

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПОРИСТОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

А. М. ВАЙСМАН

(Новосибирск)

В уравнениях движения теории фильтрации обычно не учитываются инерционные члены, хотя при входе потока в пористую среду под углом к границе возникает мощное вихревое движение [1]. Тем не менее такое приближение в большинстве случаев оправдано, поскольку завихренность оказывается локализованной вследствие диссипации в тонком слое, прилегающем к участку втекания. Однако возможны случаи, когда, несмотря на диссипацию, вихри не исчезают во внутренней области по следующим причинам. Во-первых, они могут поддерживаться и даже усиливаться за счет достаточно интенсивного растяжения вихревых линий. Во-вторых, диссипация может заметно сказываться лишь на достаточно большом расстоянии от границы, если в результате сужения трубок тока поток быстро ускоряется. В частности, при растекании завихренной жидкости на непроницаемой стенке естественно ожидать действия обоих указанных факторов и, следовательно, распространения завихренности.

Рассмотрим простейшую иллюстративную задачу с нелокальным распределением завихренности в однородной пористой среде. Пусть на полуоси, перпендикулярной границе (x, y) пористого полупространства, расположены источники, которые индуцируют вихревое осесимметричное течение невесомой несжимаемой жидкости без закрутки вокруг этой оси. Уравнение переноса вихря ω вдоль траектории имеет вид [1]

$$(1) \quad \frac{\delta \omega}{\delta t} = (\mathbf{v} \nabla) \omega - (\omega \nabla) \mathbf{v} = -\alpha \omega, \quad \omega = \text{rot } \mathbf{v}$$

где $\delta \omega / \delta t$ — производная Ли, t — время, $\alpha = \varepsilon / \kappa \rho$ — коэффициент трения, κ — проницаемость, ρ — плотность жидкости, \mathbf{v} — ее скорость в среднем проходном сечении S . В сферической системе координат (r, θ, φ) скорость имеет компоненты $(u, v, 0)$ вихря — компоненты $(0, 0, \omega)$.

При достаточно больших скоростях течения в средах малой проницаемости следовало бы учитывать нелинейную зависимость силы трения от скорости, но это бы значительно усложнило модель. В рассматриваемой постановке коэффициент трения принимается постоянным. Поэтому применительно к плотным средам данная задача носит качественный характер, однако и в этом случае она позволяет выяснить природу явления.

Для отыскания определяющих параметров задачи удобно переписать уравнение переноса вихря в других переменных. Рассмотрим с этой целью интенсивность $\delta I = \omega \delta S$ движущейся вместе с жидкостью вихревой трубки малого сечения δS и объема $\delta V = 2\pi r(\theta) \sin \theta \delta S$ ($r(\theta)$ — траектория жидкой частицы). Поскольку объем трубки сохраняется при движении, отношение $\Omega = \delta I / \delta V$ по-прежнему будет характеризовать поток вихря в ней, однако вследствие осевой симметрии и независимости от δS величина Ω подобно ω одновременно может служить локальной вихревой характеристикой. Нетрудно показать, что (1) в терминах Ω принимает простой вид

$$(2) \quad \frac{d\Omega}{dt} = -\alpha \Omega, \quad \Omega = \frac{\omega}{2\pi r(\theta) \sin \theta}$$

$$(3) \quad \Omega|_{\theta=0} = \pm \frac{\sigma}{2\pi r(0)}, \quad \sigma = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|\omega|}{\sin \theta}$$

Существенно, что на оси симметрии Ω в отличие от ω не равна нулю, что и приводит к непотенциальности течения.

Рассмотрим простейшее течение, предполагая, что ω зависит только от полярного угла. Тогда σ — константа, которая может быть выбрана в качестве определяющего размерного параметра всего течения. Из соображений размерности для функции тока ψ и соответственно компонент скорости будем иметь представление

$$(4) \quad \psi = \sigma r^3 f(\xi) \quad (\xi = \cos \theta)$$

$$(5) \quad u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\sigma r f'(\xi), \quad v = -\frac{1}{r\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{3\sigma r f(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Действуя на v ротором, получим связь

$$(6) \quad f'' + \frac{6f}{1-\xi^2} = -w, \quad w = \frac{\omega}{\sigma\sqrt{1-\xi^2}}$$

При помощи элементарных преобразований уравнений (2) в терминах безразмерных функций f и w можно привести к виду

$$(7) \quad (fw^3)' = -\lambda w^3 \quad (\lambda = \alpha/\sigma)$$

Параметр λ^{-1} характеризует отношение сил инерции и трения, т. е. играет роль числа Рейнольдса задачи.

Таким образом, для отыскания функций f , w имеется два дифференциальных уравнения (6) и (7), которые остается дополнить соответствующими краевыми условиями на оси ($\xi=1$) и на границе ($\xi=0$).

В силу (4) значение $f(1)$ является безразмерной характеристикой интенсивностей источников (стоков), причем в случае источников $f(1) < 0$. Условие на оси для w вытекает из (3) и второго соотношения (6) и имеет вид $w(1)=1$ либо $w(1)=-1$. Сначала будет рассмотрен случай, когда источники на оси индуцируют положительную завихренность

$$(8) \quad f(1)=f_1 (f_1 < 0), \quad w(1)=1$$

На границе должно быть выполнено условие непроницаемости $v=0$, которое на основании (5) можно записать также в форме $f(0)=0$.

Чтобы исследовать структуру решения, удобно свести сформулированную задачу к системе интегральных уравнений. С этой целью умножим и разделим на f правую часть (7) и затем проинтегрируем уравнение от ξ до 1. С учетом (8) получим

$$(9) \quad fw^3 = f_1 \exp \left[\lambda \int_{\xi}^1 f^{-1}(\zeta) d\zeta \right]$$

В случае $w(1) = -1$ перед f_1 следовало бы поставить минус. Формальное интегрирование (6) с использованием условия $f(0)=0$ дает

$$(10) \quad f = -c_0 f_a(\xi) - \int_0^{\xi} [f_a(\xi) f_s(\zeta) - f_s(\xi) f_a(\zeta)] w(\zeta) d\zeta$$

$$(11) \quad f_a = \xi(1-\xi^2), \quad f_s = 1 - 1.5\xi^2 - 0.75f_a(\xi) \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

Здесь $f_a(\xi)$, $f_s(\xi)$ — линейно-независимые потенциальные решения однородного уравнения (6), c_0 — неопределенная константа. При $\xi \rightarrow 1$ слагаемое $-c_0/f_a$ исчезает и (10) переходит в соотношение

$$(12) \quad f_1 = -\frac{1}{2} \int_0^1 f_a(\xi) w(\xi) d\xi$$

которое в неявной форме определяет c_0 .

Характер решения существенно зависит от того, обращается ли в нуль $f(\xi)$ во внутренних точках. Можно показать, что для граничных условий (8) выполняются неравенства $c_0 > 0$, $f(\xi) < 0$, $w(\xi) > 0$ ($\xi \neq 0$). В случае малых ξ из (10) следует, что в первом приближении скорости определяются потенциальной частью f , причем

$$(13) \quad f \approx -c_0 \xi, \quad f' \approx -c_0$$

Показатель экспоненты в (9) порядка $\lambda c_0^{-1} \ln \xi$. Поэтому w меняется по степенному закону

$$(14) \quad w \sim \xi^{\mu}, \quad \mu = (\lambda - c_0)/3c_0$$

Уравнение линии тока $\psi(r, \xi) = -\psi_0$ ($\psi_0 > 0$) в данной области можно представить в форме

$$(15) \quad r^3(\xi) \approx \psi_0/\sigma c_0 \xi$$

Формулы (14), (15) будут, очевидно, описывать поведение вихря при его движении по траектории, учитывая, что в этой области ω и w отличаются только размерным множителем. В случае $c_0 < \lambda$ вихрь диссипирует, и тем быстрее, чем меньше c_0 . Если $c_0 \geq \lambda$, растяжение вихревых линий в процессе растекания струй на твердой стенке будет играть более существенную роль по сравнению с диссипацией.

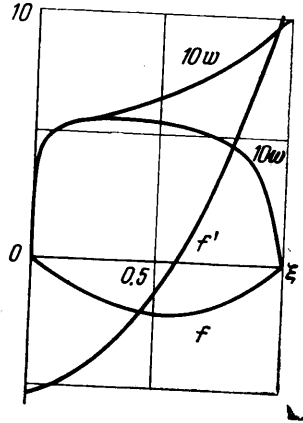
Аналогичным образом можно выяснить характер решения и в окрестности оси. Здесь вклад потенциальной составляющей исчезающе мал. Используя (11) и (12), из (10) найдем следующие выражения

$$(16) \quad f \approx f_1 [1 - 3(1 - \xi) \ln(1 - \xi)], \quad f' \approx 3f_1 \ln(1 - \xi)$$

Отсюда на основании (5) заключаем, что в первом приближении распределение скоростей не зависит от λ , причем $u \sim \ln(1 - \xi)$, $v \sim (1 - \xi)^{-1/2}$. В этом же приближении показатель экспоненты в (9) обращается в нуль, что эквивалентно пренебрежению диссипацией. Из (9) и (16) находим приближенно вид w

$$w \approx 1 + (1 - \xi) \ln(1 - \xi)$$

Нетрудно дать качественную характеристику течения во всей области. В результате осесимметричного растекания жидкости в окрестности оси горизонтальная скорость быстро падает. Вертикальная составляющая уменьшается медленнее (логарифмически), так что поток разворачивается по направлению к границе. Заметим, что положительная завихренность ω сначала резко возрастает за счет большого растяжения вихревых линий. Это способствует еще большему развороту потока (рост отрицательной завихренности привел бы к противоположному эффекту). Однако в дальнейшем по мере приближения к границе проходное сечение для нижележащих струй уменьшается, вследствие чего торможение сменяется ускорением, а поток разворачивается уже в горизонтальном направлении. Токовые поверхности, таким образом, должны иметь колоколообразную форму. На фигуре представлены результаты численного расчета функций f, f', w, ω для $f_1 = -0.03, \lambda = 10$.



До сих пор при анализе молчаливо подразумевалось существование решения. Оказывается, однако, что сформулированная задача корректна лишь при достаточно малых значениях произведения λf_1^2 . Чтобы показать это, оценим с помощью (12) величину f_1 . Вследствие положительности w при оценке интеграла можно заменить f_1 ее максимальным значением $2/3\sqrt{3}$. Учитывая затем неравенство Гельдера

$$\int_0^1 w(\xi) d\xi \leq \left(\int_0^1 w^3(\xi) d\xi \right)^{1/3}$$

а также (7) и (9), легко получить, что при $\lambda f_1^2 \geq (1/3\sqrt{3})^3$ автомодельного решения не существует. В аналогичных задачах для вязкой жидкости с иным автомодельным законом [2, 3] решения, наоборот, существуют лишь при достаточно малых числах Рейнольдса.

Рассмотрим кратко случай $w(1) = -1$. Согласно (12), для отрицательности f_1 необходимо, чтобы за присоединенной зоной находилась область, в которой $w > 0$. Произведение $f w^3$ по-прежнему знакопостоянно, но знаки f и w теперь всюду совпадают. Поэтому f обращается в нуль в точке ξ_* , где меняет знак w . Следовательно, в соответствии с (4) существует сепаратриса $\xi = \xi_*$, которая разделяет поток, создаваемый осевыми источниками, и вторичное течение в области $\xi < \xi_*$. Можно показать, что в окрестности ξ_* функции f, w описываются формулами типа (13), (14) с заменой ξ на $\xi - \xi_*$ и c_0 на $c_* = -f'(\xi_*)$, причем $c_* > 0$. В окрестности границы вторичное течение носит возвратный характер ($u < 0$).

Если на оси распределены стоки, анализ можно свести к предыдущему преобразованию $f \rightarrow -f, w \rightarrow -w, \lambda \rightarrow -\lambda$, оставляющим инвариантными уравнения задачи. Смена знака λ при противоположном направлении течения свидетельствует о том, что поток вихря в вихревой трубке, движущейся вместе с жидкостью, всегда диссипирует.

В заключение следует указать на принципиальную возможность экспериментальной реализации вихревых течений рассмотренного вида. Представим себе вместо нити источников вертикальную трубу с отверстиями в стенках. Сравнительно не-

сложно подобрать их диаметры и плотность таким образом, чтобы расход жидкости по высоте менялся в соответствии с требуемым автомодельным законом. Для изменения в определенных пределах потока вихря и, в частности, его знака можно воспользоваться тем обстоятельством, что величина и знак завихренности, порождаемой на входе в среду, зависят от угла входа. Таким образом, поток вихря в принципе можно варьировать, меняя наклон входных сечений пористых вставок, которые следует расположить в отверстиях трубы.

Поступила 18 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайсман А. М., Гольдштик М. А. Динамическая модель движения жидкости в пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 6.
2. Голубинский А. А., Сычев В. В. Об одном автомодельном решении уравнений Навье – Стокса. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 6.
3. Гольдштик М. А. Одно парадоксальное решение уравнений Навье – Стокса. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.

УДК 532.546

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О РАЗЛОЖЕНИИ ГИДРАТОВ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Н. Н. ВЕРИГИН, И. Л. ХАБИБУЛЛИН, Г. А. ХАЛИКОВ

(Москва, Уфа)

Получены автомодельные решения линеаризованных уравнений фильтрации газа в областях с подвижной границей раздела, описывающих разложение газовых гидратов при понижении давления.

При определенных термодинамических условиях компоненты природного газа в соединении с водой образуют так называемые газовые гидраты – твердые кристаллические соединения. В [1] показано, что ряд крупных газовых месторождений Крайнего Севера содержит газ в виде гидратов. Гидраты образуются и при эксплуатации газовых месторождений, в которых газ находится в условиях, близких к равновесным для гидратообразования [2]. Эффективная разработка подобных газогидратных и газовых месторождений предполагает перевод газа из твердого связанного состояния в свободное. Одним из методов разложения газовых гидратов является снижение давления в пористой среде ниже давления разложения при данной температуре [1].

В данной работе рассматривается линейная одномерная задача о разложении гидратов газа понижением давления в полубесконечном пласте. Большинство газогидратных месторождений характеризуются небольшими значениями пластового давления (меньше ста атмосфер) и температуры (263–285° К). Поэтому в первом приближении изменением температуры за счет дроссельного эффекта и зависимостью плотности газа от температуры можно пренебречь и рассматривать задачу в баротропном приближении.

Пусть в начальный момент времени в пористой среде находится газ в двухфазном состоянии при давлении p_e и температуре T ; при этом часть пор $m\beta$ занята гидратом, а часть $m(1-\beta)$ – свободным газом, здесь m – пористость, β – гидратонасыщенность пор. Заметим, что такая ситуация соответствует случаю недостатка воды в пласте для связывания свободного газа в гидрат. Если в некоторый момент времени давление в галерее (при $x=0$) мгновенно снижается до определенного значения $p_r < p_p < p_e$, где $p_p(T)$ – давление разложения гидрата при данной температуре, то в пласте образуются две области фильтрации газа с разными свойствами, разделенные подвижной границей разложения гидрата $l(t)$. При разложении гидрата выделяются газ и вода, но, как показано ниже, в некоторых случаях можно считать, что на подвижной границе с координатой $l(t)$ вода присоединяется к породе пласта и потому ее фазовая проницаемость равна нулю. При этом несколько уменьшаются пористость и фазовая проницаемость газа в первой области. Фильтрация газа происходит в направлении к галерее, а поверхность $l(t)$ движется в обратном направлении.