

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОЙ КОНВЕКТИВНОЙ
ФИЛЬТРАЦИИ СМЕСИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ ПОРИСТОМ СЛОЕ

Г. З. ГЕРШУНИ, Е. М. ЖУХОВИЦКИЙ, Д. В. ЛЮБИМОВ

(Пермь)

В отличие от соответствующего вязкого течения конвективная фильтрация однородной жидкости в плоском вертикальном слое, границы которого поддерживаются при разных температурах, устойчива [1]. В том случае, когда пористый слой насыщен бинарной смесью, при наличии потенциально устойчивой стратификации следует ожидать проявления неустойчивости термоконцентрационной природы. Термоконцентрационный механизм неустойчивости связан с различием времен релаксации температуры и концентрации; это различие приводит к возникновению подъемной силы при горизонтальном смещении элемента жидкости. В вязких бинарных смесях термоконцентрационная неустойчивость служит причиной образования слоистых течений, которые интенсивно изучаются в последние годы [2-4]. Конвективная неустойчивость равновесия бинарной смеси в пористой среде рассмотрена авторами ранее [5]. В данной работе рассматривается устойчивость стационарной конвективной фильтрации бинарной смеси в плоском вертикальном слое. Показывается, что при наличии достаточной продольной стратификации течение становится неустойчивым относительно термоконцентрационных возмущений; определяется граница устойчивости в зависимости от параметров задачи.

1. Основные уравнения. Рассмотрим плоский вертикальный пористый слой, ограниченный непроницаемыми плоскостями $x = \pm h$, на которых поддерживаются постоянные разные температуры $\pm \Theta$. Слой насыщен бинарной смесью. В основном состоянии имеет место потенциально устойчивая стратификация: вертикальный градиент концентрации более легкой компоненты C направлен вверх. При таких условиях равновесие невозможно, и при сколь угодно малой поперечной разности температур 2Θ возникает фильтрационное течение. Для его описания воспользуемся уравнениями конвективной фильтрации, записанными в приближениях Буссинеска.

Пусть T и C — температура и концентрация, отсчитываемые от некоторых постоянных значений. Считаем, что плотность зависит только от T и C и эта зависимость линейна

$$(1.1) \quad \rho = \rho_0(1 - \beta_1 T - \beta_2 C) \\ \rho_0 = \rho(0, 0); \quad \beta_1 = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, C}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{p, T}$$

С учетом (1.1) и закона сопротивления Дарси уравнения конвективной фильтрации запишутся в виде

$$(1.2) \quad -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{\nu}{K} \mathbf{u} + g(\beta_1 T + \beta_2 C) \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \\ b \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla T = \chi \Delta T, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u} \nabla C = D \Delta C$$

Здесь \mathbf{u} — скорость фильтрации, p — конвективное давление, g — уско- рение силы тяжести, $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор по вертикали вверх, ν — кине-

матическая вязкость смеси, K — проницаемость, ε — пористость, $b = (\rho C_p)_c / (\rho C_p)_f$ — отношение теплоемкостей насыщенной пористой среды (индекс c) и жидкости (индекс f), D и $\chi = \kappa_c / (\rho C_p)_f$ — эффективные коэффициенты диффузии и температуропроводности.

Выберем систему координат следующим образом. Начало поместим в центре слоя, ось x направим горизонтально, перпендикулярно стенкам, ось z — вертикально вверх. Условия непроницаемости и изотермичности стенок, а также отсутствия на них потока вещества примеси запишутся так:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} x=h: \quad u_x=0, \quad \partial C/\partial x=0, \quad T=\Theta \\ x=-h: \quad u_x=0, \quad \partial C/\partial x=0, \quad T=-\Theta \end{aligned}$$

К этим граничным условиям следует еще добавить два интегральных условия, выражающих замкнутость потока и постоянство продольного градиента концентрации A

$$(1.4) \quad \int_{-h}^h u_z dx = 0, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{\partial C}{\partial z} dz = A$$

Перейдем к безразмерным переменным. Пусть: h — расстояние, bh^2/χ — время, $g\beta_1\Theta K/\nu$ — скорость, Θ — температура, $\beta_1\Theta(gAh^2K/\nu\varepsilon D\beta_2)^{1/2}$ — концентрация, $\rho_0 g\beta_1\Theta h$ — давление.

Тогда задача (1.2) — (1.4) запишется в безразмерном виде

$$(1.5) \quad \begin{aligned} -\nabla p - \mathbf{u} + (T + rC)\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + R\mathbf{u}\nabla T = \Delta T, \quad P \frac{\partial C}{\partial t} + RN\mathbf{u}\nabla C = \Delta C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=1: \quad u_x=0, \quad \partial C/\partial x=0, \quad T=1 \\ x=-1: \quad u_x=0, \quad \partial C/\partial x=0, \quad T=-1 \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 u_z dx = 0, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{\partial C}{\partial z} dz = \frac{r}{RN}$$

$$R = \frac{g\beta_1 h \Theta K}{\nu \chi}, \quad R_d = r^2 = \frac{g\beta_2 A K h^2}{\varepsilon \nu D}, \quad N = \frac{\chi}{\varepsilon D}, \quad P = \frac{\chi}{bD}$$

Задача (1.5) содержит четыре безразмерных параметра: число Рэлея R , определяющее поперечную разность температур; концентрационное число Рэлея R_d , определяющее вертикальную стратификацию; два параметра среды — N и P .

2. Стационарный режим. Поставленная задача имеет стационарное решение, описывающее плоскопараллельную фильтрацию в удаленной от концов части достаточно длинного канала. В этом режиме течения $u_x = u_y = 0$, $u_z = u_0(x)$, $T = T_0(x)$, $C = C_0(x) + (r/RN)z$ и $p = p_0(z)$. Соответствующие профили таковы:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} T_0 = x, \quad u_0 = \frac{\operatorname{sh} rx}{r \operatorname{ch} r}, \quad C_0 = \frac{\operatorname{sh} rx}{r^2 \operatorname{ch} r} - \frac{x}{r} \\ p_0 = \frac{r^2}{RN} z^2 + \operatorname{const} \end{aligned}$$

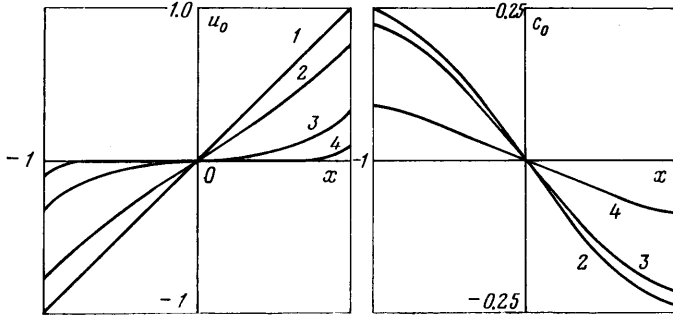
Профили u_0 и C_0 для некоторых значений $R_d = r^2$ приведены на фиг. 1; кривым 1–4 соответствуют $R_d = 0, 1, 10, 100$. При отсутствии стратифика-

ции ($r \rightarrow 0$) из (2.1) получаются соответствующие профили для плоскопараллельной конвективной фильтрации однородной жидкости

$$(2.2) \quad T_0 = x, \quad u_0 = x, \quad C_0 = 0, \quad \rho_0 = \text{const}$$

Устойчивость этого течения доказана в [1].

Наличие продольной стратификации, как видно из (2.1) и фиг. 1, приводит к замедлению течения. При больших r встречные потоки сосредоточены в «разомкнутых» пограничных слоях около стенок (безразмерная



Фиг. 1

толщина пограничного слоя порядка r^{-1}), а в центральной части сечения скорость мала. Соответственно мал и горизонтальный градиент плотности: из (1.1) следует (x — безразмерная поперечная координата)

$$(2.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho_0 \beta_1 \Theta \frac{\text{ch } rx}{\text{ch } r}$$

Отсюда видно, что при больших r горизонтальный градиент плотности в центральной части сечения экспоненциально мал; противоположно направленные горизонтальные градиенты температуры и концентрации приводят к взаимно компенсирующимся градиентам плотности. В пределе в центральной части слоя имеется практически неподвижная среда, устойчиво стратифицированная по вертикали в меру градиента концентрации A (т. е. параметра r).

3. Уравнения возмущений. Для исследования устойчивости основного стационарного режима (2.1) рассмотрим малые возмущения. Считая возмущения плоскими, введем функцию тока ψ , связанную с компонентами скорости соотношениями $u_x = -\partial \psi / \partial z$, $u_z = \partial \psi / \partial x$. Линеаризуя уравнения (1.5) около основного решения (2.1) и полагая все возмущения зависящими от времени и продольной координаты по закону $\exp(-\sigma t + ikz)$ (k — действительное волновое число, σ — декремент), получим систему однородных амплитудных уравнений (штрих означает дифференцирование по x) с однородными граничными условиями

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \psi'' - k^2 \psi &= T' + rC' \\ -\sigma T + ikR(u_0 T - T_0' \psi) &= T'' - k^2 T \\ -\sigma PC + ikRN(u_0 C - C_0' \psi) + r\psi' &= C'' - k^2 C \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad x = \pm 1: \quad \psi = T = C' = 0$$

Спектральная задача (3.1), (3.2) определяет характеристические возмущения основного режима и их декременты. Граница устойчивости находится из условия обращения в нуль действительной части декремента

Re $\sigma=0$. Отсюда можно найти критическое число Рэлея R как функцию волнового числа k и остальных параметров — R_d , N и P . Легко видеть, что в случае неустойчивости «монотонного» типа ($\text{Im } \sigma=0$) P не входит в число параметров, определяющих положение границы устойчивости.

В полной постановке задача (3.1), (3.2) решалась численно. Предварительно рассмотрим два предельных случая, позволяющих получить аналитическое решение.

4. Сильная стратификация. Как уже указывалось в п. 2, при увеличении продольного градиента концентрации скорость основного течения уменьшается, и в средней части слоя формируется практически неподвижное устойчиво стратифицированное ядро. Таким образом, задача об устойчивости в предельном случае больших r сводится к задаче об устойчивости равновесия плоского вертикального слоя при наличии потенциально устойчивой стратификации и бокового нагрева, причем горизонтальные градиенты температуры и концентрации согласованы между собой так, что плотность не зависит от горизонтальной координаты. Такая задача решена авторами ранее [5].

В предельном случае больших R_d неустойчивость равновесия связана с развитием коротковолновых возмущений ($k \gg 1$; длина волны много меньше ширины слоя). Проведенное в [5] рассмотрение этого предельного случая показывает, что, вообще говоря, возможны две моды неустойчивости — монотонная и колебательная.

Граница устойчивости относительно монотонных возмущений определяется критическим числом Рэлея R_1 ; минимизация по волновому числу дает минимальное R_{1m} и волновое число наиболее опасных возмущений k_{1m}

$$(4.1) \quad R_{1m} = \frac{2\sqrt{\pi}}{|N-1|} R_d^{3/4}, \quad k_{1m} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_d^{1/4}$$

Граница колебательной неустойчивости определяется критическим числом R_2 , которое находится из уравнения

$$(4.2) \quad p\bar{R}_2^4 + q\bar{R}_2^2 + s = 0, \quad p = k^4(N-P)^3(1-N) \\ q = \pi^2 k^2(N-P)(2N-P-1) + 2k^6[(N-P)^2(P+2) - \\ - 2(N-P)(1-N)(2P+1) - P(1-N)^2] \\ s = -\pi^2[\pi^2 + 4(P+1)k^4]^2, \quad k^2 = k^2 R_d^{-1/2}, \quad \bar{R}_2 = R_2 R_d^{-1/4}$$

Минимизация R_2 по k позволяет определить критические параметры колебательной неустойчивости $R_{2m}(R_d, N, P)$ и $k_{2m}(R_d, N, P)$. Из (4.2) видно, что в области больших R_d имеет место та же асимптотика, что и в случае монотонной неустойчивости (см. (4.1)), а именно $R_{2m} \sim R_d^{3/4}$ и $k_{2m} \sim R_d^{1/4}$.

В зависимости от соотношения параметров P и N неустойчивость обусловлена либо монотонными, либо колебательными возмущениями. Результаты анализа приведены в [5]. В частности, оказывается, что в жидких растворах, где N и P достаточно велики и одного порядка величины (в водных растворах $N \sim P \sim 10^3$), неустойчивость связана с монотонными возмущениями и определяется формулами (4.1).

5. Длинноволновая неустойчивость. При наличии сильной стратификации неустойчивость связана с коротковолновыми возмущениями; спектр возмущений в этом предельном случае практически не зависит от граничных условий. При уменьшении параметра стратификации длина волны

опасных возмущений растет; соответственно спектр становится чувствительным к граничным условиям. Отсутствие диффузионного потока на стенке (последнее из условий (3.2)) приводит к тому, что развивающиеся в пристеночном слое возмущения имеют большой характерный масштаб в продольном направлении. Поэтому при конечных значениях параметра стратификации можно ожидать, что существенную роль в механизме неустойчивости играют длинноволновые возмущения. Для выяснения структуры спектра в этом предельном случае можно применить метод возмущений, основанный на введении малого параметра — волнового числа k .

Полагая в (3.1) $k=0$, получим

$$(5.1) \quad \psi'' = T' + rC', \quad T'' + \sigma T = 0, \quad C'' + \sigma PC = r\psi'$$

Вместе с граничными условиями (3.2) эта система определяет спектр декрементов и возмущений. Непосредственно видно, что решения делятся на две группы — с возмущениями температуры, отличными от нуля и равными нулю («температурные» и «концентрационные» возмущения). Декременты соответственно даются формулами

$$\sigma_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\sigma_d = \frac{1}{P} \left[R_d + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \right], \quad n=1, 2, \dots$$

Кроме того, в спектре концентрационных возмущений имеется особый (нейтральный) уровень $\sigma_0=0$, которому отвечает возмущение простой структуры

$$\psi=0, \quad T=0, \quad C=\text{const}$$

Легко получить также точное решение задачи о спектре возмущений в предельном случае $R=0$ (отсутствует поперечная разность температур). Декременты возмущений обоих типов теперь равны

$$\sigma_n = (n\pi/2)^2 + k^2, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\sigma_d = \frac{[(n\pi/2)^2 + k^2]^2 + (n\pi/2)^2 R_d}{P[(n\pi/2)^2 + k^2]}, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\sigma_0 = k^2/P$$

Особый уровень теперь не является нейтральным; ему отвечают (при $k \neq 0$) затухающие возмущения. Таким образом, при малых k и R в спектре нет нарастающих возмущений.

Исследуем теперь спектр возмущений в области малых k и конечных R . Представим решение спектральной задачи (3.1), (3.2) в виде разложений по степеням волнового числа. Поскольку ожидается, что неустойчивость связана с особым уровнем σ_0 , эти разложения запишем в виде

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \psi &= \psi^{(1)}k + \psi^{(2)}k^2 + \dots, & T &= T^{(1)}k + T^{(2)}k^2 + \dots \\ C &= C^{(0)} + C^{(1)}k + C^{(2)}k^2 + \dots, & \sigma &= \sigma^{(1)}k + \sigma^{(2)}k^2 + \dots \end{aligned}$$

Подставляя разложения в (3.1), получим системы уравнений для амплитуд в последовательных порядках по k (граничные условия в каждом порядке совпадают с (3.2) и далее не выписываются)

$$(5.3) \quad C^{(0)'} = 0$$

$$(5.4) \quad \psi^{(1)''} - T^{(1)'} - rC^{(1)'} = 0, \quad T^{(1)''} = 0$$

$$\begin{aligned}
 (5.5) \quad & C^{(1)''} - r\psi^{(1)'} = -P\sigma^{(1)}C^{(0)} + iRNu_0C^{(0)} \\
 & \psi^{(2)''} - T^{(2)'} - rC^{(2)'} = 0 \\
 & T^{(2)''} = -\sigma^{(1)}T^{(1)} + iR(u_0T^{(1)} - T_0'\psi^{(1)}) \\
 & C^{(2)''} - r\psi^{(2)'} = C^{(0)} + iRN(u_0C^{(1)} - C_0'\psi^{(1)}) - P(\sigma^{(1)}C^{(1)} + \sigma^{(2)}C^{(0)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.6) \quad & \psi^{(n)''} - T^{(n)'} - rC^{(n)'} = \psi^{(n-2)} \\
 & T^{(n)''} = T^{(n-2)} + iR(u_0T^{(n-1)} - T_0'\psi^{(n-1)}) - \sum_{l=1}^{n-1} \sigma^{(l)}T^{(n-l)} \\
 & C^{(n)''} - r\psi^{(n)'} = C^{(n-2)} + iRN(u_0C^{(n-1)} - C_0'\psi^{(n-1)}) - P \sum_{l=1}^n \sigma^{(l)}C^{(n-l)}
 \end{aligned}$$

Условие разрешимости неоднородной системы n -го порядка (5.6) состоит в обращении в нуль интеграла от правой части последнего из уравнений этой системы (5.7)

$$(5.7) \quad \int_{-1}^1 \left[C^{(n-2)} + iRN(u_0C^{(n-1)} - C_0'\psi^{(n-1)}) - P \sum_{l=1}^n \sigma^{(l)}C^{(n-l)} \right] dx = 0$$

Из разрешимости системы первого порядка ($n=1$) следует $\sigma^{(1)}=0$; решение системы (5.4) при этом имеет вид (нормировка определена условием $C^{(0)}=1$)

$$\begin{aligned}
 (5.8) \quad & \psi^{(1)} = \frac{iRN}{2r^3 \operatorname{ch} r} [rx \operatorname{sh} rx - (2+r \operatorname{th} r) \operatorname{ch} rx + 2 \operatorname{ch} r] \\
 & T^{(1)} = 0 \\
 & C^{(1)} = \frac{iRN}{2r^3 \operatorname{ch} r} [rx \operatorname{ch} rx - (1+r \operatorname{th} r) \operatorname{sh} rx]
 \end{aligned}$$

Условие разрешимости при $n=2$ позволяет найти $\sigma^{(2)}$

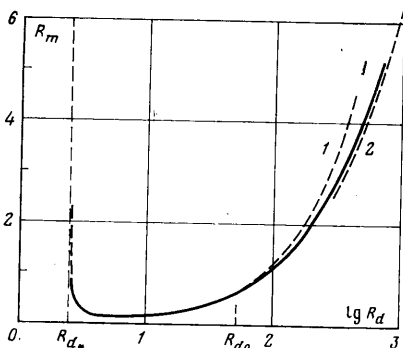
$$(5.9) \quad \sigma^{(2)} = \frac{1}{P} \left[1 + iRN \int_0^1 (u_0C^{(1)} - C_0'\psi^{(1)}) dx \right]$$

Подставляя $\psi^{(1)}$ и $C^{(1)}$ из (5.8), а также невозмущенные профили u_0 и C_0 из (2.1), получим

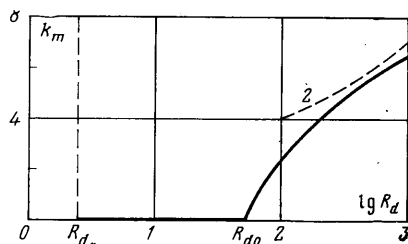
$$(5.10) \quad \sigma^{(2)} = \frac{1}{P} \left(1 - \frac{R^2}{R_c^2} \right)$$

$$(5.11) \quad R_c = \frac{2r^{3/2}}{N} [\operatorname{ch}^{-2}r(2r^2 \operatorname{th} r + 5r) + 4r - 9 \operatorname{th} r]^{-1/2}$$

В соответствии с (5.2) главный член разложения декремента по степеням волнового числа имеет вид $\sigma = P^{-1}(1 - R^2/R_c^2)k^2$. Вещественность σ означает, что при малых k рассматриваемый особый уровень спектра описывает возмущение, меняющееся со временем монотонно. При $R < R_c$ возмущения с $k \neq 0$ затухают; мода $k=0$ является нейтральной. При $R > R_c$ имеет место неустойчивость относительно длинноволновых возмущений со



Фиг. 2



Фиг. 3

сколь угодно малыми k . Таким образом, R_c определяет границу длинноволновой неустойчивости.

Согласно формуле (5.11) длинноволновые возмущения приводят к неустойчивости при $R_d > R_{d*} = 2.486$ (это значение определяется из условия обращения в нуль подкоренного выражения в (5.11)). При $R_d \rightarrow R_{d*}$ справа R_c стремится к бесконечности по закону $R_c = \text{const}/N\sqrt{R_d - R_{d*}}$. Кривая $R_c(R_d)$ имеет минимум при $R_{d0} = 4.96$; минимальное значение $R_{c0} = 14.365/N$. При больших R_d

$$R_c = \frac{1}{N} \left(R_d + \frac{9}{8} R_d^{1/2} + \dots \right)$$

6. Численные результаты. При произвольных значениях параметра стратификации и волнового числа спектральная задача (3.1), (3.2) решалась численно. Краевая задача сводилась к задаче Коши. Для интегрирования применялся метод разложения неизвестных функций в ряды Тейлора. Значение функции в данной точке получалось через значения ее производных в предыдущей точке согласно разложению в степенной ряд по координате с удержанием членов до седьмого порядка включительно. Величина последнего удерживаемого члена принималась в качестве меры погрешности. Шаг выбирался автоматически. Для сохранения линейной независимости решений проводилась пошаговая ортогонализация. В результате решения задачи определялись декременты возмущений, а также критические числа Рэлея и параметры критических возмущений.

В водных растворах параметры N и P велики и одного порядка величины. В расчетах было принято $N = P = 100$. Согласно результатам расчетов в обследованной области $R_d \leq 10^4$ имеет место лишь монотонная неустойчивость. Основные результаты представлены на фиг. 2 и 3. Здесь изображены в зависимости от R_d минимальное (по k) критическое число Рэлея R_m и соответствующее волновое число k_m .

На фиг. 2 штриховая линия 1 изображает критическое число R_c для длинноволновых возмущений (5.11). Штриховая линия 2 соответствует предельному случаю сильной стратификации (4.1). Как показали расчеты, в области $0 < R_d < R_{d*} = 2.486$ возмущения затухают. Если $R_{d*} < R_d < R_{d0}$, где $R_{d0} \approx 52$, наиболее опасными являются длинноволновые возмущения с $k=0$; граница устойчивости в этом промежутке R_d определяется по (5.11). При $R_d > R_{d0}$ наиболее опасными становятся возмущения с $k \neq 0$ — нейтральные кривые на плоскости $R-k$ имеют минимум при конечных k .

Соответствующие минимальные значения R_m , определенные численно, в зависимости от R_d изображены на фиг. 2 сплошной кривой. В этой области критическое волновое число k_m с ростом R_d монотонно увеличивается (сплошная кривая на фиг. 3). В пределе больших R_d численные результаты приближаются к соответствующим асимптотическим значениям, даваемым (4.1) (штриховые кривые 2 на фиг. 2 и 3).

Таким образом, наличие продольной потенциально устойчивой стратификации приводит к появлению неустойчивости стационарной плоскопараллельной фильтрации смеси в вертикальном слое. Для развития специфической термоконцентрационной неустойчивости параметр стратификации должен превышать пороговое значение $R_{d*} = 2.4863$, не зависящее от параметров среды. В определенном промежутке значений R_d неустойчивость вызывается длинноволновыми (плоскопараллельными) возму-

щениями. По мере увеличения параметра стратификации неустойчивость приобретает характерную слоистую структуру.

В заключение заметим, что при $N \sim P \sim 1$, согласно результатам [5], следует ожидать неустойчивости колебательного типа. Этот вопрос требует отдельного обсуждения.

Поступило 20 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Gill A. E. A proof that convection in porous vertical slab is stable. J. Fluid Mech., 1969, vol. 35, No. 3.
2. Thorpe S. A., Hutt P. K., Soulsby R. The effect of horizontal gradients on thermohaline convection. J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, No. 2.
3. Hart J. E. On sideways diffusive instability. J. Fluid Mech., 1971, vol. 49, No. 2.
4. Гернер Дж. Эффекты плавучести в жидкости. М., «Мир», 1977.
5. Гершуни Г. З., Жузовицкий Е. М., Любимов Д. В. О термоконцентрационной неустойчивости смеси в пористой среде. Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3.