МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1980

УДК 533.7

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

Я. Д. ЯНКОВ

(Москва)

На основе диффузионного уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для N-частичной функции распределения получено кинетическое уравнение движения твердых частиц в жидкости или газе. Показано, что метод Н. Н. Боголюбова при соответствующих предположениях можно применять и к уравнениям диффузионного типа. Полученное кинетическое уравнение является обобщением ранее предложенного в [1].

1. Уравнения движения твердых частиц в жидкости. Рассмотрим движение двухфазной системы, состоящей из сплошной фазы (жидкости или газа) и N твердых частиц (псевдогаза). Пусть эта система занимает в пространстве конечный объем V, а псевдогаз состоит из одинаковых упругих шаров с радиусом a и массой m.

Поскольку для двухфазной системы должны выполняться законы сохранения массы, импульса и энергии, то сплошная среда движется в соответствии с полной системой уравнений Навье – Стокса, в которых необходимо учесть влияние твердых частиц на движение жидкости. С другой стороны, жидкость влияет на движение твердых частиц, уравнения движения которых запишем в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{r}}_i=\mathbf{c}_i,\quad m\dot{\mathbf{c}}_i=\mathbf{G}+\mathbf{X}^i+\mathbf{\Phi}^i,\quad i=[1,N] \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{c}_i$ — радиус-вектор и скорость центра масс i-й частицы относительно неподвижной декартовой системы координат, а через $\mathbf{G}$, $\mathbf{X}^i$ и $\mathbf{\Phi}^i$ обозначены соответственно внешняя массовая сила (например, сила тяжести), сила, действующая на i-ю частицу со стороны всех остальных частиц, и сила, действующая на i-ю частицу со стороны сплошной фазы.

Предположим, что плотность вещества твердых частиц ρ_p намного больше плотности жидкой фазы $\rho_p\gg\rho_f$. При этом условии можно пренебречь эффектами, обусловленными присоединенной массой, градиентом давления жидкости, градиентом температуры и отклонением от установившегося состояния [2]. Таким образом, $\mathbf{\Phi}_i$ является силой гидродинамического сопротивления в результате относительного движения между частицами и жидкостью. Запишем

$$\mathbf{\Phi}^i\equiv\Phi^i(\mathbf{r}_i,\ |\mathbf{u}_i-\mathbf{c}_i|,\ n,\ \alpha)(\mathbf{u}_i-\mathbf{c}_i) \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u}_i$ — скорость жидкости, n — числовая плотность псевдогаза, α — совокупность всех безразмерных параметров, от которых зависит коэффициент сопротивления. Зависимость $\mathbf{\Phi}^i$ от n подтверждается полуэмпирическим анализом [3].

Из (1.1) и (1.2) после осреднения [1] получим

$$\dot{\mathbf{r}}_i=\mathbf{c}_i$$

$$\dot{\mathbf{c}}_i=m^{-1}\mathbf{G}+m^{-1}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{X}^{ij}+\Phi_0{}^i(\mathbf{v}_i-\mathbf{c}_i)+\mathbf{N}^i(t),\quad \mathbf{X}^{ii}=0,\quad i=[1,N] \tag{1.3}$$

$$(1.4)\qquad \Phi_0^i \equiv \Phi^i(\mathbf{r}_i, |\mathbf{v}_i-\mathbf{u}_{pi}|, n_p, \alpha), \quad \mathbf{N}^i(t) \equiv \Phi_0^i \Delta\mathbf{u}_i + \frac{\partial \Phi_0}{\partial n}(\mathbf{v}_i-\mathbf{u}_{pi})\Delta n$$

Здесь $\mathbf{v}_i$ — средняя скорость жидкости при средней плотности псевдогаза n_p; $\mathbf{u}_{pi}$ — массовая скорость псевдогаза; $\Delta\mathbf{u}_i$ и Δn — флюктуации скорости жидкости и плотности n, $\mathbf{X}^{ij}$ — сила, действующая на i-ю частицу со стороны j-й частицы, а Φ_0^i умножена на m^{-1}, но сохранено старое обозначение.

Предположим еще, что $\Delta\mathbf{u}_i$ и Δn, а следовательно, и $\mathbf{N}^i(t)$ являются белыми гауссовскими шумами с нулевыми математическими ожиданиями [1] и с интенсивностями их корреляционных функций:

$$(1.5)\qquad G_{ij}^{\alpha\beta} = \Phi_{0\alpha}^{i}\Phi_{0\beta}^{j} G[\Delta u_i^\alpha \Delta u_j^\beta] + \Phi_{0\alpha}^{i}\frac{\partial \Phi_{0\beta}^{j}}{\partial n}(v_j^\beta - u_{pj}^\beta)\times$$

$$\times G[\Delta u_i^\alpha \Delta n_j^\beta] + \Phi_{0\beta}^{i}\frac{\partial \Phi_{0\alpha}}{\partial n}(v_i^\alpha - u_{pi}^\alpha) G[\Delta u_j^\beta \Delta n_i^\alpha] +$$

$$+ \frac{\partial \Phi_{0\alpha}^{i}}{\partial n}\frac{\partial \Phi_{0\beta}}{\partial n}(v_i^\alpha - u_{pi}^\alpha)(v_j^\beta - u_{pj}^\beta) G[\Delta n_i^\alpha \Delta n_j^\beta].$$

Отметим, что обозначения диффузионных коэффициентов в (1.5) указывают на связь между флюктуациями скорости жидкости и плотностью псевдогаза в окрестности данной твердой частицы. Значения коэффициентов необходимо определить либо из теории [1], либо из эксперимента.

Следовательно, твердые частицы движутся в соответствии с системой стохастических уравнений типа Ланжевена (1.3).

2. Цепочка уравнений для многочастичных функций распределения. Известно, что стохастические уравнения порождают диффузионный процесс [4], и, следовательно, в фазовом пространстве координат и скоростей $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{c}_N\} \equiv \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N\} = \{\mathbf{r}, \mathbf{c}\}$ для N-частичной функции распределения, имеющей смысл плотности вероятности, запишем

$$(2.1)\qquad \frac{\partial F_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{c}_i \frac{\partial F_N}{\partial \mathbf{r}_i} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_i}\Big\{\Big[m^{-1}\mathbf{G} + m^{-1}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{X}^{ij} +$$

$$+ \Phi_0^i(\mathbf{v}_i - \mathbf{c}_i)\Big] F_N\Big\} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial c_i^\alpha \partial c_j^\beta}(G_{ij}^{\alpha\beta} F_N)$$

Выражение $V^{-N}F_N(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)d\mathbf{r}d\mathbf{c}$ определяет вероятность того, что в момент времени t значения координат и скоростей твердых частиц заключены в пределах $d\mathbf{r}d\mathbf{c}$ около точки $\{\mathbf{r}, \mathbf{c}\}$. Ввиду одинаковости формы частиц F_N является симметричной функцией своих фазовых переменных. Функция распределения нормирована так, что

$$(2.2)\qquad \int F_N(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{c} = V^N$$

где интегрирование ведется по всем значениям координат и скоростей твердых частиц.

В дальнейшем будем использовать и иные формы записи уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова (2.1). Введем обозначения для операторов

$$\theta_{i,j}=\mathrm{X}^{ij}\frac{\partial}{\partial\mathbf{c}_i}+\mathrm{X}^{ij}\frac{\partial}{\partial\mathbf{c}_j},\qquad L_s\equiv\sum_{i=1}^{s}\left[\mathbf{c}_i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_i}+m^{-1}\mathrm{G}\frac{\partial}{\partial\mathbf{c}_i}\right] \tag{2.3}$$

$$L_s^\lambda\equiv\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial}{\partial\mathbf{c}_i}[\Phi_0^i(\mathbf{v}_i-\mathbf{c}_i)\ldots]-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial c_i^\alpha\,\partial c_i^\beta}(G_{ii}^{\alpha\beta}\ldots) \tag{2.4}$$

$$G_s\equiv-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant s}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial c_i^\alpha\,\partial c_j^\beta}(G_{ij}^{\alpha\beta}\ldots) \tag{2.5}$$

Учитывая (2.3)–(2.5), уравнение (2.1) запишем в виде

$$\frac{\partial F_N}{\partial t}+L_NF_N+L_N^\lambda+G_NF_N+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\theta_{i,j}F_N=0 \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) называется вырождающимся параболическим [5, 6]. Оно необратимо во времени и, следовательно, намного сложнее уравнения Лиувиля, но оказывается, что идеи метода Боголюбова [7] можно применить и в этом случае.

Определим s-частичную функцию распределения как

$$F_s(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_s,t)\equiv V^{-(N-s)}\int F_N\,d\mathbf{x}_{s+1}\ldots d\mathbf{x}_N \tag{2.7}$$

Умножим (2.6) на $V^{-(N-S)}$ и проинтегрируем по переменным всех частиц, кроме первых s. Учитывая, что F_s — симметричная функция, получим

$$\frac{\partial F_s}{dt}+L_sF_s+L_s^\lambda F_s+G_sF_s+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s}\theta_{i,j}F_s= \tag{2.8}$$

$$=-\frac{(N-s)}{V}\sum_{i=1}^{s}\int\theta_{i,s+1}F_{s+1}\,d\mathbf{x}_{s+1}$$

Заметим, что цепочка уравнений (2.8) является аналогом цепочки уравнений ББГКИ [7], т. е., зная F_{s+1}, в принципе можно определить F_s для $s=[1, N]$.

Предположим, что существует «термодинамический» предел, т. е. если $N\to\infty$ и $V\to\infty$, то $N/V\to n<\infty$, и запишем (2.8) в виде

$$\frac{\partial F_s}{dt}+L_sF_s+L_s^\lambda F_s+G_sF_s+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s}\theta_{i,j}F_s= \tag{2.9}$$

$$=-n\sum_{i=1}^{s}\int\theta_{i,s+1}F_{s+1}\,d\mathbf{x}_{s+1}$$

Для одночастичной функции $F_1(\mathbf{r}_1,\,\mathbf{c}_1,\,t)$ из (2.9) следует

$$\frac{dF_1}{dt}+L_1F_1+L_1^\lambda F_1=-n\int\theta_{1,2}F_2\,d\mathbf{x}_2 \tag{2.10}$$

Понятно, что если бы каким-то образом удалось записать F_2 в виде функционала от F_1, не зависящего явно от времени, то можно было бы получить замкнутое уравнение для F_1. Покажем, что это возможно.

3. Кинетическое уравнение. С математической точки зрения начальная плотность вероятности F_s может задаваться произвольным образом [7], однако, поскольку речь идет о физическом процессе, необходимо учесть свойство ослабления корреляций между динамическими состояниями твердых частиц, удаленных друг от друга.

Выделим, например, из s частиц две группы, содержащие соответственно s_1 и s_2 частиц ($s=s_1+s_2$), и пусть расстояние R между этими группами безгранично увеличивается. Тогда выражение

$$(3.1)\qquad F_s(\mathbf{x}_1\ldots,\mathbf{x}_s,t)\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}F_{s_1}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{s_1},t)F_{s_2}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{s_2},t)$$

является математической записью принципа пространственного ослабления корреляций.

Заметим, что кинетическим называется уравнение типа $\partial F_1/\partial t = A(\mathbf{r}_1, \mathbf{c}_1, F_1)$, где $A(\mathbf{r}_1, \mathbf{c}_1, F_1)$ — выражение, которое полностью определяется формой распределения F_1 в момент времени t.

Из структуры уравнения (2.9) можно сделать вывод, что многочастичные функции распределения быстро изменяются в течение времени порядка времени столкновения τ_0. Поэтому они успевают «подстраиваться» к каждому мгновенному значению одночастичной функции F_1, которая существенно изменяется лишь за время порядка $\tau_r\gg\tau_0$, где τ_r — время релаксации. Иными словами, при $t\gg\tau_0$ многочастичные функции будут зависеть от времени только через F_1, т. е.

$$(3.2)\qquad F_s(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_s,t)\underset{t\gg\tau_0}{\longrightarrow}F_s(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_s,F_1)$$

Функциональная зависимость в (3.2) является универсальной и не зависит от характера начальных условий для многочастичных функций распределения F_s.

Предположим, что все члены уравнений (2.9), отражающие влияние жидкости на движение твердых частиц, имеют одинаковый порядок. Перед упомянутыми членами формально введем малый параметр λ. Если записать (2.9) в безразмерном виде, то легко получим, что $\lambda\sim\tau_0\Phi$, где Φ — характерное значение постоянной времени Φ_0^i, а τ_0 — время столкновения. Предположение $\lambda<1$ справедливо, так как плотность вещества твердых частиц намного больше плотности жидкости.

Будем искать решение уравнения (2.9) в виде

$$(3.3)\qquad F_s(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_s,\ t)=F_s^{00}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_s,\ t)+\lambda F_s^{01}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_s,\ t)+\ldots+ +nF_s^{10}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_s,t)+n\lambda F_s^{11}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_s,t)+\ldots$$

где вместо F_1 поставлено решение уравнения

$$(3.4)\qquad \frac{\partial F_1}{dt}=A_{00}(\mathbf{x}_1,F_1)+\lambda A_{01}(\mathbf{x}_1,F_1)+\ldots+nA_{10}(\mathbf{x}_1,F_1)+n\lambda A_{11}(\mathbf{x}_1,F_1)+\ldots$$

Выражения A_{ij} из-за (2.9) при $s=1$ имеют вид

$$(3.5)\qquad A_{00}(\mathbf{x}_1,\ F_1)=-L_1F_1,\qquad A_{01}(\mathbf{x}_1,\ F_1)=-L_1^\lambda F_1,\ldots$$

$$(3.6)\qquad A_{10}(\mathbf{x}_1,F_1)=-\int\theta_{1,2}F_2^{00}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,F_1)\,d\mathbf{x}_2,\ldots$$

Подставим (3.3) в обе части уравнений (2.9) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметров n и λ. Рассматривая уравнения для F_s^{00}, запишем

$$D_{00}F_s^{00}=-L_sF_s^{00}, \quad s\geqslant 2 \tag{3.7}$$

где D_{00} обозначает оператор дифференцирования по t с последующей заменой $\partial F_1/\partial t$ на A_{00} [7].

Решение уравнений (3.7) с граничными условиями ослабления корреляций (3.1) хорошо известно [7, 8]:

$$F_s^{00}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_s,F_1)=\lim_{\tau\to\infty} S_{-\tau}^{(s)}\prod_{i=1}^{s}(S_\tau^{(1)}F_1) \tag{3.8}$$

где $S_\tau^{(s)}$ — оператор эволюции системы из s твердых частиц. Необходимо отметить, что однопараметрическая абелева группа операторов $S_\tau^{(s)}$ появилась в выражениях (3.8), потому что при $\lambda=0$ уравнение ФПК переходит в уравнение Лиувиля, характеристики которого совпадают с траекториями твердых частиц, не взаимодействующих с жидкостью.

В пространственном неоднородном случае кинетическое уравнение первого приближения будет

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}+\mathbf{c}_1\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{r}_1}+m^{-1}\mathbf{G}\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{c}_1}=-\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_1}[\Phi_0^1(\mathbf{v}_1-\mathbf{c}_1)F_1]+ \tag{3.9}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial c_1^\alpha\partial c_1^\beta}(G_{11}^{\alpha\beta}F_1)-$$

$$-n\int\theta_{1,2}\lim_{\tau\to\infty}S_{-\tau}^{(2)}(S_\tau^{(1)}F_1(\mathbf{x}_1,t)S_\tau^{(1)}F_1(\mathbf{x}_2,t))\,d\mathbf{x}_2$$

Таким образом получили замкнутое уравнение марковского типа для одночастичной функции распределения F_1. Так как в выражения для Φ_0^1 и $G_{11}^{\alpha\beta}$ входят скорость $\mathbf{u}_{p1}$ и плотность n_p псевдогаза, то кинетическое уравнение (3.9) самосогласованное.

Система уравнений Навье — Стокса, в которых, как уже отмечалось, необходимо учесть влияние твердых частиц на движение жидкости, и кинетическое уравнение (3.9) образуют замкнутую систему уравнений.

Автор благодарит В. П. Мясникова за постановку задачи и полезные обсуждения.

Поступила 31 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мясников В. П.* О динамических уравнениях движения двухкомпонентных систем. ПМТФ, 1967, № 2.
2. *Соу С. Л.* Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971.
3. *Гупало Ю. П.* О некоторых закономерностях псевдоожиженного слоя и стесненного падения. Инж.-физ. ж., 1962, № 1.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1977.
5. *Олейник О. А.* О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Матем. сб., 1966, т. 69, № 1.
6. *Kohn J. J., Nirenberg L.* Degenerate elliptic-parabolic equations of second order. Comm. Pure Appl. Math., 1967, vol. 20, No. 4.
7. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.– Л., Гостехиздат, 1946.
8. *Ахиезер А. И., Пелетминский С. В.* Методы статистической физики. М., «Наука», 1977.