МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1980

УДК 534.222

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

А. Г. БАГДОЕВ, Г. Г. ОГАНЯН

(Ереван)

Распространение нестационарных слабых ударных волн в химически активной среде имеет существенно дисперсионный и диссипативный характер. Уравнения коротких волн для таких сред получены и исследованы в [1-4]. Представляет интерес изучение квазимонохроматических волн с медленно меняющимися амплитудой и фазой. Общий метод получения уравнений для модулированных колебаний в нелинейных диспергирующих средах без диссипации предложен в [5-8]. В настоящей работе для диспергирующей слабонелинейной слабодиссипативной среды выводятся в трехмерной постановке уравнения коротких волн и уравнение Шредингера, описывающее медленные модуляции амплитуды и фазы произвольной волны. Далее, коэффициенты уравнений конкретизируются для рассматриваемой газожидкостной смеси. Получены решения для узких пучков в данной дефокусирующей среде и линейное и нелинейное решения в окрестности дифракционного луча. Решение вблизи каустики для квазимонохроматических волн найдено в [9].

1. Исходные уравнения и порядки характеристик течения. Пусть в потоке химически активной смеси вязких жидкостей с газовыми пузырьками малых размеров происходит только одна химическая реакция. Предполагая, что газовая и жидкая фазы движутся с одинаковой скоростью, и считая, что расстояние между пузырьками много больше радиуса R пузырька, можно пренебречь взаимодействием между ними и пульсации одиночного пузырька описать уравнением Херринга – Флинна, учитывающим сжимаемость жидкой фазы [10], причем газовая фаза химически инертна. Тогда изменение состава рассматриваемой газожидкостной смеси можно характеризовать изменением состава жидкой фазы посредством параметра q, называемым полнотой химической реакции. Систему исходных уравнений, описывающую течение релаксирующей газожидкостной смеси, возьмем в виде [11, 12]

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\mathbf{V}=0$$

$$\rho\frac{dV}{dt}=-\nabla P+\frac{1}{3}\eta_1\nabla(\operatorname{div}\mathbf{V})+\eta_1\Delta V$$

$$\rho\left(T\frac{dS}{dt}+Q\frac{dq}{dt}\right)=\sigma\nabla V,\qquad Q=\sum_{k=1}^{n}(\nu_k'-\nu_k)\mu_k$$

$$P_2-P=\rho_1R\left(1-\frac{2}{c_{10}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\rho_1\left(1-\frac{4}{3}\frac{1}{c_{10}}\frac{dR}{dt}\right)\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+ \tag{1.1}$$

$$+\frac{4\eta_1}{R}\frac{dR}{dt}-\frac{R}{c_{10}}\left(1-\frac{1}{c_{10}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(P_2-\frac{4\eta_1}{R}\frac{dR}{dt}\right)$$

$$\frac{P_2\beta}{\rho_1(1-\beta)}=\text{const},\quad \rho=\rho_1(1-\beta),\quad P_2R^3=\text{const}$$

Здесь индексом 1 обозначены параметры течения жидкой фазы, индексом 2 — газовой фазы, без индекса — всей смеси, t — время, P — давление, $V=\{u, v, w\}$ — вектор скорости частиц смеси, ρ — плотность, T — температура, S — энтропия, η — динамический коэффициент вязкости, σ — тензор вязких напряжений, β — объем газа в единице объема смеси, c_{10} — невозмущенная скорость звука в жидкой фазе, Q — сродство химической реакции, μ_k — химический потенциал, ∇ и Δ — операторы Гамильтона и Лапласа, ν_k', ν_k — стехиометрические коэффициенты.

Пусть вблизи состояния покоя (полного термодинамического равновесия), т. е. $Q=0$, зависимость Q от q дается в виде [11]

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{Q}{\tau_*}\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)_{\rho_1 S}+\ldots,\quad \left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)_{\rho_1 S}>0 \tag{1.2}$$

где τ_* — время протекания химической реакции.

Для замыкания системы (1.1) — (1.2) необходимо иметь три уравнения состояния среды, которые можно определить из соотношения Гиббса для удельной внутренней энергии [1, 2].

При течении релаксирующих сред [1–4] различаются квазизамороженный и квазиравновесный предельные процессы распространения возмущений, в которых τ_* намного больше ($\tau_*\sim 1$) и соответственно меньше ($\tau_*\sim\varepsilon^2$) макроскопического времени. В соответствии с видом процесса различаются две предельные скорости звука — c_f и c_e. Несомненный интерес представляют специальные среды, в которых величины предельных скоростей звука в покоящейся смеси близки одна другой [1–4], где $\tau_*\sim\varepsilon$.

Вначале, как и в [13], путем упрощения системы (1.1) — (1.2), выводятся уравнения, описывающие течение смеси в окрестности волн, близких к плоским. Далее уравнения обобщаются для существенно неодномерных произвольных волн. Не приводя здесь громоздких выкладок, подобных [14], можно в системе координат (x_1, y_1, z_1), связанной с волной, получить следующие уравнения.

Квазизамороженный процесс

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha_f u\frac{\partial u}{\partial x_1}-\nu_f\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\gamma_f\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}+gu-u\frac{d\ln A}{dt}\right)=$$
$$=-\frac{c_{f0}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}\right) \tag{1.3}$$

Квазиравновесный процесс

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha_e u\frac{\partial u}{\partial x_1}-\delta_e\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\gamma_e\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}-u\frac{d\ln A}{dt}\right)=$$
$$=-\frac{c_{e0}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}\right) \tag{1.4}$$

Среда, в которой скорости звука близки

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial u}{\partial t}+(\alpha u-\varepsilon c_0\sigma_e)\frac{\partial u}{\partial x_1}-\delta\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}-u\frac{d\ln A}{dt}\right]+$$
$$+\frac{c_0}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}\right)=\tau_* c_0\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[\frac{\partial u}{\partial t}+(\alpha u-\varepsilon c_0\sigma_e)\frac{\partial u}{\partial x_1}-\right.$$
$$\left.-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}-u\frac{d\ln A}{dt}\right]+\tau_*\frac{c_0}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}\right) \tag{1.5}$$

Здесь в общем случае $dx_1=c_0d\tau_1$, $dy_1=H_2d\theta_1$, $dz_1=H_3d\zeta_1$, уравнение $\tau_1=\mathrm{const}$ описывает волну в линейной задаче, $\theta_1=\mathrm{const}$, $\zeta_1=\mathrm{const}$ — уравнения лучей, H_2, H_3 — коэффициенты Ламе, величина x_1 отсчитывается по нормали к волне, y_1, z_1 — координаты, отсчитываемые вдоль кривых пересечения волны $\tau_1=0$ с поверхностями $\zeta_1=\mathrm{const}$, $\theta_1=\mathrm{const}$ соответственно; производная $\partial/\partial t$ берется вдоль луча, т. е. при постоянных τ_1, θ_1, ζ_1, ε — малый безразмерный параметр, c_0 — невозмущенная скорость звука, характеризуемая видом распространения возмущений, $A(t)$ — одномерное по нормали к волне линейное решение, называемое для недиссипативных недиспергирующих сред лучевым [15, 16].

При отсутствии функции $A(t)$ уравнения (1.4), (1.5) описывают течения в окрестности волн, близких к плоским

$$\alpha=\beta_0\left(\frac{\rho_0c_0^2}{P_0}\right)^2+\frac{\alpha_1}{1-\beta_0}\left(1-\frac{\beta_0\rho_0c_0^2}{P_0}\right)^2,\quad \alpha_1=\frac{1}{c_{10}}\left[\frac{\partial}{\partial\rho_1}(\rho_1c_1)\right]_0$$

$$\delta=\delta_1+\varkappa+m,\quad \delta_1=\frac{2}{3}\frac{\eta_1}{\rho_0}\left[1+\beta_0\left(\frac{\rho_0c_0^2}{P_0}\right)^2\right], \tag{1.6}$$

$$\varkappa=\frac{\beta_0R_0\rho_0c_*^4}{2P_0c_{10}},\quad \nu=\delta_1+\varkappa$$

$$m=\tau_*\frac{c_{1f0}^2-c_{1e0}^2}{2(1-\beta_0)^2}\left(1-\frac{\beta_0\rho_0c_0^2}{P_0}\right)^2,\quad \gamma=\frac{\beta_0R_0^2\rho_0^2c_0^5}{6(1-\beta_0)P_0^2},\quad g=\frac{m_f}{c_{f0}^2\tau_*^2}$$

Здесь σ_e — постоянная порядка единицы, коэффициенты в (1.3) и (1.4) идентичны (1.6) с заменой c_0 на c_{f0} и c_{e0}, c_{10} на c_{1f0} и c_{1e0} соответственно.

2. Уравнения для медленно меняющихся амплитуды и фазы волны. Выведем уравнения, описывающие медленные изменения амплитуды и фазы произвольной квазимонохроматической волны малой амплитуды, распространяющейся в произвольной неоднородной нелинейной среде, с учетом диссипации и дисперсии.

а) *Линейная постановка.* Предположение о медленном изменении параметров волны можно заменить, как принято в геометрической акустике [8], допущением о больших значениях эйконала основной волны или, что то же самое, о больших значениях несущей частоты ω $(\omega\sim1/\varepsilon)$. Нетрудно показать, что в основном порядке вместо системы линейных уравнений, описывающей течение произвольной среды, можно рассмотреть линейное уравнение относительно u [9]

$$\Delta(-il_1,\ -il_2,\ -il_3,\ il_4)u=0$$
$$l_i=\frac{\partial}{\partial x_i},\quad l_4=\frac{\partial}{\partial t},\quad (i=1,2,3;\ x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z) \tag{2.1}$$

Для волны, близкой к монохроматической, можно предположить

$$u=U(x,y,z,t)e^{i\tau},\quad \tau=\tau_2(x,y,z)-\omega t,\quad \tau_2=\omega\tau_3, \tag{2.2}$$

где U — медленно меняющаяся функция, $\tau_2=\omega t$ — уравнение основной немодулированной волны.

Подставляя (2.2) в (2.1) и оставляя главные члены порядка ω^n, получим линейное дисперсионное уравнение

$$\Delta(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\omega)=0,\quad \lambda_k=\partial\tau_2/\partial x_k \tag{2.3}$$

Учитывая (2.3), из (2.1) для членов порядка ω^{n-1} можно получить

$$-i\frac{\partial U}{\partial x_k}(\Delta_{l_k}e^{i\tau})+i\frac{\partial U}{\partial t}(\Delta_{l_4}e^{i\tau})+\frac{1}{2}\left(-\Delta_{l_k l_j}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k\partial x_j}+\right.$$
$$\left.+2\Delta_{l_k l_4}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k\partial t}-\Delta_{l_4 l_4}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)e^{i\tau}=0 \tag{2.4}$$

Здесь по повторяющимся индексам производится суммирование, Δ_{l_k} — производная оператора Δ по l_k. Необходимо отметить, что в (2.4) не выписаны те члены порядка ω^{n-1}, которые получаются из действия операторов l_k на переменные коэффициенты в (2.1), дающие слагаемые, содержащие множителем функцию U, а не ее производные. Указанные слагаемые будут в дальнейшем включены в основное уравнение в виде члена с коэффициентом, характеризующим одномерное вдоль луча немодулированное решение.

Удобно в (2.4) ввести лучевые координаты t, τ, θ, ζ, где $\theta=\text{const}$, $\zeta=\text{const}$ дают уравнения лучей, τ отсчитывается по нормали к точечной волне, откуда

$$\frac{dx_k}{d\sigma}=\Delta_{\lambda_k},\quad \frac{dt}{d\sigma}=-\Delta_\omega,\quad \frac{\partial\theta}{\partial x_k}\Delta_{\lambda_k}=0,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\Delta_{\lambda_k}=0 \tag{2.5}$$

Здесь σ — параметр вдоль луча, индексы при Δ означают дифференцирование, причем

$$\frac{\partial}{\partial x_k}=\lambda_k\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial\zeta} \tag{2.6}$$

Имея в виду (2.5) и (2.6), нетрудно показать, что в слагаемых (2.4), содержащих первые производные от U, остается производная по t, взятая вдоль луча $\xi=\text{const}$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_\xi=\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\lambda_k\Delta_{\lambda_k}}{\Delta_\omega}\frac{\partial U}{\partial\tau}=\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\Delta_{\lambda_k}}{\Delta_\omega}\frac{\partial U}{\partial x_k} \tag{2.7}$$

Принимая, что $\tau\sim\omega^{1/2}$, можно в первом соотношении (2.7) при учете членов порядка $\omega^{n-1/2}$ принять левую часть равной нулю и полученное значение $\partial U/\partial t$ подставить в производные второго порядка, имеющие порядок ω^{n-1}. Переходя в (2.4) к лучевым координатам, в силу (2.5), (2.6) и вышесказанного можно получить

$$i\Delta_\omega\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_\xi-\frac{1}{2}\Gamma\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}+\Lambda\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\partial\theta}+\Lambda_1\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\partial\zeta}+GU=0 \tag{2.8}$$

$$\Lambda=\left(\Delta_{\omega\lambda_k}\frac{\lambda_k\Delta_{\lambda_k}}{\Delta_\omega}-\lambda_j\Delta_{\lambda_k\lambda_j}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_k},\quad \Gamma=\sum_{j,k=1}^{3}\lambda_k\lambda_j\Delta_{\lambda_k\lambda_j}+\Delta_{\omega\omega}\frac{\lambda_k\Delta_{\lambda_k}}{\Delta_\omega^2}-$$
$$-2\frac{\lambda_k\Delta_{\lambda_k}}{\Delta_\omega}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\Delta_{\omega\lambda_k},$$

$$G=-\frac{\Delta_{\lambda_k\lambda_j}}{2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)$$

Здесь Λ_1 получается из Λ заменой θ на ζ, причем для недиспергирующих сред $\Lambda=\Lambda_1=\Gamma=0$.

Как и в [9, 15], нетрудно показать, что в (2.8) при вычислении коэффициентов при производных по θ, ζ, τ уравнения среды можно записать в подвижной системе координат (x_1, y_1, z_1). При этом, согласно (2.7), выражение для $(\partial/\partial t)_x{}^i$ удобнее всего записывать прямо в лучевых координатах, и ввиду инвариантности записи $\lambda_k\Delta_{\lambda_k}/\Delta_\omega=-\lambda C_n=-\omega C_n/c_n$, где C_n, c_n — проекции векторов групповой и фазовой скоростей на нормаль к волне, можно в (2.8) полагать $\lambda_2=\lambda_3=0$, т. е. вычисления производить в подвижных координатах. В случае пучков, имеющих ось симметрии x_1, координаты y, y_1 и z, z_1 совпадают.

Исходя из вышесказанного, полагая в коэффициенте G $\theta=\theta(y_1, \tau, t)$, $\zeta=\zeta(z_1, \tau, t)$ и используя (2.3), (2.5), можно получить [9]

$$K_1U=\Bigg[i\Delta_\omega\frac{\partial}{\partial t}-{}^1/_2\Gamma\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\Lambda\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\theta}+\Lambda_1\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\zeta}+ \tag{2.9}$$
$$+{}^1/_2\Delta_{\lambda_1}\left(\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\lambda_2{}^2}\frac{\partial^2}{\partial y_1{}^2}+\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\lambda_3{}^2}\frac{\partial^2}{\partial z_1{}^2}+\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\lambda_2\partial\lambda_3}\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial z_1}\right)-$$
$$-i\Delta_\omega\frac{d\ln A_1}{dt}\Bigg]U=0$$

Здесь последнее слагаемое добавлено для учета членов, содержащих функцию U, о чем было сказано выше, $A_1(t)$ — немодулированное значение U.

В линеаризованных уравнениях (1.3) — (1.5) в силу малости диссипации и дисперсии сделаем замену $dx_1\approx c_0d\tau/\omega$ и подставим в них (2.2). Тогда в слагаемых, соответствующих указанным эффектам, величина U войдет только множителем и влияние указанных эффектов скажется лишь на функции A_1, связь которой с A запишется, например для (1.3), в виде

$$A_1=A\exp\left[i\gamma_f\frac{\omega^3}{c_{f0}{}^3}t-\frac{\omega^2}{c_{f0}{}^2}\left(\nu_f+\frac{c_{f0}{}^2}{\omega^2}g\right)t\right]=AD(t)$$

Вводя функцию U_*, преобразуем (2.9) к виду

$$KU_*=0,\qquad U=U_*D(t) \tag{2.10}$$

где оператор K получается из K_1 заменой A_1 на A.

В плоской линейной задаче дифракции периодических волн от угла решение в окрестности точек $\theta=\theta_0$ касания падающих волн с точечными, произведенными вершиной угла, имеет вид [9]

$$u=\frac{A_1}{2\sqrt{k_1-k_2}}\exp\left[-\frac{i\omega(\theta-\theta_0)^2}{2c(k_1-k_2)}\right][1-\Phi(\gamma)], \tag{2.11}$$
$$\gamma=(\theta-\theta_0)\sqrt{-\frac{i\omega}{2c(k_1-k_2)}}$$

где $\Phi(\gamma)$ — интеграл Френеля, $A_1(\tau_3)$ и $k_1(\tau_3)$ — амплитуда и кривизна точечных волн, постоянные k_2 и c — кривизна «начальной» волны и ее нормальная фазовая скорость.

Покажем, что (2.11) имеет место и для слабодиссипативных диспергирующих сред. В дифракционных задачах члены с Λ, Λ_1, Γ в (2.9) можно отбросить. Далее, записывая вдоль луча

$$\left.\frac{dk_1}{dt}\right|_\xi=\frac{C_n}{c_n}\frac{dk_1}{d\tau_1}$$

и подставляя (2.11) в упрощенное уравнение (2.9), нетрудно убедиться, что (2.11) действительно является решением при выполнении соотношения

$$\frac{dk_1}{d\tau_3}=\frac{C_n}{c}\frac{\omega}{H_2^2}\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\lambda_2^2}$$

которое, в частности, было проверено для дифракции волн на воде [5], где $k_1=(c_n\tau_3)^{-1}$, $H_2=c_n\tau_3$, и для произвольной однородной среды, где $k_1=-(\tau_1\partial^2\lambda_1/\partial\lambda_2^2)^{-1}$, $H_2=-\tau_1\partial^2\lambda_1/\partial\lambda_2^2$, $c_n=c_0$.

б) *Нелинейная постановка.* Пусть $\omega_1=\omega(\lambda_k^*, a^2)$ есть дисперсионное уравнение нелинейной задачи [8], в котором $\lambda_k^*=\lambda_k+\varphi_k$, φ — возмущенная фаза модулированной волны, обусловленная малой нелинейностью и нестационарностью, a — медленно меняющаяся амплитуда. Разлагая частоту вблизи модулированного процесса в ряд Тейлора, получим

$$\omega_1=\omega(\lambda_k)+\frac{\partial\omega}{\partial\lambda_k}\varphi_{x_k}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\lambda_k\partial\lambda_i}\varphi_{x_k}^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_{a=0}a^2 \tag{2.12}$$

где $x_k=\{x_1, y_1, z_1\}$ — вышеупомянутый подвижный трехгранник, первые три члена определяют линейный закон дисперсии.

По определению, $\omega_1=\omega-\varphi_t$. Подставляя это выражение в (2.12), можно для φ получить уравнение, линейная часть которого совпадает с уравнением, получаемым из (2.10), где $U_*=a\exp(i\varphi)$, путем отделения действительной части и отбрасыванием вторых производных от a. При этом учитывается, что уравнение (2.8) относительно Δ однородно и для данной волны можно полагать $\Delta=\omega-\omega(\lambda_k^*)$. Сравнение этих уравнений дает нелинейное уравнение Шредингера

$$KU_*=\Delta_\omega|U_*|^2U_*\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0,\quad \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0=\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_{a=0} \tag{2.13}$$

Здесь в операторе K

$$\Gamma=-\lambda_1^2\frac{\partial^2\omega}{\partial\lambda_1^2},\qquad \Lambda=\frac{\lambda^2}{H_2}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial\lambda_2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\lambda_1^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\right) \tag{2.14}$$

Величина Λ_1 получается из Λ заменой λ_2 на λ_3 и H_2 на H_3. Выражения (2.13) и (2.8) совпадают, если в (2.8) перейти в функции U к подвижной системе координат, положив при этом $\lambda_2\approx\lambda_3\approx0$.

Записывая $U_*=a\exp(i\varphi)$ и отделяя в (2.13) действительную и мнимую части, получим уравнения для фазы и амплитуды

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_\xi+\frac{1}{2}\frac{\Delta_{\lambda_1}}{\Delta_\omega}\left(\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\lambda_2^2}\varphi_{y_1}^2+\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\lambda_3^2}\varphi_{z_1}^2+2\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\lambda_2\partial\lambda_3}\varphi_{y_1}\varphi_{z_1}\right)- \\
&-\frac{1}{2}\frac{\Delta_{\lambda_1}}{a\Delta\omega}\left(\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\lambda_2^2}a_{y_1y_1}+\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\lambda_3^2}a_{z_1z_1}+2\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\lambda_2\partial\lambda_3}a_{y_1z_1}\right)- \\
&-\frac{\Gamma}{2a\Delta_\omega}(a\varphi_\tau^2-a_{\tau\tau})+\frac{\Lambda}{a\Delta_\omega}H_2(a\varphi_\tau\varphi_{y_1}-a_{\tau y_1})+\frac{\Lambda_1}{a\Delta_\omega}H_3(a\varphi_\tau\varphi_{z_1}-a_{\tau z_1})+ \\
&+a^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0=0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\left.\frac{\partial a^2}{\partial t}\right|_\xi-a^2\frac{d\ln A^2}{dt}+\frac{\Delta\lambda_1}{\Delta_\omega}\left[\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\lambda_2^2}(a^2\varphi_{y_1})_{y_1}+\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\lambda_3^2}(a^2\varphi_{z_1})_{z_1}+\right.$$

$$+\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\lambda_2\partial\lambda_3}(a^2\varphi_{y_1})_{z_1}+\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\lambda_2\partial\lambda_3}(a^2\varphi_{z_1})_{y_1}\Big]-\frac{\Gamma}{\Delta_\omega}(a^2\varphi_\tau)_\tau+$$

$$+\frac{\Lambda}{\Delta_\omega}H_2[(a^2\varphi_\tau)_{y_1}+(a^2\varphi_{y_1})_\tau]+\frac{\Lambda_1}{\Delta_\omega}H_3[(a^2\varphi_\tau)_{z_1}+(a^2\varphi_{z_1})_\tau]=0 \qquad (2.16)$$

Полученные уравнения верны при действительных Λ, Λ_1, Γ и $(\partial\omega/\partial a^2)_0$.

Если в (2.15) пренебречь вторыми производными от a, то можно записать условие действительности характеристик для (2.15), (2.16), откуда, если дисперсионные эффекты существенны и волна не имеет особенностей в поперечном направлении, можно найти условие продольной устойчивости волны [8]: $(\partial\omega/\partial a^2)_0(\partial\omega/\partial\lambda_1^2)>0$, а для типичных задач дифракции — условие поперечной устойчивости волны [9].

3. Определение коэффициентов. Для вычисления коэффициентов в (2.9) — (2.16) необходимо знать нелинейное дисперсионное уравнение для одномерной по x_1 задаче, а также линейное дисперсионное уравнение для трехмерной задачи. Подобное разделение способа получения коэффициентов видно из уравнений коротких волн (1.3) — (1.5), в которых неодномерные члены дают слагаемые порядка $\lambda_2^2\sim\lambda_3^2\sim\varepsilon^3$ и не могут в основном порядке повлиять на коэффициент $\partial\omega/\partial a^2$. Коэффициенты $\partial^2\lambda_1/\partial\lambda_2^2$, $\partial^2\lambda_1/\partial\lambda_3^2$ можно определить из линеаризованной системы исходных уравнений в предположении малости эффектов диссипации и дисперсии, однако тот же результат проще всего получить прямо из уравнений (1.3) — (1.5), которые используются в качестве модельных для описания соответствующих процессов распространения волн с медленно меняющимися амплитудами и фазами.

В линейном приближении, полагая в (1.4) — (1.5)

$$u=A_1\Psi(t, y_1, z_1)e^{i\tau}, \quad A_1\Psi=U$$

получим относительно Ψ линейное уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{c_0^2}{2\omega}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z_1^2}\right)=0 \qquad (3.1)$$

Отсюда видно, что в общих уравнениях (2.9), где $U=A_1\Psi$, следует полагать

$$\Lambda=\Lambda_1=\Gamma=0,\ \partial^2\lambda_1/\partial\lambda_2^2=\partial^2\lambda_1/\partial\lambda_3^2=-c_0/\omega,\ \Delta_\omega=1,\ \Delta_{\lambda_1}=-c_0$$

Теперь определим нелинейное дисперсионное соотношение для (1.4). Для этого рассмотрим его одномерный вариант и будем искать стационарное решение в виде $u=u(\zeta)$, $\zeta=x_1-Vt$, V — нелинейный добавок к скорости волны. Уравнение (1.3) примет вид

$$-Vv'+\alpha_f^\circ vv'-\nu_f v''+\gamma_f v'''+gv=0,\quad v=u/A(t),\quad \alpha_f^\circ=\alpha_f\cdot A$$

Полагая, что эффекты трения и диссипации малы, решение ищем в виде

$$v=b\cos\lambda_1\zeta+b_1\cos 2\lambda_1\zeta+b_2\sin\lambda_1\zeta+b_3\sin 2\lambda_1\zeta$$

Для определения постоянных b_i получаем систему

$$\begin{aligned}
&2(V\lambda_1+\gamma_f\lambda_1^3)b-\alpha_f^\circ\lambda_1 bb_1-\alpha_f^\circ\lambda_1 b_2b_3+2(g+\nu_f\lambda_1^2)b_2=0\\
&4(V\lambda_1+4\gamma_f\lambda_1^3)b_1-\alpha_f^\circ\lambda_1 b^2+\alpha_f^\circ\lambda_1 b_2^2+2(g+4\nu_f\lambda_1^2)b_3=0\\
&2(V\lambda_1+\gamma_f\lambda_1^3)b_2-\alpha_f^\circ bb_3+\alpha_f^\circ\lambda_1 b_1b_2-2(g+\nu_f\lambda_1^2)b=0\\
&2(V\lambda_1+4\gamma_f\lambda_1^3)b_3-\alpha_f^\circ\lambda_1 bb_2-(g+4\nu_f\lambda_1^2)b_1=0
\end{aligned} \qquad (3.2)$$

При отсутствии диссипации и трения ($\nu_f=g=0$), $b_2=b_3=0$ и решение системы имеет вид [8] ($\omega=\omega_1-\lambda_1 c_0$)

$$\Omega=\omega+\gamma_f\lambda_1^3-\frac{b^2\alpha_f^2}{24\gamma_f\lambda_1}+\frac{b^4\alpha_f^4}{(12\gamma_f)^3\lambda_1^5}=0, \tag{3.3}$$

$$a=Ab\exp\left[\left(g+\frac{\omega^2}{c_{f0}^2}\nu_f\right)t\right]$$

Отметим, что систему (3.2) можно получить также из вариационного принципа Уизема [5].

При малых значениях диссипации и трения ($\nu_f\sim\varepsilon^7$, $g\sim\varepsilon^5$), используя (3.3), приведем (3.2) к упрощенному нелинейному дисперсионному уравнению

$$\left[\Omega+\frac{b^4\alpha_f^4}{(12\gamma_f)^3\lambda_1^5}\right]^2\Omega-\frac{b^2\alpha_f^2}{24\gamma_f\lambda_1}(g+\nu_f\lambda_1^2)^2=0$$

Ограничиваясь первым корнем уравнения, получим снова соотношение (3.3), показывающее, что в принятом приближении влияние диссипативных факторов не сказывается на виде нелинейного дисперсионного соотношения, откуда определим

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0=\frac{\alpha_f^2}{24\gamma_f\lambda_1}\exp\left[-2\left(g+\frac{\omega^2}{c_{f0}^2}\nu_f\right)t\right]\approx\frac{\alpha_f^2}{24\gamma_f\lambda_1}$$

Если диссипация ν_f и трение g не малы, то понятия медленно меняющихся амплитуд и фазы волны теряют смысл [17].

4. Узкие пучки. Подставляя вычисленные значения коэффициентов в (2.15) и (2.16) и отбрасывая вторые производные от амплитуды a, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{c_0^2}{2\omega}(\varphi_{y_1}+\varphi_{z_1})+\frac{\alpha_f c_0 a_2}{24\gamma_f\omega}=0$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t}-a^2\frac{d\ln A}{dt}+\frac{c_0^2}{\omega}\left[\frac{\partial a^2}{\partial y_1}\varphi_{y_1}+\frac{\partial a^2}{\partial z_1}\varphi_{z_1}+a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1^2}\right)\right]=0$$

Полученные уравнения удобны при решении задач с начальными условиями. Для формулировки задач с граничными условиями необходимо с точностью до малых членов второго порядка положить $\partial/\partial t\approx c_0\partial/\partial l$, где l — длина дуги луча в линейной задаче. Для немодулированных плоских волн в случае плоских пучков решение не зависит от z_1, так что положим $y_1=r$, а для осесимметричных пучков введем в плоскости, перпендикулярной оси x_1 пучка, полярные координаты $y_1=r\cos\nu$, $z_1=r\sin\nu$. Тогда после перехода от l к новой координате μ ($l=\mu\omega/c_0$) уравнения в обоих случаях запишутся в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha_f}{24\gamma_f c_0}a^2=0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{a^2}{A^2}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a^2}{A^2}\right)+\frac{a^2}{A^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{n}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0 \tag{4.2}$$

где $n=0$, 1 соответствуют плоскому и осесимметричному случаям, r — радиальная координата.

Для цилиндрических и сферических немодулированных волн можно также получить уравнения (4.1) и (4.2), где под r необходимо уже подразумевать длину дуги волны.

Следуя [5, 18], где рассмотрена начальная плоская волна, решения для начальной цилиндрической или сферической волн ищем в виде

$$\varphi=\sigma(\mu)+\frac{r^2}{2R(\mu)}\quad \mu=0,\quad \varphi=\sigma(0)+\frac{r^2}{2R(0)} \tag{4.3}$$

Здесь $1/\lambda_1 R$ — кривизна модулированной волны на оси пучка, $\lambda_1=\omega/c_0$ — волновое число.

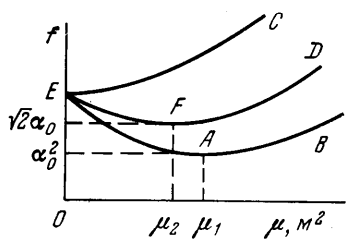
Аналогично [5], вводя вместо R меру схождения пучка

$$\frac{1}{R(\mu)}=\frac{1}{f}\frac{df}{d\mu},\quad \mu=0,\quad f(0)=1 \tag{4.4}$$

окончательно получим

$$\begin{gathered}\frac{a^2}{A^2}=\frac{a_0^2}{A^2(0)}\frac{1}{f^{n+1}}\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\frac{1}{f^2}\right)\\ \frac{1}{A^2}\frac{d^2f}{d\mu^2}-\frac{\alpha_f a_0^2}{24\gamma_f c_0 r_0^2 A^2(0)}\frac{1}{f^{n+2}}=0\end{gathered} \tag{4.5}$$

Здесь a_0 —начальное значение амплитуды модулированной волны на оси пучка, r_0 — начальное значение ширины пучка.



В общем случае для существенно неплоских волн интегрирование должно производиться на ЭВМ. Для плоских волн $A(\mu)=\text{const}$. Тогда уравнение (4.5) после однократного интегрирования и учета граничного условия (4.4) можно привести к виду

$$f'^2=\frac{\alpha_f}{n+1}\frac{a_0^2}{12\gamma_f c_0 r_0^2}\left(1-\frac{1}{f^{n+1}}\right)+\frac{1}{R_0^2},\quad R_0=R(0) \tag{4.6}$$

а) Пусть $n=0$, тогда из (4.6) можно получить

$$\frac{df}{d\mu}=\pm\left(\frac{b_0^2 f-g_0^2}{f}\right)^{1/2},\quad b_0^2=g_0^2+\frac{1}{R_0^2},\quad g_0^2=\frac{\alpha_f}{12\gamma_f c_0 r_0^2}a_0^2$$

Если выбрать верхний знак, то, согласно (4.4), $R(\mu)>0$, т. е. первоначально заданная волна выпуклая и решение запишется в виде (ветвь EC фигуры)

$$\mu=\frac{1}{b_0}\left[\sqrt{f}\sqrt{f-\alpha_0^2}-\sqrt{1-\alpha_0^2}+(2-\alpha_0^2)\ln\frac{\sqrt{f}+\sqrt{f-\alpha_0^2}}{1+\sqrt{1-\alpha_0^2}}\right],$$

$$\alpha_0^2=\frac{g_0^2}{b_0^2}<1$$

Если выбрать нижний знак, то $R<0$, т. е. волна вогнутая и решение будет описываться ветвью EA (см. фигуру)

$$\mu=\frac{1}{b_0}\left[\sqrt{1-\alpha_0^2}-\sqrt{f}\sqrt{f-\alpha_0^2}+(2-\alpha_0^2)\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha_0^2}}{\sqrt{f}+\sqrt{f-\alpha_0^2}}\right]$$

В точке $\mu_1=\mu_*$, $f=\alpha_0^2$, где

$$\mu_*=\frac{1}{b_0}\left[\sqrt{1-\alpha_0^2}+(2-\alpha_0^2)\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha_0^2}}{\alpha_0}\right]$$

т. е. до точки $\mu_1=\mu_*$ пучок сходится и вогнутая волна превращается в этой точке в плоскую $[f'(\mu_*)=0]$, затем выгибается в сторону выпуклости и решение дается в форме (ветвь AB)

$$\mu=\frac{1}{b_0}\left[\sqrt{1-\alpha_0^2}+\sqrt{f}\sqrt{f-\alpha_0^2}+(2-\alpha_0^2)\ln\frac{\sqrt{f}+\sqrt{f-\alpha_0^2}}{1-\sqrt{1-\alpha_0^2}}\right]$$

б) Пусть $n=1$, тогда из (4.6) можно получить

$$\frac{df}{d\mu}=\pm b_0\left(\frac{f^2-\alpha_0^2}{f^2}\right)^{1/2},\qquad \alpha_0^2=\frac{g_0^2}{2b_0^2}<1$$

Ветви EC и EF описываются решением $\mu=\pm b_0^{-1}(\sqrt{f^2-\alpha_0^2}-\sqrt{1-\alpha_0^2})$, причем верхний знак соответствует выпуклой волне, а нижний — вогнутой. В последнем случае до значения $\mu_2=\mu_*=b_0^{-1}\sqrt{1-\alpha_0^2}$ пучок сходится и волна, становясь плоской, в дальнейшем выгибается в сторону выпуклости (ветвь FD). Решение запишется в виде $\mu=b_0^{-1}(\sqrt{f^2-\alpha_0^2}+\sqrt{1-\alpha_0^2})$.

В заключение отметим, что для уравнения (3.1) можно решать задачу о дифракционном расплывании гауссова пучка [13], а соответствующую нелинейную задачу решать численно с помощью (4.1) и (4.2).

Поступила 9 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.
2. *Наполитано Л. Дж., Рыжов О. С.* Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околозвуковых скоростях. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5.
3. *Оганян Г. Г.* Распространение слабых волн в химически активной среде в нелинейной постановке. Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. 26, № 6.
4. *Ни А. Л., Рыжов О. С.* Нелинейное распространение волн в средах с произвольным количеством химических реакций. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
6. *Lighthill M. J.* Some special cases treated by the Whitham theory. Proc. Roy. Soc., 1967, vol. A 299, 1456.
7. *Островский Л. А., Пелиновский Е. Н.* Метод усреднения для несинусоидальных волн. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 4.
8. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
9. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности фронтов волн в пространственной задаче. Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. 30, № 6.
10. *Акуличев В. А.* Пульсации кавитационных полостей. В сб. Мощные ультразвуковые поля. М., «Наука», 1968.
11. *Гроот С. Р., де Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
12. *Ван Вейнгарден Л.* Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. В сб. Реология суспензий. М., «Мир», 1975.
13. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.
14. *Bagdoev A. G., Gurgenian A. A.* On the definition of simplified nonlinear equations. Instituto di meccanica applicata del politecnico di Torino, nota tecnica 113, 1976.

15. *Bretherton F. P., Garrett C. J. R.* Wavetrains in inhomogeneous moving media. Proc. Roy. Soc., 1968, vol. A 302, No. 1471.
16. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 6.
17. *Тау С. А.* Линейные волны в средах с дисперсией. В сб. Нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
18. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде. Усп. физ. н., 1967, т. 93, № 1.