МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1980

УДК 532.51.031

ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНЫ ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ НЕВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. В. КУЗНЕЦОВ, А. Г. ТЕРЕНТЬЕВ

(Чебоксары)

Рассматривается нелинейная задача о безотрывном обтекании потоком идеальной невесомой жидкости пластины вблизи свободной поверхности. Эта задача впервые была поставлена в монографии М. И. Гуревича [1]. В настоящее время имеются лишь общее решение задачи [2–4] и некоторые числовые расчеты [5], которые выполнены при определенных ограничениях и недостаточны для подробной информации о взаимодействии свободной поверхности и пластины.

Ниже дано полное исследование задачи: получены удобные расчетные формулы и их асимптотические разложения, проведены подробные вычисления для любых погружений пластины.

1. Пусть пластина OB обтекается потоком идеальной невесомой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью. Пластина и вектор скорости набегающего потока составляют между собой угол α. Величина скорости на свободной поверхности постоянна и равна v_0. Начало координат совмещается с передней кромкой пластины; ось абсцисс сонаправлена с вектором скорости набегающего потока (фиг. 1).

Для решения гидродинамической задачи отобразим область течения в физической плоскости $z=x+iy$ на внутренность прямоугольника с вершинами 0, π, $\pi+\pi\tau/4$, $\pi\tau/4$ вспомогательной плоскости $u=\xi+i\eta$. Соответствующие точки на фиг. 1 обозначены одинаковыми буквами. В плоскости u нетрудно представить по особенностям комплексно-сопряженную скорость dW/dz и производную от комплексного потенциала dW/du как функции переменного u.

Функция скорости dW/dz принимает равные значения на вертикальных сторонах прямоугольника, соответствующих берегам разреза в плоскости z; на интервале $(a,\ b)$ нижней стороны прямоугольника $\arg(dW/dz)=\alpha-\pi$; на смежном интервале $\arg(dW/dz)=\alpha$; на верхней стороне $|dW/dz|=v_0$. Продолжая функцию dW/dz по принципу симметрии через стороны прямоугольника на всю плоскость u, убеждаемся, что эта функция является эллиптической и в фундаментальном прямоугольнике с вершинами 0, π, $\pi+\pi\tau$, $\pi\tau$ имеет простой полюс в точке $u=b$ и нуль в точке $u=a$, соответственно простой нуль и полюс в симметричных точках $b+\pi\tau/2$, $a+\pi\tau/2$. Следовательно

$$\frac{dW}{dz}=v_0e^{\alpha i}\frac{\vartheta_1(u-a)\vartheta_4(u-b)}{\vartheta_4(u-a)\vartheta_1(u-b)} \tag{1.1}$$

где постоянный множитель $v_0e^{\alpha i}$ выбран для удовлетворения граничных условий на сторонах прямоугольника. Заметим, что в [2–4] рассматривали параметрический прямоугольник с другим соотношением сторон и отыскивали функцию $\ln(dW/dz)$.

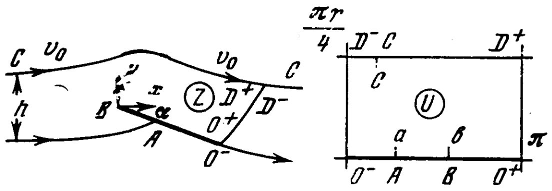
Производную dW/du, принимающую чисто действительные значения на горизонтальных сторонах прямоугольника, обращающуюся в нуль в точках 0 и a и имеющую полюс второго порядка в точке $u=c+\pi\tau/4$, проще всего выразить в виде линейной комбинации от логарифмических производных ϑ-функций [6]

$$\frac{dW}{du}=-A\left\{\frac{d^2}{du^2}\ln\left[\vartheta_4\left(u-c+\frac{\pi\tau}{4}\right)\vartheta_4\left(u-c-\frac{\pi\tau}{4}\right)\right]+B\right\} \tag{1.2}$$

$$B=\frac{d^2}{dc^2}\ln\left[\vartheta_4\left(c+\frac{\pi\tau}{4}\right)\vartheta_4\left(c-\frac{\pi\tau}{4}\right)\right],\qquad a=2c \tag{1.3}$$

Соотношения (1.3) получены из условий равенства нулю функции dW/du в точках $u=0$ и $u=a$.

Отображающая функция $z(u)$ может быть найдена из уравнения $dz/du=(dW/du)/(dW/dz)$. Нетрудно убедиться, что производная dz/du является эллиптической функцией с периодами π и $\pi\tau$, главная часть которой определяется с по-



Фиг. 1

мощью (1.1) и (1.2). Представим производную dz/du в виде линейной комбинации от логарифмических производных ϑ-функций. Проинтегрировав ее, найдем

$$z(u)=\frac{A}{v_0}e^{-\alpha i}[f(u)-f(b)] \tag{1.4}$$

$$f(u)=-e^{\alpha i}\frac{d}{du}\ln\vartheta_4\left(u-c+\frac{\pi\tau}{4}\right)-e^{-\alpha i}\frac{d}{du}\ln\vartheta_4\left(u-c-\frac{\pi\tau}{4}\right)+ \tag{1.5}$$
$$+ik\left[e^{\alpha i}\ln\vartheta_4\left(u-c+\frac{\pi\tau}{4}\right)-e^{-\alpha i}\ln\vartheta_4\left(u-c-\frac{\pi\tau}{4}\right)\right]+$$
$$+2k\sin\alpha\ln\vartheta_4(u-b)$$

$$k=2\,\mathrm{Im}\frac{d}{dc}\ln\frac{\vartheta_4(c-a+\pi\tau/4)}{\vartheta_4(c-b+\pi\tau/4)} \tag{1.6}$$

Для определения параметров b, c, $|\tau|$ и A, входящих в решение задачи, воспользуемся следующими условиями:

$$\left(\frac{df}{du}\right)_{u=b}=0,\qquad l=\frac{A}{v_0}[f(0)-f(b)],\qquad h=\frac{A}{v_0}\left(1+\frac{\pi|\tau|}{4}B\right) \tag{1.7}$$

$$2\arg\vartheta_4\left(c-b+\frac{\pi\tau}{4}\right)-2\arg\vartheta_4\left(c-a+\frac{\pi\tau}{4}\right)+a-b+\alpha=0 \tag{1.8}$$

Здесь l — длина пластины, h — глубина погружения, равная расстоянию между свободной поверхностью и разделяющейся линией тока на бесконечности, а (1.8) является условием для направления вектора скорости потока на бесконечности.

Путем предельного перехода от жидкости конечной глубины с прямолинейным дном к жидкости бесконечной глубины нетрудно убедиться, что любой твердый контур, в том числе и пластина, под свободной поверхностью не будет испытывать сопротивление.

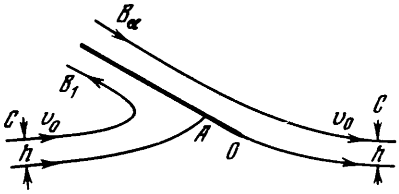
Коэффициенты подъемной силы и момента результирующей силы относительно передней кромки определяются выражениями

$$C_Y=\frac{2Y}{\rho v_0^2 l}=\frac{2\pi kA}{lv_0} \tag{1.9}$$

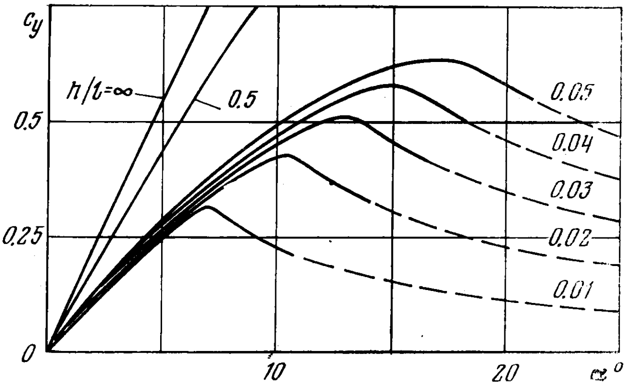
$$C_M=\frac{2M}{\rho v_0^2 l^2}=\frac{1}{v_0^2l^2}\mathrm{Re}\int_0^\pi\frac{dW}{du}\frac{dW}{dz}z(u)\,du \tag{1.10}$$

2. Для больших значений $|\tau|$ из (1.6)–(1.8) получаются следующие асимптотические разложения по степеням параметра $\sqrt{q}=\exp(-\pi|\tau|/2)\ll 1$:

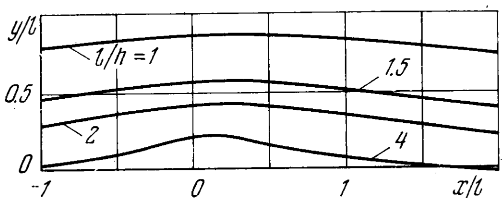
$$k=8\sqrt{q}\sin\alpha,\qquad a=\frac{\pi}{2}-\alpha-2\sqrt{q}\cos\alpha(1-4\sqrt{q}\sin\alpha) \tag{2.1}$$
$$b=\frac{\pi}{2}-2\sqrt{q}\cos\alpha(1-2\sqrt{q}\sin\alpha),\qquad l=8\frac{A}{v_0}\sqrt{q}(1+4\sqrt{q}\sin\alpha)$$
$$h=\frac{A}{v_0}[1-4\sqrt{q}\sin\alpha\ln\sqrt{q}(1+2\sqrt{q}\sin\alpha)]$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Из последних двух соотношений следует, что большим значениям $|\tau|$ отвечают большие значения относительного погружения $h'=h/l$.

С помощью разложений (2.1) из (1.9) и (1.10) определяются асимптотические формулы для коэффициентов подъемной силы и момента

$$C_Y = 2\pi \sin\alpha \left(1-\frac{1}{2h'}\sin\alpha\right), \quad C_M = \frac{\pi}{2}\sin\alpha\cos\alpha\left(1-\frac{1}{2h'}\sin\alpha\right) \tag{2.2}$$

При $h'\to\infty$ из (2.2) получаем известные результаты для пластины в безграничном потоке.

3. Особый интерес представляют асимптотические формулы для малых относительных погружений h'. Для этого во всех формулах, входящих в общее решение задачи, необходимо совершить мнимое преобразование Якоби $\tau=-1/\tau'$ и перейти к пределу при $|\tau'|\to\infty$. Из (1.7) можно обнаружить, что $h'\sim 1/|\tau'|$. Опуская промежуточные преобразования, приведем окончательные формулы, получаемые из (1.1)–(1.3), (1.6)–(1.8)

$$\frac{dW}{dz} = v_0 e^{(\alpha-\pi)i}\,\mathrm{th}\,(u'-a'), \qquad u'=\frac{u}{|\tau|}, \qquad a'=\frac{a}{|\tau|} \tag{3.1}$$

$$\frac{dW}{du'}=\frac{4A\sin^2\alpha}{|\tau|}\frac{\operatorname{sh}2u'\operatorname{sh}2(u'-a')}{\operatorname{ch}^2(2u'-a')} \tag{3.2}$$

$$k=\frac{2}{|\tau|}\sin\alpha,\qquad \frac{A}{v_0}=\frac{h|\tau|}{\pi\sin^2\alpha},\qquad \frac{a}{|\tau|}=\ln\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \tag{3.3}$$

Подставляя k и A из (3.3) в (1.9), находим

$$C_Y=4h'/\sin\alpha \tag{3.4}$$

Формулы (3.1) – (3.4) справедливы асимптотически при

$$h'<(\pi/4)\sin^2\alpha \tag{3.5}$$

Заметим, что при $|\tau|\to0$ область изменения параметрической переменной $u/|\tau|$, отвечающая области течения в физической плоскости z, вырождается в горизонтальную полосу шириной $\pi/4$. В отличие от известной постановки задачи о глиссировании [1] по принятой схеме течения при $|\tau|\to0$ (фиг. 2) жидкость, уходящая вперед вдоль нижней стороны пластины, снова возвращается по ее верхней стороне, и на передней кромке B, в бесконечности, возникает подсасывающая сила.

4. Решение задачи значительно упрощается, если рассмотреть обтекание пластины при малых углах атаки (линейная теория). Сохраняя в (1.3), (1.6) – (1.8) члены порядка малости α, получаем следующую систему уравнений относительно неизвестных параметров c и $|\tau|$:

$$\begin{gathered}2\frac{d}{dc}\ln\left[\vartheta_4\left(c+\frac{\pi\tau}{4}\right)\vartheta_4\left(c-\frac{\pi\tau}{4}\right)\right]=\frac{1}{h'},\\ \frac{d^2}{dc^2}\ln\left[\vartheta_4\left(c+\frac{\pi\tau}{4}\right)\vartheta_4\left(c-\frac{\pi\tau}{4}\right)\right]=0\end{gathered} \tag{4.1}$$

С помощью тождества

$$\frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}\left(u+\frac{\pi\tau}{4}\middle|\tau\right)+\frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}\left(u-\frac{\pi\tau}{4}\middle|\tau\right)=\frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}\left(u\middle|\frac{\tau}{2}\right)$$

уравнения (4.1) преобразуются к виду, более удобному для вычислений

$$2\frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}\left(c\middle|\frac{\tau}{2}\right)=\frac{1}{h'},\qquad \frac{d}{dc}\frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}\left(c\middle|\frac{\tau}{2}\right)=0 \tag{4.2}$$

После преобразований из (1.9) и (1.10) можно найти

$$\begin{gathered}C_Y=2\pi\alpha h'\left[\frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}\left(c\middle|\frac{\tau}{2}\right)-\frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}\left(c\middle|\frac{\tau}{2}\right)\right]\\ C_M=\frac{1}{2}C_Y-\pi\alpha(h')^2\frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\left(c\middle|\frac{\tau}{2}\right)\frac{d^2}{dc^2}\frac{\vartheta_3}{\vartheta_4}\left(c\middle|\frac{\tau}{2}\right).\end{gathered} \tag{4.3}$$

При $|\tau|\to0$ из (4.2) и (4.3) следуют асимптотические формулы

$$\begin{gathered}|\tau|=2h',\qquad c=h'\ln\frac{\pi}{h'},\qquad C_Y=\pi\alpha\left(1+\frac{h'}{\pi}\ln\frac{\pi}{h'}\right),\\ C_M=\frac{\pi}{4}\alpha\left(1+4\frac{h'}{\pi}\right)\end{gathered} \tag{4.4}$$

Формулы (4.4) получены в рамках линейной теории и справедливы при условии $\alpha<h'$.

5. Результаты числовых расчетов, выполненных по формулам (1.1) – (1.10), представлены ниже. На фиг. 3 показана зависимость коэффициента подъемной силы C_Y от угла атаки α и относительной глубины погружения h'. Пунктирные кривые рассчитаны по асимптотической формуле (3.4). Из фиг. 3 и формулы (3.4) следует

h/l	$\alpha°=0$	2	5	10	15	20
			$C_y/(2\pi \sin\alpha)$			
0.1	0.6164	0.5918	0.5558	0.4978	0.4412	0.3842
0.2	0.6963	0.6714	0.6351	0.5777	0.5234	0.4718
0.3	0.7621	0.7370	0.7005	0.6430	0.5891	0.5384
0.4	0.8144	0.7898	0.7540	0.6972	0.6440	0.5941
0.5	0.8545	0.8309	0.7965	0.7415	0.6897	0.6411
0.6	0.8845	0.8624	0.8298	0.7774	0.7277	0.6807
0.7	0.9070	0.8865	0.8560	0.8066	0.7592	0.7144
0.8	0.9241	0.9050	0.8767	0.8303	0.7854	0.7425
0.9	0.9371	0.9195	0.8931	0.8497	0.8074	0.7667
1.0	0.9473	0.9309	0.9064	0.8658	0.8260	0.7874
2.0	0.9850	0.9762	0.9628	0.9400	0.9168	0.8937
∞	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
			d/l			
0.1	0.2253	0.2308	0.2404	0.2612	0.2901	0.3322
0.2	0.2213	0.2246	0.2304	0.2428	0.2593	0.2806
0.3	0.2239	0.2258	0.2295	0.2375	0.2483	0.2622
0.4	0.2283	0.2294	0.2317	0.2370	0.2445	0.2542
0.5	0.2324	0.2330	0.2345	0.2382	0.2435	0.2505
0.6	0.2358	0.2362	0.2371	0.2397	0.2436	0.2489
0.7	0.2385	0.2387	0.2393	0.2411	0.2441	0.2481
0.8	0.2405	0.2407	0.2411	0.2424	0.2447	0.2479
0.9	0.2421	0.2422	0.2425	0.2435	0.2453	0.2478
1.0	0.2434	0.2434	0.2436	0.2444	0.2458	0.2479
2.0	0.2481	0.2481	0.2481	0.2482	0.2485	0.2490
∞	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500

любопытный факт, что начиная с некоторых значений α с увеличением угла атаки подъемная сила уменьшается.

В таблице представлены числовые данные для величины $C_Y/2\pi \sin\alpha$ и относительного расстояния центра давления от передней кромки пластины $d/l=C_M/C_Y \cos\alpha$ в зависимости от угла атаки и относительной глубины погружения h'. Результаты для $\alpha\to 0$ получены по формулам (4.2) и (4.3). При $h'=0$ для всех $\alpha\neq 0$ из (3.4) следует $C_Y=0$. Поскольку центр давления при $l\to\infty$ удаляется от задней кромки на расстояние h, то при $h'\to 0$ относительное расстояние $d/l\to 1$.

На фиг. 4 изображена форма свободной поверхности при $\alpha=10°$ и четырех значениях относительной глубины h'. На бесконечности $(x/l\to\pm\infty)$, как это нетрудно показать, ордината точек свободной поверхности $y/l\approx-(C_Y \ln|x/l|)/2\pi$, т. е. свободная поверхность при $\alpha>0$ опускается бесконечно низко. Аналогичный вывод из других соображений был сделан ранее в работе [3].

Поступила 10 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
2. *Эпштейн Л. А.* Движение наклонной пластинки под свободной поверхностью. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
3. *Кузнецов А. В.* Обтекание пластины потоком невесомой жидкости со свободной границей. ПМТФ, 1963, № 6.
4. *Галанин А. В., Салихов Н. Ф.* О задаче безотрывного обтекания пластинки струей жидкости, вытекающей из прямолинейного канала. Труды Семинара по краевым задачам, вып. 5. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1968.
5. *Кузнецов А. В., Спиридонова Т. Г.* К задаче обтекания пластинки потоком невесомой жидкости со свободной границей. Тр. Семинара по обратным краевым задачам. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1964, вып. 2.
6. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. М., Физматгиз, 1963.