул, перелетающих с горячей пластины на холодную.

На фиг. 1 приведены также зависимости теплового потока в сплошной среде (закон Фурье), демонстрирующие монотонный рост теплового потока q с увеличением перепада температуры $|\tau-1|$ для двух показателей в зависимости теплопроводности от температуры $\lambda/\lambda_1=(T/T_1)^s$ ($s=1/2$, молекулы – упругие сферы, кривая *2*; $s=1$, максвелловские молекулы, кривая *3*). Тепловой поток при этом отнесен к $q_0\,\mathrm{Kn}$, где $\mathrm{Kn}={}^{15}/_4\mu_1\rho_0^{-1}L^{-1}(RT_1)^{-1/2}$, L – расстояние между пластинами.

Естествен вопрос о характере зависимости теплового потока от отношения температур при промежуточных числах Кнудсена. В настоящее время не существует достаточно подробных и точных расчетов зависимости $q(\tau,\,\mathrm{Kn})$ в широком диапазоне изменений величин τ, Kn. Поэтому для оценки величины τ_*, при которой тепловой поток достигает своего максимального значения, будет использован приближенный метод, основанный на применении вариационного метода с сопряженной функцией. Приближенно решается задача теплопередачи разреженным газом между плоскими пластинами, когда состояние газа описывается функцией распределения $f(y,\,\xi)$, удовлетворяющей уравнению Больцмана (далее примем релаксационную форму интеграла столкновений), диффузным граничным условиям и дополнительным условиям непротекания и постоянства массы (позволяющим определить n_i)

$$\eta\frac{\partial f}{\partial y}=I(f,f), \qquad I=An(f_0-f) \tag{1.2}$$

$$f(-L/2)H^+(\eta)=n_1f_{01}H^+(\eta), \qquad f(+L/2)H^-(\eta)=n_2f_{02}H^-(\eta) \tag{1.3}$$

$$H^+(\eta)=\begin{cases}1, & \eta\geqslant 0\\ 0, & \eta<0,\end{cases} \qquad H^-=1-H^+$$

$$f_{0i}=(2\pi RT_i)^{-3/2}\exp(-\xi^2/2RT_i)$$

$$\frac{1}{L}\int\limits_{-L/2}^{L/2}\int f\,d\xi\,dy=n_0, \qquad \int\limits_{-L/2}^{L/2}\int\eta f\,d\xi\,dy=0 \tag{1.4}$$

Если ввести дополнительную неизвестную функцию $g(y,\,\xi)$, то можно построить функционал, который достигает своего стационарного значения на решении поставленной задачи, а само стационарное значение F совпадает с искомым тепловым потоком q. Ниже приведен функционал, записанный в безразмерном виде (величины отнесены к n_0, T_1, $L/2$; $\alpha=(^{15}/_8)\sqrt{2}\,\mathrm{Kn}^{-1}=An_0L(2RT_1)^{-1/2}$, когда он построен для интегральной формы записи (1.2) – (1.4), а не дифференциальной, как в [2]

$$
\begin{aligned}
F = {} & \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dy \int \eta\xi^2 f\, d\xi + \int_{-1}^{1} dy \int \eta f g\, d\xi - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} dy' \int I(f') g[H] d\xi - \\
& - \frac{2}{1+\tau}\int_{-1}^{1} dy \int \eta g[H^+(\eta)\tau f_1 + H^-(\eta) f_2] d\xi + \\
& + \frac{\alpha}{\sqrt{2}(1+\tau)}\int_{-1}^{1} dy \int \eta g[H^+(\eta) I_1 f_1 + H^-(\eta) I_2 f_2] d\xi
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

$$f_1=(2\pi)^{-3/2}\exp(-\xi^2/2), \qquad f_2=(2\pi\tau^2)^{-3/2}\exp(-\xi^2/2\tau^2)$$

$$[H]=H^+(\eta)H^+(y-y')-H^-(\eta)H^-(y-y')$$

$$I_{1,2}=\int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} dy' \int I(f)[H]\left(\frac{\tau}{\eta}\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) d\xi$$

Целесообразно ограничиться простыми пробными функциями, имеющими навье-стоксов вид

$$
\begin{aligned}
& f=(2\pi T)^{-3/2}\exp(-\xi^2/2T)\,[1+a\eta T^{-3/2}(\xi^2-5T)] \\
& g=b\xi^2, \qquad T=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} T_0\, dy
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

где a, b – постоянные, T_0 – температура газа в режиме сплошной среды.

После вычисления (1.5) при f, g, заданных в виде (1.6), можно найти приближенное выражение стационарного значения F, совпадающее с безразмерным тепловым потоком.

$$
\begin{aligned}
& q_1=2\sqrt{2}\pi^{-1/2}\tau(1-\tau)\,[1+{}^2/_5\pi^{-1/2}T^{-3/2}(T-\tau+\tau^2+1)\alpha] \\
& T={}^2/_3(\tau^4+\tau^2+1)(\tau^2+1)^{-1}
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Точность формулы (1.7) может быть определена из данных, приведенных ниже:

α	0	1	2	3	4	5
q_1	1.000	0.782	0.642	0.544	0.473	0.417
q	1.000	0.762	0.631	0.540	0.472	0.420

Здесь значения теплового потока по формуле (1.7) (первая строка) сравниваются с численным расчетом [3] уравнений (1.2) – (1.4) при $\tau=1/2$ и $0\leqslant\alpha\leqslant5$ (вторая строка). Погрешность не превышает 2.5%. При меньших значениях числа Кнудсена погрешность возрастает и при $\tau=1/2$, $\mathrm{Kn}\to0$ относительная погрешность достигает 15%.

Анализ (1.7) показывает, что немонотонная зависимость теплового потока от температуры холодной пластины $q_1(\tau)$ сохраняется и при $\alpha\neq0$. При этом значение τ_*, при котором достигается максимальное значение q_1, слабо зависит от α: τ_* увеличивается от 0.5 при $\alpha=0$ до 0.54 при $\alpha=1$, а при дальнейшем росте α увеличивается до 0.55. Конечно, при очень малых числах Кнудсена ($\mathrm{Kn}<0.01$), приведенное выражение (1.7) для q_1 перестает быть справедливым, особенно при малых значениях τ ($\tau\ll1$). Теплопередачу в этой области изменения параметров следует исследовать особо. Однако для не очень малых чисел Кнудсена можно сделать вывод о том, что немонотонная зависимость теплового потока от температуры холодной пластины, характерная для свободномолекулярной области, присуща и промежуточной области.

2. Перераспределение потоков молекул, вызывающее эффект, описанный выше, приводит также к иному, не отмеченному ранее явлению. Обычно учет отклонения реального закона взаимодействия молекул газа с поверхностью от полностью диффузного (13) производится введением коэффициентов аккомодации. Однако при

больших перепадах температуры оказывается, что этот способ приводит к парадоксальным результатам, поскольку одному и тому же значению коэффициента аккомодации α могут соответствовать различные законы взаимодействия молекул с поверхностью. Рассмотрим два закона взаимодействия:

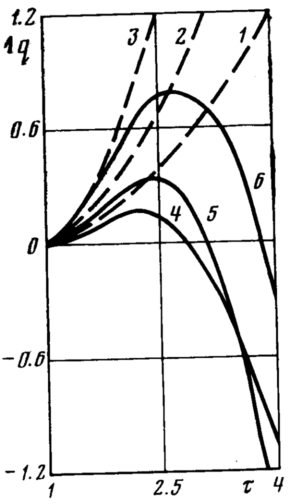
$$f(\mp L/2,\eta)H^{\pm}(\eta)=(1-\alpha)f(-\eta)H^{\pm}+\alpha n_{1,2}f_{01,2}H^{\pm} \tag{2.1}$$

$$f(\mp L/2,\eta)H^{\pm}=n_{1,2}f_{0\,r1,2}H^{\pm} \tag{2.2}$$

$$f_{0\,ri}=(2\pi RT_{ri})^{-3/2}\exp(-\xi^2/2RT_{ri})$$

$$\alpha=\frac{E-E_r}{E-E_w},\qquad E_{ri}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}mn_i(RT_{ri})^{3/2} \tag{2.3}$$

В выражении (2.2) температуры T_{ri} определяются через T_i заданием коэффициента аккомодации энергии обычным образом (2.3). Подчеркнем, что в обеих моделях с макроскопической точки зрения коэффициент α может быть отождествлен с коэффициентом аккомодации энергии, несмотря на то, что вид функций распределения отраженных молекул при $\alpha\neq1$ в моделях (2.1) и (2.2) различен. Здесь принято одно и то же значение α для обеих поверхностей.



Фиг. 2

Решая свободномолекулярную задачу с граничными условиями (2.1) или (2.2), найдем соответственно

$$q=\pi^{-1/2}(2R)^{3/2}\frac{\alpha}{2-\alpha}\rho_0(T_1T_2)^{1/2}|T_1^{1/2}-T_2^{1/2}| \tag{2.4}$$

$$q=\pi^{-1/2}(2R)^{3/2}\rho_0(T_{r1}T_{r2})^{1/2}|T_{r1}^{1/2}-T_{r2}^{1/2}| \tag{2.5}$$

$$T_{r1}=(2-\alpha)^{-1}[T_1+(1-\alpha)T_2]$$
$$T_{r2}=(2-\alpha)^{-1}[(1-\alpha)T_1+T_2]$$

На фиг. 2 приведена разность между тепловым потоком при $\alpha=1$ и тепловым потоком при $\alpha<1$, отнесенная к q_0.

Кривые *1–3* соответствуют зеркально-диффузной модели (2.4) с коэффициентами аккомодации соответственно 0.95, 0.9 и 0.8. Кривые *4–6* соответствуют диффузной модели с неполной аккомодацией (2.5) при тех же значениях α. Как видим, при не очень больших перепадах температуры ($T_2/T_1<4$) результаты по обеим моделям близки друг к другу, что совпадает с выводом работы [4]. Однако при больших перепадах ($T_2/T_1\sim10$) результаты существенно различаются. Так, например, значение q по модели (2.4) при $\alpha=0.8$ больше q по модели (2.5) при $\alpha=0.9$. Более того, разным значениям α в модели (2.5) соответствуют одинаковые q.

Наконец, при не очень малых коэффициентах аккомодации ($\alpha>0.8$) и больших перепадах температуры ($T_2/T_1>10$) тепловые потоки при $\alpha<1$ больше тепловых потоков при $\alpha=1$. Этот парадоксальный на первый взгляд результат объясняется тем, что тепловой поток между поверхностями определяется не только энергией молекул, летящих от горячей пластины, которая уменьшается при $\alpha<1$, но и их потоком, который при фиксированной степени разрежения ρ_0 увеличивается. (Во внешних свободномолекулярных задачах поток отраженных молекул зависит только от потока падающих на поверхность молекул и не зависит от коэффициента аккомодации, поэтому там введение коэффициента аккомодации оправдано.) Таким образом, в сильно разреженном газе для вычисления теплопередачи при больших перепадах температуры необходимо знание не только коэффициента аккомодации, но полного закона взаимодействия молекул с поверхностью.

Поступила 26 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967, стр. 393–395.
2. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М., «Мир», 1978, стр. 399.
3. *Willis D. R.* Heat transfer in a rarefied gas between parallel plates at large temperature ratios. In: Rarefied Gas Dynamics, vol. 1. N. Y. – L., Acad. Press, 1963.
4. *Sparrow E. M., Kinney R. B.* Free molecule heat transfer between parallel plates. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 3.