пластине является основным источником акустического излучения (в области сплошного шума) в сторону соплового блока. Для взаимодействия струи с пластиной в пределах начального газодинамического участка ($0.5<X<12$) получена количественная связь максимальных пульсаций давления на пластине ($L_{\Sigma M}$) с суммарным уровнем шума $L_\Sigma$ вдоль соплового блока: $L_\Sigma=[0.7L_{\Sigma M}-20\lg R/d_j+38]$ *дб*, где $R$ – расстояние от зоны максимальных пульсаций на пластине до точки замера во внешнем поле.

Поступила 10 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Губанова О. И., Лунев В. В., Пластинина Л. И.* О центральной срывной зоне при взаимодействии сверхзвуковой недорасширенной струи с преградой. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.
2. *Семилетенко Б. Г., Собколов Б. Н., Усков В. Н.* Особенности неустойчивого взаимодействия сверхзвуковой струи с безграничной преградой. Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1972, № 13, вып. 3.
3. *Купцов В. М.* Пульсации давления при взаимодействии дозвуковой струи и дозвукового участка сверхзвуковой струи с плоской преградой. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 5.
4. *Пшеничный В. Д., Яблоник Л. Р.* Спектральные характеристики пульсационного воздействия плоской турбулентной струи на твердую поверхность. ПМТФ, 1976, № 5.
5. *Пшеничный В. Д., Яблоник Л. Р.* Экспериментальное исследование пульсаций пристенного давления при натекании плоской турбулентной струи на поверхность. Инж. физ. ж., 1977, т. 32, № 1.
6. Preisser J. S., Block P. J. W. An experimental study of the aeroacoustics of a subsonic jet, impinging normal to a large rigid surface. AIAA paper, 1976, No 520.
7. *Ануфриев В. М., Комаров В. В., Купцов В. М., Мельников Д. А., Сергиенко А. А.* Дискретная составляющая в спектре шума сверхзвуковых струй. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
8. *Крашенинников С. Ю.* Исследование акустических и газодинамических характеристик сопел с центральным телом. Новое в зарубежном авиадвигателестроении. Обзор, 1976, № 5.
9. *Серов Ю. В., Соболев А. В.* Исследование пульсаций при взаимодействии перерасширенных струй с плоскими преградами. В сб.: «Аэрофизические исследования», вып. 3. Новосибирск, 1974.

---

УДК 532.516

# УСТОЙЧИВОСТЬ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

В. В. КОЛЕСОВ

*(Ростов-на-Дону)*

Изучается потеря устойчивости стационарного течения вязкой жидкости между двумя нагретыми вращающимися цилиндрами. Исследуется линеаризованная задача устойчивости в приближении Буссинеска. Возмущения предполагаются периодическими по времени, а также в аксиальном и азимутальном направлениях.

Численно рассчитаны нейтральные кривые. Найдены диапазоны изменения параметров задачи, в которых самыми опасными (в классе пространственно-периодических возмущений) являются возмущения, не обладающие вращательной симметрией.

**1. Постановка задачи.** Пусть вязкая однородная теплопроводная жидкость заполняет полость между двумя твердыми концентрическими цилиндрами с радиусами $R_1$, $R_2$ ($R_1<R_2$). Угловые скорости и температуры внутреннего и внешнего цилиндров обозначим соответственно $\Omega_1$, $\Theta_1$ и $\Omega_2$, $\Theta_2$.

Предположим, что внешние массовые силы отсутствуют и расход жидкости через поперечное сечение полости цилиндров равняется нулю. Тогда уравнения Навье – Стокса и уравнение теплопроводности допускают точное решение с вектором скорости $\mathbf{V}_0=\{v_{0r}, v_{0\varphi}, v_{0z}\}$, температурой $T_0$ и давлением $\Pi_0$ ($r$, $\varphi$, $z$ – безразмерные цилиндрические координаты)

$$\mathbf{V}_0=\{0, ar+b/r, 0\}, \qquad T_0=c\ln r+1$$

$$\Pi_0=\int_1^r\left(a+\frac{b}{\rho^2}\right)^2(1-\beta c\Theta_1\ln\rho)\,\rho\,d\rho+\text{const}\tag{1.1}$$

$$a=(\Omega R^2-1)/(R^2-1),\qquad b=1-a,\qquad c=(\Theta-1)/\ln R$$

Здесь $\beta$ – коэффициент теплового расширения жидкости, $R=R_2/R_1$, $\Omega=\Omega_2/\Omega_1$, $\Theta=\Theta_2/\Theta_1$.

Устойчивость течения (1.1) относительно трехмерных возмущений изучалась в работах [1, 2]. Рассматривался случай, когда цилиндры вращаются с одинаковыми угловыми скоростями ($\Omega=1$), и зазор между цилиндрами мал по сравнению с радиусом внутреннего цилиндра ($R\to1$).

В данной работе приводятся результаты расчета нейтральных кривых для различных значений отношения угловых скоростей цилиндров $\Omega$ без предположения о малости зазора между цилиндрами.

**2. Линеаризованная задача устойчивости.** Возмущенное течение представим в виде

$$\mathbf{V}'=\mathbf{V}_0+\mathbf{V},\qquad T'=T_0+cPT,\qquad \Pi'=\Pi_0+\Pi/\lambda$$

где $\lambda=\Omega_1R_1^2/\nu$ – число Рейнольдса, $P=\nu/\chi$ – число Прандтля, а $\nu$ и $\chi$ – соответственно коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности.

В приближении Буссинеска линеаризованная задача устойчивости имеет вид

$$\begin{gathered}
Av_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{\partial\Pi}{\partial r}=\lambda\,\text{Ra}\,\omega_2T-2\lambda\omega_1v_\varphi\\
Av_\varphi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}=-\lambda g_1v_r\\
\left(A+\frac{1}{r^2}\right)v_z-\frac{\partial\Pi}{\partial z}=0\\
BT=\lambda g_2v_r,\qquad \int_0^{2\pi}\int_1^R v_zr\,dr\,d\varphi=0\\
\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0\\
v_r=v_\varphi=v_z=T=0\qquad(r=1,\ r=R)
\end{gathered}\tag{2.1}$$

$$A\equiv\Delta-\frac{1}{r^2}-\lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}+\omega_1\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\qquad B\equiv\Delta-\lambda P\left(\frac{\partial}{\partial t}+\omega_1\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\qquad \omega_1=a+\frac{b}{r^2},\qquad \omega_2=\omega_1^2r,$$

$$g_1=-2a,\qquad g_2=\frac{1}{r}$$

Здесь $t$ – время, $\text{Ra}=\beta c\Theta_1P$ – число Рэлея.

Периодическое по переменным $t$, $\varphi$, $z$ решение задачи (2.1) ищем в виде

$$\frac{v_r}{u(r)}=\frac{v_\varphi}{v(r)}=\frac{v_z}{w(r)}=\frac{T}{\tau(r)}=\frac{\Pi}{q(r)}=e^{i(m\xi+\alpha z)}\tag{2.2}$$

где $\xi=\varphi-st$, $s$ – неизвестная циклическая частота, $m$, $\alpha$ – соответственно азимутальное и аксиальное волновые числа, $m^2+\alpha^2\neq0$, $\alpha\geqslant0$, $m=0,1,2,\ldots$ .

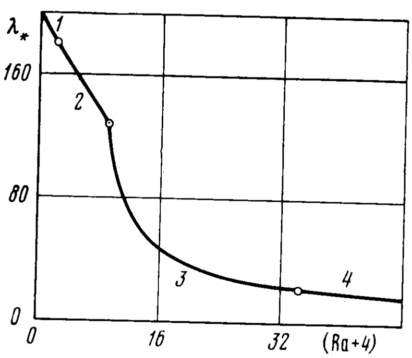
Подставляя (2.2) в (2.1), получаем спектральную задачу для определения критического значения числа Рейнольдса и соответствующего ему значения циклической частоты

$$\frac{dq}{dr}=2\lambda\omega_1v-\lambda\,\text{Ra}\,\omega_2\tau-\delta_1u-\frac{im}{r^2}\frac{d}{dr}(rv)-i\alpha\frac{dw}{dr}$$

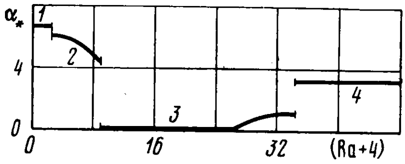
$$\frac{du}{dr}=-\frac{u}{r}-\frac{im}{r}v-i\alpha w$$

$$
\begin{aligned}
&(L-\delta_1)v=imq/r-(\lambda g_1+2im/r^2)u\\
&(L+1/r^2-\delta_1)w=i\alpha q, \qquad (L+1/r^2-\delta_2)\tau=\lambda g_2 u\\
&u=v=w=\tau=0 \qquad (r=1,\ r=R)\\
&\delta_1=m^2/r^2+\alpha^2-im\lambda(s-\omega_1), \qquad \delta_2=m^2/r^2+\alpha^2-im\lambda P(s-\omega_1)\\
&L\equiv\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

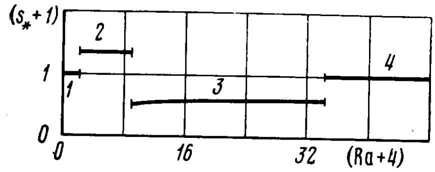
Критическое значение числа Рейнольдса, т. е. наименьшее положительное собственное число $\lambda_0$ задачи (2.3), зависит от волновых чисел $m$ и $\alpha$. Течение (1.1) существует при любом $\lambda$. Эксперименты, однако, показывают, что при переходе числа




Фиг. 1




Фиг. 2




Фиг. 3

Рейнольдса $\lambda$ через некоторое значение $\lambda_*$ течение (1.1) может потерять устойчивость с образованием либо вторичного стационарного течения, либо автоколебательного режима. Обычно в теории гидродинамической устойчивости предполагается, что

$$\lambda_*=\min_{m,\alpha}\lambda_0(m,\alpha)$$

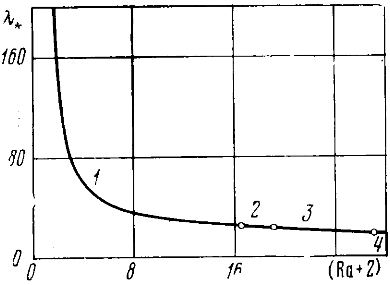
Впервые этот принцип был использован Рэлеем для задачи об исследовании свободной конвекции в слое жидкости [3]. Обоснование принципа Рэлея для широкого класса задач устойчивости движений сплошной среды дано в работах [4–6]. Значения $m_*$ и $\alpha_*$ волновых чисел $m$ и $\alpha$, доставляющие минимум функции $\lambda_0=\lambda_0(m,\alpha)$, называются рэлеевскими волновыми числами.

Вычисления показывают, что, как правило, для вращательно-симметричных возмущений ($m=0$) выполняется «принцип изменения устойчивости» и при потере устойчивости течения (1.1) возникает вторичное стационарное течение. Если же возмущения не обладают вращательной симметрией ($m\neq0$), то «принцип изменения устойчивости», вообще говоря, не выполняется, а в результате потери устойчивости течения (1.1) возникает автоколебательный режим. Поэтому большой интерес представляет нахождение диапазонов изменения параметров задачи, в которых самыми опасными (в классе пространственно-периодических возмущений) являются возмущения, не обладающие вращательной симметрией ($m_*\neq0$).

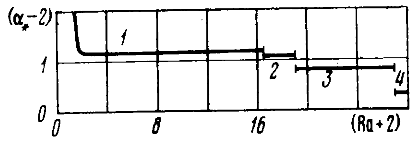
**3. Численные результаты.** Для отыскания критического значения $\lambda_0$ числа Рейнольдса $\lambda$ и соответствующего ему значения $s_0$ циклической частоты $s$ спектральная задача (2.3) сводилась к краевой задаче для восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с комплексными коэффициентами, которая решалась численно методом пристрелки. Для подавления быстрорастущих решений, возникающих при больших $\lambda_0$, использовался метод ортогонализации. При вычислениях проводилась численная минимизация $\lambda_0$ по волновым числам $m$ и $\alpha$.

Расчеты проводились для случая $R=2$ (радиус внешнего цилиндра в два раза больше радиуса внутреннего цилиндра) и $P=0.7$ (рабочая среда — воздух). Результаты вычислений представлены на фиг. 1–5.

На фиг. 1–3 изображены зависимости минимизированного критического значения числа Рейнольдса $\lambda_*$, рэлеевского аксиального волнового числа $\alpha_*$ и циклической частоты $s_*$ от числа Рэлея Ra для случая $\Omega=-0.8$ (цилиндры вращаются в разные стороны). Отрезки кривых, на которых рэлеевское азимутальное волновое число $m_*$ остается постоянным, обозначены на фиг. 1–3 цифрами *1–4*. На отрезках *1* и *4* $m_*=0$, а на отрезках *2* и *3* соответственно $m_*=1$ и 4. На нейтральной кривой $\lambda_*=\lambda_*(\mathrm{Ra})$ отмечены точки, в которых одинаково опасными являются возмущения с различными азимутальными волновыми числами, т. е. точки, в которых у функции $\lambda_0=\lambda_0(m,\alpha)$ имеются два глобальных минимума. В этих точках функции $s_*=s_*(\mathrm{Ra})$ и $\alpha_*=\alpha_*(\mathrm{Ra})$ претерпевают разрыв. Если число Рэлея $\mathrm{Ra}>0$ достаточно велико (температура внешнего цилиндра значительно превышает температуру внутреннего цилиндра), то самыми опасными являются вращательно-симметричные возмущения ($m_*=0$) и при переходе числа Рейнольдса $\lambda$ через критическое значение $\lambda_*$ возникает вторичное стационарное течение. Уменьшение Ra приводит к тому, что самы-




Фиг. 4




Фиг. 5

ми опасными становятся возмущения, не обладающие вращательной симметрией ($m_*\neq0$); сначала трехмерные ($m_*=4$, $\alpha_*\neq0$), затем плоские ($m_*=4$, $\alpha_*=0$) и далее опять трехмерные ($m_*=1$, $\alpha_*\neq0$). Соответственно при $\lambda>\lambda_*$ будут возникать автоколебательные режимы: трехмерный $\pi/2$ – периодический в азимутальном направлении, плоский $\pi/2$ – периодический и трехмерный $2\pi$ – периодический. И наконец, если число Рэлея Ra отрицательно и достаточно велико по абсолютной величине, то самыми опасными опять становятся вращательно-симметричные возмущения.

Зависимости $\lambda_*=\lambda_*(\mathrm{Ra})$ и $\alpha_*=\alpha_*(\mathrm{Ra})$ для случая $\Omega=0.2$ (цилиндры вращаются в одну сторону) представлены на фиг. 4, 5. Отрезки кривых, на которых $m_*$ принимает значения 0, 1, 2, 3, обозначены соответственно цифрами *1–4*. Заметим, что в случае $\Omega=0.2$ циклическая частота $s_*$ при $m_*\neq0$ меняется с изменением Ra весьма незначительно и можно считать, что $s_*\approx0.44$. Если же $m=0$, то $s_*=0$, т. е. выполняется «принцип изменения устойчивости».

Автор благодарит В. И. Юдовича за постоянное внимание к работе.

Поступила 16 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шайдуров Г. Ф., Шлиомис М. И., Ястребов Г. В.* Конвективная неустойчивость вращающейся жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
2. *Хаит В. Д.* О тепловой неустойчивости жидкости в поле центробежных сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
3. *Rayleigh.* On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. Cambridge Univ. Press, Sci. Papers, 1916, No. 6.
4. *Есипов А. А., Юдович В. И.* Принцип Рэлея и задача о возникновении конвекции в длинных цилиндрах. Всес. конф. «Современные проблемы тепловой гравитационной конвекции». Тез. докл. Минск, ИТМО АН БССР, 1971.
5. *Есипов А. А., Юдович В. И.* Предельное поведение собственных значений краевых задач в неограниченно расширяющихся областях. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 2.
6. *Есипов А. А., Юдович В. И.* Асимптотика собственных значений первой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения на длинном отрезке. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 2.