

ДИФФУЗИЯ К ЧАСТИЦЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ И МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА И ГАРТМАНА

А. М. ГОЛОВИН, В. Л. НАТЯГАНОВ

(Москва)

Исследуется влияние однородного магнитного поля на массообмен сферической твердой частицы и жидкой капли, обтекаемых вязкой электропроводной жидкостью. На основе полученного ранее [1] поля скоростей движения жидкости вычислены распределение концентрации в диффузионном пограничном слое, плотность диффузионного потока и число Нуссельта, характеризующее массообмен частицы с окружающей средой.

1. Распределение концентрации в жидкости, натекающей на каплю со скоростью U , в предположении полного поглощения диффузирующего вещества на ее поверхности и постоянства концентрации вдали от нее описывается решением следующей задачи

$$(1.1) \quad P(\nabla \nabla c) = \Delta c, \quad P = aU/D \\ r=1, \quad c=0; \quad r \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 1$$

Здесь a – радиус капли, D – коэффициент диффузии.

Поле скоростей и расстояния от центра капли приведены к безразмерному виду делением на U и a соответственно.

Предполагается, что движение жидкости, обтекающей частицу, соответствует числам Рейнольдса $R \ll 1$ ($R = aU/\nu$, ν – кинематическая вязкость жидкости). При малых магнитных числах Рейнольдса $R_m \ll 1$ и Гартмана $M \ll 1$ поле скоростей движения жидкости, обтекающей каплю, на расстояниях $r \ll 1/M$ имеет вид [1]

$$(1.2) \quad \mathbf{v} = \mathbf{k} - \frac{F_k}{8\pi} \left[\frac{\mathbf{k} + (\mathbf{nk})\mathbf{n}}{r} + A \frac{\mathbf{k} - 3(\mathbf{nk})\mathbf{n}}{r^3} - \right. \\ \left. - \frac{M}{8} (6\mathbf{k} - 2\mathbf{k} \cos^2 \alpha + \mathbf{j} \sin 2\alpha) \right] - \frac{F_j}{8\pi} \left[\frac{\mathbf{j} + (\mathbf{nj})\mathbf{n}}{r} + A \frac{\mathbf{j} - 3(\mathbf{nj})\mathbf{n}}{r^3} \right] \\ F_k = 4\pi \left/ \left[1 - A - \frac{M}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right) \right] \right. \\ F_j = \frac{M}{16} \frac{F_k \sin 2\alpha}{1 - A}, \quad A = \frac{\mu'}{2\mu + 3\mu'}$$

Здесь \mathbf{k} – единичный вектор, направленный по скорости натекающего потока U , $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, μ' и μ – динамические вязкости жидкостей внутри капли и в натекающем потоке, α – угол между вектором магнитной индукции \mathbf{B} и вектором скорости натекающего потока U . Единичный вектор \mathbf{j} направлен вдоль вектора $[\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{B}]]$.

В области $r-1 \ll 1$ вблизи поверхности капли или твердой частицы ($\mu'/\mu \rightarrow \infty$) можно получить следующие главные члены в разложении поля скоростей

$$(1.3) \quad \mathbf{v}_f = \frac{F_k}{8\pi} (1 - 3A) [\mathbf{K} - (\mathbf{Kn})\mathbf{n}] \\ \mathbf{v}_s = \frac{F_k}{4\pi} (r-1) [\mathbf{K} - (\mathbf{Kn})\mathbf{n}] \\ \mathbf{K} = \mathbf{k} + \frac{M}{16} \frac{\sin 2\alpha}{1 - A} \mathbf{j}$$

Здесь и далее индексы f и s относятся соответственно к жидкой и твердой частице.

2. В сферической системе координат с полярной осью вдоль \mathbf{K} распределение концентрации в рассматриваемом приближении оказывается осесимметричным и

описывается при $P \gg 1$ решением следующей задачи

$$(2.1) \quad P \left(v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 c}{\partial r^2}$$

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$r=1, \quad \theta \neq \pi, \quad c=0; \quad r \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 1$$

$$\psi \neq 0, \quad \theta \rightarrow \pi, \quad c \rightarrow 1$$

Функция тока вблизи поверхности жидкой и твердой частицы соответственно имеет вид

$$\psi_f = \frac{F_k}{8\pi} (1-3A) (r-1) \sin^2 \theta$$

$$\psi_s = \frac{F_k}{8\pi} (r-1)^2 \sin^2 \theta$$

Далее, следуя [2], с помощью преобразования Мизеса можно свести задачу к решению уравнения типа теплопроводности

$$(2.2) \quad \frac{\partial c_f}{\partial \tau_f} = \frac{\partial^2 c_f}{\partial \Psi_f^2}, \quad \frac{\partial c_s}{\partial \tau_s} = \frac{\partial}{\partial \Psi_s} \sqrt{2\Psi_s} \frac{\partial c_s}{\partial \Psi_s}$$

$$\tau_f = \frac{2}{3} + \cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta, \quad \Psi_f = y_f \sin^2 \theta$$

$$\tau_s = \frac{\pi - \theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta, \quad \Psi_s = \frac{1}{2} y_s^2 \sin^2 \theta$$

$$r-1 = \delta_f y_f = \delta_s y_s$$

$$PF_k(1-3A)\delta_f^2 = 8\pi, \quad PF_k\delta_s^3 = 4\pi$$

Решение, удовлетворяющее условиям $\Psi=0, \tau \neq 0, c=0; \Psi \rightarrow \infty, c \rightarrow 1; \tau \rightarrow 0, \Psi \neq 0, c \rightarrow 1$, имеет вид

$$(2.3) \quad c_f = \operatorname{erf} \left(\frac{\Psi_f}{2\sqrt{\tau_f}} \right), \quad c_s = \frac{1}{\Gamma(1/3)} \gamma \left(\frac{1}{3}, \frac{2\Psi_s \sqrt{2\Psi_s}}{9\tau_s} \right)$$

Безразмерная плотность диффузионного потока

$$j = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_{y=0}$$

соответственно равна

$$j_f = \frac{1}{\delta_f} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{\pi \tau_f}}, \quad j_s = \frac{3^{1/2} \sin \theta}{\delta_s \Gamma(1/3) \tau_s^{1/2}}$$

Отсюда следует, что число Нуссельта, характеризующее интегральный массообмен частицы со средой

$$Nu = \int_0^\pi j \sin \theta \, d\theta$$

с точностью до членов порядка M включительно, имеет вид

$$(2.4) \quad Nu_f = \frac{2}{\delta_f} \sqrt{\frac{4}{3\pi}} = 2 \sqrt{\frac{2P\mu}{3\pi(\mu+\mu')}} \left[1 + \frac{M}{16} \frac{2\mu+3\mu'}{\mu+\mu'} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right) \right]$$

$$Nu_s = \frac{3^{1/2}}{2\delta_s} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2/3} \frac{1}{\Gamma(1/3)} = \frac{(3\pi)^{2/3} P^{1/2}}{4\Gamma(1/3)} \left[1 + \frac{M}{8} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right) \right]$$

Полученные результаты при $M=0$ совпадают с ранее известными [2].

3. Если натекающий на частицу поток направлен параллельно или антипараллельно магнитному полю, то можно обобщить полученные выше результаты, учитывая члены порядка R в распределении скорости обтекающей жидкости. Вблизи поверхности частицы ведущие члены в разложении функции тока, как следует из результатов, полученных в работе [1], имеют вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \psi_f &= \frac{1}{2} (r-1) \frac{\mu}{\mu+\mu'} (1+m_f - k_f \cos \theta) \sin^2 \theta \\ m_f &= \frac{2\mu+3\mu'}{8(\mu+\mu')} \frac{R^2+2M^2}{\sqrt{R^2+4M^2}} \\ k_f &= \frac{R(2\mu+3\mu')(5\mu+4\mu')}{40(\mu+\mu')^2} \\ \psi_s &= \frac{3}{4} (r-1)^2 (1+m_s - k_s \cos \theta) \sin^2 \theta \\ m_s &= \frac{3}{8} \frac{R^2+2M^2}{\sqrt{R^2+4M^2}}, \quad k_s = \frac{R}{2} \end{aligned}$$

Решение уравнения (2.1) будет соответствовать (2.3) после некоторого переобозначения аргументов

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tau_f &= \int_0^\pi (1-k_f \cos \theta) \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{2}{3} + \cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta + \frac{1}{4} k_f \sin^4 \theta \\ \Psi_f &= y_f (1-k_f \cos \theta) \sin^2 \theta \\ \tau_s &= \int_0^\pi \sqrt{1-k_s \cos \theta} \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi-\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{6} k_s \sin^3 \theta \\ \Psi_s &= \frac{1}{2} y_s^2 (1-k_s \cos \theta) \sin^2 \theta \\ \frac{1}{2} P \frac{\mu}{\mu+\mu'} (1+m_f) \delta_f^2 &= 1, \quad \frac{3}{2} P (1+m_s) \delta_s^3 = 1 \end{aligned}$$

Плотность диффузионного потока будет равна

$$(3.3) \quad \begin{aligned} j_f &= \frac{1}{\delta_f} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{\pi \tau_f}} (1-k_f \cos \theta) \\ j_s &= \frac{1}{\delta_s} \frac{3^{1/2}}{\Gamma(1/3)} \frac{\sin \theta}{\tau_s^{1/2}} \sqrt{1-k_s \cos \theta} \end{aligned}$$

Таким образом можно прийти к следующим выражениям для диффузионного числа Нуссельта:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} Nu_f &= 2 \sqrt{\frac{2P\mu}{3\pi(\mu+\mu')}} \left[1 + \frac{2\mu+3\mu'}{16(\mu+\mu')} \frac{R^2+2M^2}{\sqrt{R^2+4M^2}} \right] \\ Nu_s &= \frac{(3\pi)^{2/3} P^{1/3}}{4\Gamma(4/3)} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{R^2+2M^2}{\sqrt{R^2+4M^2}} \right) \end{aligned}$$

Эти результаты при $M=0$ совпадают с ранее известными [3-5]. В работах [6, 7] при $M=0$ вычисляется диффузионный поток на поверхность твердой частицы в предположении о пригодности формулы (3.1) для умеренных чисел R . Полученное в работе [6] выражение для полного диффузионного потока хорошо согласуется с результатами численного расчета [8] до чисел $R \approx 10$. В работе [7] используется

интегральное соотношение для толщины диффузионного пограничного слоя, приводящее к известному правильному выражению для Nu_0 , только если пренебречь поправками порядка R .

Поступила 13 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Головин А. М., Натяганов В. Л. Магнитогидродинамическое обтекание капли при малых числах Рейнольдса и Гартмана. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 6.
2. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
3. Acrivos A., Taylor T. D. Heat and mass transfer from single spheres in Stokes flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 4.
4. Головин А. М., Иванов М. Ф. Движение пузыря в вязкой жидкости. ПМТФ, 1971, № 1.
5. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалюк А. Т. Диффузия к капле при больших числах Пекле и конечных числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
6. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. Диффузия к твердой сферической частице в потоке вязкой жидкости при конечных числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
7. Аксельруд Г. А. Массообмен тел сферической формы с потоком жидкости. Инж.-физ. ж., 1970, т. 19, № 1.
8. Волощук В. М., Стужнева Л. В. Диффузионный поток на сферу при малых и средних числах Рейнольдса. Приближение диффузионного пограничного слоя. ПМТФ, 1970, № 2.

УДК 533.6.011.6:532.526.2

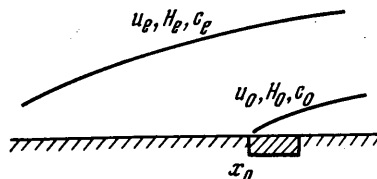
К ТЕОРИИ КАТАЛИТИЧЕСКОГО КАЛОРИМЕТРА

В. Л. БЕСПАЛОВ, В. Г. ВОРОНКИН

(Москва)

Приведено аналитическое решение задачи о теплообмене каталитического калориметра, установленного на пластине, причем каталитические свойства пластины и калориметра различны. Решение получено в предположении химически замороженного течения бинарной смеси в пограничном слое с помощью метода средних массовых величин [1].

1. Под каталитическим калориметром понимается калориметр, поверхность которого обладает способностью каталитической рекомбинации атомов, характери-



Фиг. 1

зуемой константой скорости каталитической рекомбинации K_w . Такого рода калориметр можно использовать как датчик теплового потока [2]. В общем случае каталитические свойства калориметра и поверхности, на которой он установлен, различны, и задача сводится к исследованию влияния разрыва граничных условий на теплообмен. Некоторые задачи теплообмена с разрывными граничными условиями рассмотрены в [3, 4].

С математической точки зрения постановка таких задач следующая: в некотором сечении $x=x_0$, где заданы профили параметров пограничного слоя $u(x_0, \psi)$, $H(x_0, \psi)$, $c(x_0, \psi)$ — скорость, замороженная энтальпия и атомарная концентрация соответственно, происходит резкое изменение граничных условий на стенке и при $x > x_0$ начинает развиваться внутренний пограничный слой (см. фиг. 1). Здесь ψ — расход газа или функция тока в пограничном слое.

Весьма удобным инженерным методом решения подобных задач является метод