

УДК 532.58

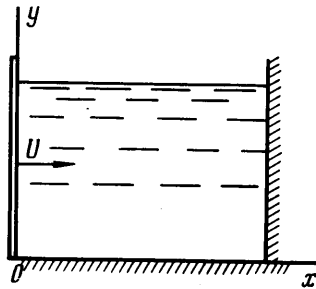
**ПРИСОЕДИНЕННАЯ МАССА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СОСУДА,
НАПОЛНЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ**

Н. А. ВЕКЛИЧ, Б. М. МАЛЫШЕВ

(Москва)

Решение задачи об ударе по жесткому прямоугольному сосуду, наполненному идеальной несжимаемой жидкостью, получено в виде, которым удобно пользоваться при рассмотрении коротких сосудов. Методом резонансных колебаний экспериментально подтверждены результаты расчета присоединенной массы сосуда.

Одной из основных характеристик динамического взаимодействия твердых тел с жидкостью является присоединенная масса. Теоретически присоединенная масса определяется из решения гидродинамической задачи об обтекании или ударе, а экспериментально — методом колебаний [1]. При рассмотрении удара или



Фиг. 1

гармонических колебаний твердого тела, взаимодействующего с жидкостью, принято, что жидкость в сосуде идеальная несжимаемая и при движении не отрывается от тела, действие силы тяжести и поверхностного натяжения не учитывается. При колебании тела с достаточно малой амплитудой и сравнительно высокой частотой эти допущения практически выполняются.

1. Рассмотрим вспомогательную плоскую задачу об ударе по жесткой подвижной стенке прямоугольного бассейна, наполненного жидкостью (фиг. 1). Глубина жидкости h , длина бассейна a , ширина его может быть произвольной.

Пусть до удара жидкость покоилась, а после удара подвижная стенка $x=0$ начала двигаться поступательно со скоростью U вдоль оси x . Определим потенциальное плоскопараллельное движение жидкости непосредственно после удара.

Задача сводится к нахождению потенциала скоростей $\varphi(x, y)$, удовлетворяющего уравнению Лапласа и смешанным граничным условиям

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$(1.2) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0} = U, \quad \varphi(x, h) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=a} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

Используя метод решения задач подобного типа, предложенный в [2], получим потенциал в виде

$$(1.3) \quad \varphi(x, y) = U \left[x + \frac{y^2 - x^2 - h^2}{2a} - \frac{a}{3} + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(k\pi y/a)}{k^2 \operatorname{ch}(k\pi h/a)} \cos \frac{k\pi x}{a} \right]$$

Решение (1.3) дает возможность полностью проанализировать движение жидкости и ее взаимодействие со стенками и дном бассейна. Влияние параметра a/h на взаимодействие жидкости с подвижной стенкой $x=0$ наиболее четко прослеживается с помощью локальной характеристики — импульсивного давления жидкости в левом нижнем углу $p_0 = -\rho\varphi(0, 0)$, а также с помощью интегральной характери-

стики — импульса P , действующего на подвижную стенку, или присоединенной массы μ_1 подвижной стенки ($\mu_1 = P/U$).

Исходя из (1.3), для давления и присоединенной массы получим соотношения в виде

$$(1.4) \quad \frac{p_0}{\rho h U} = \frac{h}{2a} + \frac{a}{3h} - \frac{2a}{\pi^2 h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \operatorname{ch}(k\pi h/a)}$$

$$(1.5) \quad \frac{\mu_1}{\rho h^2} = \frac{h}{3a} + \frac{a}{3h} - \frac{2a^2}{\pi^2 h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k^3}$$

где ρ — плотность жидкости.

Для коротких бассейнов ($a/h \leq 1$) в (1.4) можно учитывать лишь первый член ряда, а в (1.5) считать все гиперболические тангенсы равными единице.

Результаты вычислений для нескольких конечных значений a/h по формулам (1.4), (1.5) и по формулам для полуполосы ($a/h = \infty$) [3, 4] приведены ниже:

a/h	0.5	1	2	4	∞
$p_0/\rho h U$	1.1663	0.8157	0.7455	0.7425	0.7424
$\mu_1/\rho h^2$	0.8139	0.5894	0.5449	0.5428	0.5428

Сравнение полученных числовых значений показывает, что при $a/h > 2$ гидродинамическое воздействие на подвижную стенку будет практически таким же, как и в случае полубесконечного бассейна (полуполосы).

2. Рассмотрим удар по жесткому прямоугольному сосуду, наполненному жидкостью ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq h$, $0 \leq z \leq b$). Пусть после удара покоящийся до этого сосуд с жидкостью начал перемещаться поступательно со скоростью U вдоль оси x . В этом случае, используя решение (1.3), потенциал скоростей $\Phi(x, y)$, удовлетворяющий граничным условиям

$$(2.1) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=a} = U, \quad \Phi(x, h) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

может быть представлен в виде

$$(2.2) \quad \Phi(x, y) = \varphi(x, y) + \varphi(a-x, y) = \\ = U \left[x - \frac{a}{2} + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}[(2k-1)\pi y/a]}{(2k-1)^2 \operatorname{ch}[(2k-1)\pi h/a]} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{a} \right]$$

При рассмотрении коротких сосудов ($a/h < 4$) решение (2.2) в силу быстрой сходимости ряда обладает преимуществом по сравнению с решением той же задачи, полученным в [3] в виде разложения по гиперболическим функциям, зависящим не от y/a и h/a , как в (2.2), а от x/h и a/h . Полученный в [3] ряд быстро сходится в случае длинных сосудов ($a/h > 4$), когда можно пользоваться решением для полуполосы.

Используя (2.2), можно получить решение пространственной задачи о «косом» ударе по жесткому прямоугольному сосуду, когда после удара сосуд движется поступательно со скоростью V вдоль некоторой прямой, составляющей определенные углы с ребрами сосуда. Это решение будет представлять собой суперпозицию частных решений, соответствующих координатным осям. В частности, если скорость V составляет угол β с осью z , то соответствующее частное решение получается из (2.2) при замене U на $V \cos \beta$, x на z и a на b .

При определении присоединенной массы сосуда ограничимся случаем, когда сосуд после удара движется поступательно вдоль оси x . Из (2.2) для присоединенной массы μ , отнесенной к слою единичной толщины, получим соотношение

$$(2.3) \quad \frac{\mu}{\rho a h} = 1 - \frac{8a}{\pi^3 h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi h}{a}$$

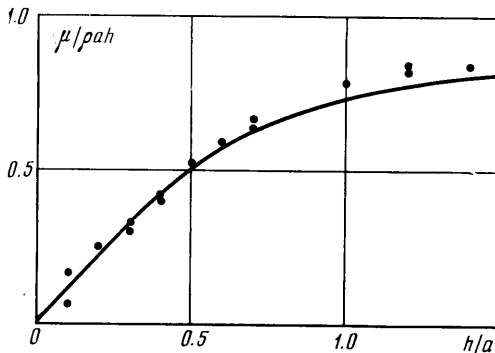
На основании решения (2.3), используя также решение для полуполосы [3, 4], можно получить приближенные формулы, которые с точностью до долей процента аппроксимируют точные соотношения в соответствующих диапазонах изменения

параметра h/a

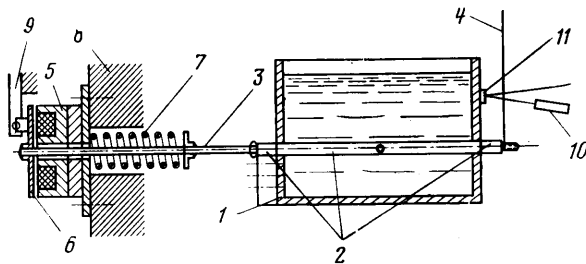
$$(2.4) \quad \frac{\mu}{\rho a h} = \begin{cases} 1.086 \frac{h}{a} & (h/a \leq 0.25) \\ 1 - \frac{8a}{\pi^3 h} \left(0.052 + \operatorname{th} \frac{\pi h}{a} \right) & (0.25 < h/a < 1) \\ 1 - 1.052 \frac{8a}{\pi^3 h} & (h/a \geq 1) \end{cases}$$

На фиг. 2 в виде сплошной линии представлены результаты теоретического расчета присоединенной массы прямоугольного сосуда.

3. Экспериментально присоединенная масса сосуда, наполненного жидкостью, определялась методом резонансных колебаний, который несколько отличается от метода, использованного в [1]. Схема установки приведена на фиг. 3.



Фиг. 2



Фиг. 3

Прямоугольный сосуд 1 был склеен из оргстекла толщиной 5 мм и имел внутренние размеры $5 \times 10 \times 7.5$ см. К боковым граням сосуда были приклеены ребра жесткости 2. Сосуд навинчивался на конец штока вибратора 3 и подвешивался на тонкой проволоке 4.

Вибратор состоял из круглого электромагнита 5, штока 3 с диском 6 и пружины 7, один конец которой крепился к штоку, а другой — к корпусу электромагнита. Вибратор крепился к массивной станине 8.

Катушка электромагнита питалась от звукового генератора (ЗГ-2А) через полупроводниковый диод. Вынужденные колебания системы вибратора с сосудом воспринимались фотоэлектрическим датчиком 9, соединенным с электронным осциллографом. Фотоэлектрический датчик состоял из светодиода и фотодиода, между которыми находился флажок, прикрепленный к диску 6. При колебании системы флажок перекрывал световой поток от светодиода, и на экране осциллографа можно было наблюдать колебания системы с амплитудой до нескольких сотых долей миллиметра.

Изменяя частоту звукового генератора и добиваясь максимальной амплитуды колебаний, можно получить резонансные колебания системы. Частота звукового генератора при резонансе определялась с помощью электронносчетного частотомера (ЧЗ-38), который подсчитывал число колебаний генератора в течение 10 сек, что позволило определить собственную частоту системы с точностью до 0,1 гц.

Заметим, что резонанс можно определить и по максимальной амплитуде капиллярных волн на поверхности жидкости, но этот критерий в данном случае менее объективен и точен.

При использовании резонансного метода необходимо было следить за тем, чтобы максимум амплитуды имел место при совпадении частот генератора и колебательной системы, а не при кратных частотах. Кроме того, учитывалось и то, что колебательная система, строго говоря, не является системой с одной степенью свободы: в ней могут возникнуть и другие резонансные колебания. В частности, когда ось вибратора не проходит через центр масс сосуда с жидкостью (точнее, через их общий центр удара), могут возникнуть колебания, при которых сосуд совершает заметное вращательное движение. Отсутствие вращательных колебаний сосуда контролировалось с помощью луча лазера 10, отраженного от зеркала 11, приклеенного на сосуде.

Собственная частота поступательных колебаний системы вдоль оси вибратора определяется формулой

$$(3.1) \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{M_0 + m + m_1}}$$

где c — жесткость пружины, M_0 — приведенная масса подвижных частей вибратора, m — масса сосуда (без воды), m_1 — присоединенная масса жидкости ($m_1 = \mu b$).

Собственная частота вибратора на холостом ходу (без сосуда) была около 177 гц.

Присоединенная масса сосуда с жидкостью определялась по частоте резонансных колебаний с помощью тарифовочного графика, построенного на основании вибрационных испытаний, когда вместо сосуда на шток вибратора навинчивались известные грузы. Чтобы исключить влияние магнитного поля, выражающееся в смещении резонансной кривой колебательной системы в сторону меньших значений частот [5], тарировка установки и испытания сосуда с жидкостью проводились при одном и том же небольшом напряжении питания электромагнита.

Результаты испытаний по определению присоединенной массы сосуда при различных количествах воды в нем представлены на фиг. 2. Результаты при $h/a < 1$ в основном получены при колебаниях сосуда вдоль длинных ребер ($a = 10$ см), данные же при $h/a \geq 1$ получены при колебаниях сосуда вдоль меньших ребер ($a = 5$ см).

Полученные экспериментальные данные показывают, что результаты расчета присоединенной массы сосуда, наполненного жидкостью, находятся в удовлетворительном согласии с экспериментом.

Поступила 20 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Римаи И. С., Крепс Р. Л. Присоединенные массы тел различной формы. Тр. ЦАГИ, 1947, № 635.
2. Грильберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.
3. Шульман С. Г. Расчеты сейсмостойкости гидросооружений с учетом влияния водной среды. М., «Энергия», 1976.
4. Каргаудас В. И. Плоская задача гидродинамики об изгибных колебаниях пластинок в жидкости. Литовский механический сборник, 1976, № 1, (16).
5. Кононенко В. О. Вынужденные колебания якоря в магнитном поле. Сб. тр. Ин-та строит. мех. АН УССР, № 16. Киев, Изд-во АН УССР, 1952.