

ИОНИЗАЦИЯ И НЕРАВНОВЕСНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ВОЗДУХА ЗА СИЛЬНЫМИ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Г. Н. ЗАЛОГИН, В. В. ЛУНЕВ, Ю. А. ПЛАСТИНИН

(Москва)

Показано, что при больших скоростях ударных волн ($V \geq 9.5$ км/сек) существенным фактором, влияющим на скорость ионизации, является обеднение возбужденных состояний атомов за счет высвечивания. В случае низких давлений ($p_{\infty} \leq 1$ тор) при ограниченной и оптически прозрачной области нагретого ударной волной газа (например, при движении газа в ударной трубе или в ударном слое около затупленного тела) эффективная константа скорости ионизации k_i зависит от давления [1], что приводит к нарушению закона бинарного подобия, справедливого при этих условиях без учета высвечивания. На выходе из зоны релаксации газ приходит к некоторому стационарному состоянию с постоянными параметрами, отличающемуся от термодинамически равновесного. При этом значения концентрации электронов, а также интенсивность излучения в сплошном спектре и в атомных линиях оказываются ниже термодинамически равновесных значений.

С этих позиций объясняются результаты известных и проведенных вновь экспериментов по исследованию ионизации и свечения воздуха за бегущей ударной волной.

1. Вопрос о ионизационной релаксации и излучении воздуха за ударными волнами неоднократно обсуждался в литературе. Основное внимание при этом уделялось диапазону скоростей $V < 8$ км/сек, для которого имеются достаточно надежные экспериментальные данные. Теоретическое рассмотрение релаксационной зоны при скоростях $V > 8$ км/сек проводилось в [2-5], где показано, что при $V \sim 9-9.5$ км/сек меняется механизм образования свободных электронов. На смену механизму ассоциативной ионизации приходит более медленный процесс ионизации электронным ударом, что приводит к резкому увеличению времени релаксации.

Экспериментальные данные по ионизации и излучению воздуха при скоростях $V > 9$ км/сек крайне ограничены, и некоторые из них не согласуются с предсказаниями теории в отношении концентрации электронов в равновесной зоне, интенсивности излучения и по длинам зон релаксации.

Так, в работе [6] экспериментально измеренное значение интенсивности излучения из равновесной зоны ($\lambda = 0.5-1$ мкм при $V = 10.6$ км/сек) ниже рассчитанной теоретически в предположении полного термодинамического равновесия, которое должно реализоваться в условиях эксперимента, и, казалось бы, подтверждается наличием плато с постоянными значениями параметров. Аналогичная ситуация наблюдается и в других экспериментах, обсуждаемых ниже. Измеренная в экспериментах [7] интенсивность излучения в сплошном спектре при скоростях $V > 9$ км/сек также имеет тенденцию к уменьшению по сравнению с расчетной.

В экспериментах [8] с помощью электростатических зондов исследовалась зависимость концентрации электронов в равновесной области за фронтом ударной волны от скорости. При скорости $V < 9$ км/сек результаты экспериментов по концентрациям электронов полностью согласуются с теоретическими значениями, а при больших скоростях начинают резко расходиться и при $V = 10$ км/сек отличаются более чем в десять раз.

В экспериментальной работе [9] также зондовым методом проведено определение времени ионизации в диапазоне скоростей $V=6-14$ км/сек в ударной трубе. Однако абсолютные значения плотности электронов там не приводятся. Данные по длинам зон релаксации в работах [7-9] также не полностью согласуются.

В указанных экспериментальных работах эти факты не объяснялись, а в теоретических работах [2-5] они не могли быть объяснены из-за ограничивающего физического предположения о локально-равновесном распределении атомов по верхним возбужденным состояниям.

2. Система кинетических уравнений для процессов возбуждения и ионизации атомов за фронтом ударной волны включает уравнения баланса свободных электронов, ионов и возбужденных атомов. Эта система в общем случае очень громоздка [10] и решение ее не позволяет получить наглядный физический результат. Поэтому для простоты рассмотрим кинетическое уравнение для заселенности одного из возбужденных состояний атома.

Такой упрощенный подход оправдан, поскольку учитывает основные процессы возбуждения и дезактивации и позволяет получить физически правильные результаты (см., например, [11]). В этом случае уравнение заселенности k -го возбужденного уровня атома имеет вид

$$(2.1) \quad \frac{dn_k^*}{dt} = \frac{(n_e^*)_k - n_k^*}{(\tau_c)_k} - \frac{n_k^*}{(\tau_r)_k}$$

Здесь $(n_e^*)_k$ — локально-равновесное значение заселенности, $(\tau_c)_k$ — время безызлучательной дезактивации, $(\tau_r)_k$ — радиационное время жизни. Первое слагаемое справа в (2.1) — обычный релаксационный член, второе — характеризует скорость исчезновения данного возбужденного состояния за счет высвечивания. Взаимодействие между возбужденными состояниями в такой постановке не учитывается.

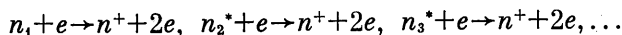
Если времена τ_c и τ_r малы по сравнению с газодинамическим временем, то уравнение (2.1) имеет квазистационарное решение

$$(2.2) \quad n_k^* = (n_e^*)_k \left[1 + \frac{(\tau_c)_k}{(\tau_r)_k} \right]^{-1}$$

из которого видно, что при $\tau_c \gg \tau_r$ заселенность возбужденных состояний не будет подчиняться закону Максвелла — Больцмана. Поскольку $\tau_c \sim 1/p$, а $\tau_r = \text{const}$, то отклонение от этого закона будет возрастать с уменьшением давления. При малых плотностях заселенность возбужденных состояний атомов может быть значительно ниже локально-равновесных значений. Интенсивность излучения атомных линий также может быть ниже равновесного уровня. Это явление известно под названием «предел по столкновениям» и достаточно хорошо изучено применительно к вопросу об излучении молекулярных полос [6, 12].

Рассмотрим влияние этого эффекта на степень ионизации газа.

Ионизация электронным ударом проходит по схеме



Поэтому скорость образования ионов (или электронов) запишем в виде

$$(2.3) \quad \frac{dn^+}{dt} = k_{f1} n_1 n_e + k_{f2} n_2^* n_e + k_{f3} n_3^* n_e + \dots - k_r n^+ n_e^2$$

Здесь k_{f1} , k_{f2} и т. д. — константы скоростей ионизации с соответствующих уровней, а k_r — скорость трехчастичной рекомбинации.

Введем эффективное или среднее значение константы скорости ионизации электронным ударом k_f и с учетом (2.2) получим

$$(2.4) \quad k_f = k_{f1} + k_{f2} \frac{n_{e2}^*}{n_1} \left(1 + \frac{\tau_{c2}}{\tau_{r2}}\right)^{-1} + k_{f3} \frac{n_{e3}^*}{n_1} \left(1 + \frac{\tau_{c3}}{\tau_{r3}}\right)^{-1} + \dots$$

Тогда

$$(2.5) \quad \frac{dn^+}{dt} = k_f n_1 n_e - k_r n^+ n_e^2$$

Из формулы (2.4) видно, что при больших давлениях или при больших оптических толщинах, когда существен процесс фотовозбуждения излучением из равновесной зоны, отношение $\tau_{ci}/\tau_{ri} \ll 1$. При этом величина k_f обращается в хорошо известную константу скорости ступенчатой ионизации k_f^* , полученную в предположении о локально-равновесном распределении возбужденных состояний атомов.

Полученная константа скорости ионизации при отсутствии локально-равновесного распределения атомов по возбужденным состояниям k_f в принципе позволяет получить распределение концентрации электронов за фронтом ударной волны. Однако для таких сложных систем, какими являются атомы азота и кислорода, значения величин k_{fi} , τ_{ci} ($i > 1$) не известны с достаточной точностью.

Для получения более наглядного результата положим

$$\frac{\tau_{c2}}{\tau_{r2}} = \frac{\tau_{c3}}{\tau_{r3}} = \dots = \frac{\tau_{ck}}{\tau_r} = \frac{\tau_c}{\tau_r}$$

Такое упрощение оправдано, поскольку скорость ионизации максимальна с того из уровней, энергия связи которого $E^* \sim kT_e$ [13]. При проведении оценочных расчетов целесообразно использовать значения τ_c и τ_r именно для этих уровней. При этом выражение (2.4) упрощается и принимает вид

$$(2.6) \quad K_f = k_{f1} \left[1 + \left(\frac{k_f^*}{k_{f1}} - 1 \right) \left(1 + \frac{\tau_c}{\tau_r} \right)^{-1} \right] = \\ = k_f^* \left(1 + \frac{k_{f1}}{k_f^*} \frac{\tau_c}{\tau_r} \right) \left(1 + \frac{\tau_c}{\tau_r} \right)^{-1}$$

Поскольку полученная константа скорости зависит от давления (плотности), а значение скорости обратной реакции не меняется, то при достаточно низких давлениях в оптически тонком слое газа не достигается термодинамическое равновесие. Действительно, скорость образования электронов $dn^+/dt = 0$ при

$$(2.7) \quad \frac{n^+ n_e}{n} = K_p = K_p^* \left(1 + \frac{k_{f1}}{k_f} \frac{\tau_c}{\tau_r} \right) \left(1 + \frac{\tau_c}{\tau_r} \right)^{-1}$$

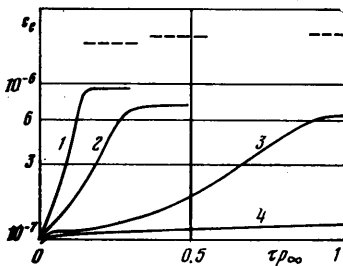
где K_p — некоторая эффективная константа ионизационного равновесия, а K_p^* — константа равновесия Саха.

Таким образом, в оптически тонком слое газа стационарное состояние n^+ , n_e , n и т. д., которое достигается на некотором расстоянии от фронта, не будет состоянием термодинамического равновесия, а следовательно, n_e будет меньше рассчитанного по формуле Саха.

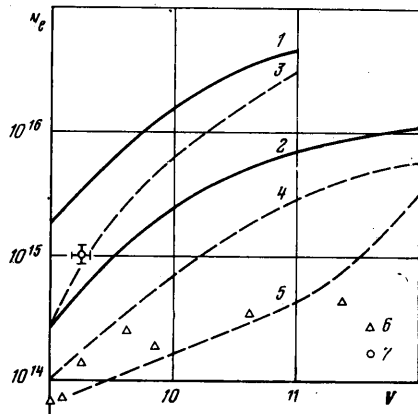
Уменьшение концентрации электронов по сравнению с равновесным приводит к снижению интенсивности излучения в сплошном спектре, которая пропорциональна $I \sim n_e n^+$.

При большой оптической толщине существенным процессом будет фотовозбуждение атомов излучением из прилегающих к релаксационной зоне областей газа и уравнение (2.2) перестает быть справедливым. Поэтому следует иметь в виду, что при проведении экспериментов в ударных трубах различных диаметров при $V \geq 9$ км/сек результаты измерений интенсивности излучения в атомных линиях, в сплошном спектре, а также концентрация электронов могут иметь значительное расхождение из-за различной оптической толщины пробки начегаго ударной волной газа.

Зависимость k_f от давления также позволяет сделать вывод, что при скоростях ударных волн $V > 9.5$ км/сек релаксационная зона не будет под-



Фиг. 1



Фиг. 2

чиняться закону бинарного подобия, а значит, не будет универсальной зависимости $p_\infty \cdot \tau$ от скорости ударной волны.

3. Численные расчеты релаксационной зоны за ударными волнами в воздухе проведены в диапазоне скоростей $V=9-12$ км/сек. Использовалась обычная схема одномерного течения в гиперзвуковом приближении, т. е. с постоянными значениями давления и энтальпии за фронтом ударной волны [14]. При решении задачи учитывались основные релаксационные процессы, аналогичные приведенным в [4], а именно химические реакции, релаксация колебательных степеней свободы молекул, колебательно-диссоциационное взаимодействие. Для определения температуры электронов решалось уравнение баланса энергии электронного газа.

Как показали эксперименты [9], температура газа практически не меняется по длине пробки при $V \leq 13$ км/сек, что оправдывает предположение о постоянстве энтальпии.

Для процессов ионизации атомов азота и кислорода электронным ударом использовались константы скорости, полученные выше. Значения τ принимались равными 10^{-8} сек.

На фиг. 1 приведены профили электронных концентраций $c_e = \rho_e / \rho$ для скорости $V=10$ км/сек и различных значениях давления (цифрам 1, 2 и 3 соответствуют значения $p_\infty = 0.5, 0.2$ и 0.05 тор), в зависимости от параметра бинарного подобия $p_\infty \cdot \tau$ в мсек · тор, рассчитанные при значениях сечения возбуждения электронным ударом $\sigma^* = 10^{-17}$ см² [13]. Пунктирными прямыми обозначены соответствующие равновесные значения c_e . Видно, что с уменьшением давления различие в значениях концентрации электронов, рассчитанных по предложенной методике, и равновесных концентраций увеличивается. Кривой 4 показана концентрация c_e при $p_\infty = 0.05$ тор и экспериментально полученном сечении $\sigma^* = 2 \cdot 10^{-19}$ см² [15].

Из поведения кривых зависимости концентрации c_e от произведения $p_{\infty}t$ можно сделать вывод о нарушении закона бинарного подобия в рассматриваемых условиях.

На фиг. 2 приведены расчетные и экспериментальные значения плотности электронов N_e в зависимости от скорости ударной волны. Кривыми 1 и 2 показаны равновесные значения N_e соответственно для давлений 0.5 и 0.05 тор. Кривыми 3 и 4 показаны результаты численных расчетов по предложенной методике при $\sigma^* = 10^{-17} \text{ см}^2$. Кривая 5 соответствует давлению $p_{\infty} = 0.05 \text{ тор}$ и $\sigma^* = 2 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2$. Здесь же приведены экспериментальные точки 6, полученные в [7] при $p_{\infty} = 0.05 \text{ тор}$, и точка 7, полученная при $V = 9.25 \text{ км/сек}$ и $p_{\infty} = 0.5 \text{ тор}$ в экспериментах, описанных ниже.

Из сопоставления рассчитанных и экспериментально измеренных концентраций электронов можно заключить, что предлагаемая модель в целом удовлетворительно объясняет разницу в получающихся на выходе из зоны релаксации значениях N_e с термодинамически равновесными.

Следует отметить, что с увеличением скорости происходит постепенное сближение расчетных и термодинамически равновесных значений N_e , что обусловлено уменьшением τ_e из-за возрастания степени ионизации ($\tau_e \sim 1/N_e$). Область максимального различия в значениях N_e с уменьшением давления смещается в сторону больших скоростей, что также обусловлено зависимостью τ_e от N_e .

4. С целью проверки правильности расчета излучения и других параметров газа за ударной волной были проведены эксперименты по измерению концентрации электронов с помощью лазерного интерферометра и заселенности уровней атомов по интенсивности излучения линий.

Измерения проводились в электроразрядной ударной трубе с диафрагмой, описанной в [7, 16]. Камера высокого давления внутренним диаметром 25 мм и длиной 150 мм наполнялась толкающим газом (гелием) при давлении $p = 10 \text{ атм}$, который нагревался разрядом батареи конденсаторов с энергией 20 Кдж. Камера низкого давления, наполнявшаяся очищенным и осушенным воздухом в режиме протока при давлении $p = 27 \text{ Па}$ (0.2 тор) и 65 Па (0.5 тор), состояла из нескольких отсеков из стекла и заканчивалась измерительным отсеком из нержавеющей стали общей длиной 3 м и диаметром 6 см. Исследованные режимы соответствовали скоростям ударной волны от 7 до 12.5 км/сек, которая измерялась с точностью 1.5% системой ионизационных датчиков и пьезодатчиков давления.

Для всех указанных режимов наблюдался передний фронт свечения, соответствующий фронту ударной волны, и свечение воздушной плазмы на протяжении 2.5–10 мксек. Протяженность образующейся за ударной волной пробки контролировалась различными методами: по свечению, сигналами ионизационного и пьезодатчиков, фоторегистрацией интерферограмм лазерного излучения с длиной волны $\lambda = 0.63 \text{ мкм}$.

Измерения интенсивности излучения осуществлялись с помощью прокалиброванного по длинам волн и абсолютной энергетической чувствительности спектрометра, имеющего несколько каналов регистрации излучения. Для измерений были выбраны интенсивные линии кислорода $O I \lambda_0 = 7773 \text{ \AA}$ и азота $\lambda_0 = 7452 \text{ \AA}$, а также излучение в сплошном спектре $\lambda = 8000 \text{ \AA}$. Линии кислорода, составляющие мультиплет $^3s-^3p$, и азота, входящие в мультиплет $^4p-^4s$, относились к нижним возбужденным уровням этих атомов с энергией возбуждения $E^*/k = 125\,000$ и $E^*/k = 139\,300$ соответственно.

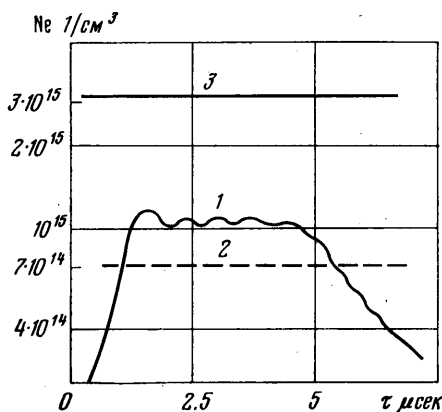
Выбор указанных линий не был случаен. Для них в литературе имеются надежные значения сил осцилляторов, которые равны 0.1–1 [17], линии не реабсорбированы, начальные и конечные энергетические состояния далеко отстоят от уровней энергии, подверженных влиянию эффектов снижения потенциала ионизации. Кроме того, эти линии являются изолированными и их интенсивность превышает интенсивность подстилающего фона и весьма чувствительна к концентрации электронов.

Учитывая специфику расположения уровней атомов кислорода и азота, можно видеть, что закономерности поведения интенсивности этих линий будут характеризовать поведение всей совокупности интенсивных линий, соответствующих нижним возбужденным состояниям атомов с главным квантовым числом $n = 3$. Как известно из теории [18], эта группа линий вносит один из основных вкладов в энергию линейчатого излучения воздушной плазмы.

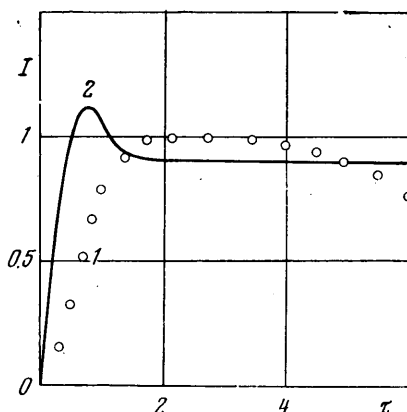
Для измерения концентрации электронов использовался лазерный интерферометр на длине волны $\lambda = 10.6 \text{ мкм}$, который был выполнен по схеме Майкельсона.

Используемый в качестве источника света лазер на углекислом газе работал в одномодовом режиме с пульсацией мощности не более 1%. На выходе инфракрасного интерферометра сигнал регистрировался фотоприемником, усилителем и осциллографом. Обработка осциллограмм позволяет по известной методике перейти от измеряемого сдвига фаз к концентрации электронов, так как рефракция всех остальных компонент пренебрежимо мала при длине волны $\lambda=10.6 \text{ мкм}$.

На фиг. 3 приведено распределение электронной концентрации за фронтом ударной волны в зависимости от времени (кривая 1) для $V=9.2 \text{ км/сек}$ и $p_{\infty}=0.5 \text{ тор}$. Здесь же приведены значения N_e , рассчитан-



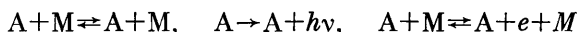
Фиг. 3



Фиг. 4

ные по описанной выше методике (кривая 2), и равновесные значения N_e (кривая 3). Видно, что согласие численных расчетов и экспериментов вполне удовлетворительное, в то время как равновесное значение N_e превышает экспериментальное в несколько раз. Несколько меньшее значение N_e , полученное в расчетах, по сравнению с экспериментальным объясняется тем, что при таком давлении пробка нагретого ударной волной газа уже не является оптически прозрачной.

На фиг. 4 приведены профили интенсивности излучения линии кислорода (переход ${}^3s-{}^5p$, I в $\text{вт/см}^3\text{стер}$), полученные в эксперименте при $V=12 \text{ км/сек}$ и $p_{\infty}=0.2 \text{ тор}$ (кривая 1). При данных условиях равновесная интенсивность излучения этой линии (на фигуре не показана) превышает полученную в эксперименте более чем в сорок раз. При расчете интенсивности излучения атомных линий были учтены следующие процессы:

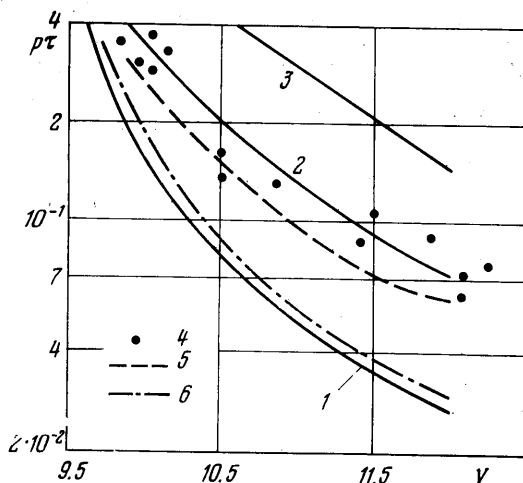


Здесь M — любая тяжелая частица или электрон. Сечения возбуждения атомов электронным ударом брались равными $\sigma^*=2 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2$ [15]. Кривой 2 приведена интенсивность излучения рассматриваемой линии, полученная в расчете. Видно хорошее согласие результатов, кроме зоны релаксации, в которой отличие существенно и связано, по-видимому, с использованным сечением возбуждения атомов ударами тяжелых частиц ($\sigma^*=10^{-21} \text{ см}^2$).

С увеличением давления различие между измеренной и равновесной интенсивностями излучения линий уменьшается, оставаясь, однако, существенным вплоть до давлений $p_{\infty}=1 \text{ тор}$, когда давление за ударной волной выше или равно атмосферному. Аналогичные результаты для интенсивности излучения систем молекулярных полос на примере четвер-

той положительной системы полос окиси углерода $\text{CO}(4+)$ получены в [12].

Зависимость величины $p_{\infty}\tau$ (мксек·тор) от скорости ударной волны показана на фиг. 5. Сплошными кривыми 1, 2, 3 доказаны результаты, полученные по предложенной методике для давлений 0.5, 0.2 и 0.05 тор соответственно. Точками 4 обозначены экспериментальные данные, полученные в [9] для $p_{\infty}=0.2$ тор. Кривыми 5 и 6 приведены величины, полученные теоретически в работах [10] и [7] соответственно. Из поведения кривых на фиг. 5 можно заключить, что не существует универсальной



Фиг. 5

зависимости величины $p_{\infty}\tau$ от скорости V в области $V > 9$ км/сек, как это предполагалось ранее [2].

Результаты численных расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными [9] при $p_{\infty}=0.2$ тор и практически совпадают с теоретически полученными в [6] при $p_{\infty}=0.5$ тор, когда рассматриваемый эффект практически исчезает из-за большой плотности.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что важным процессом, который необходимо учитывать при проведении экспериментов в ударных трубах и при расчетах обтекания затупленных тел при скоростях $V \geq 9.5$ км/сек и давлениях $p_{\infty} < 1$ тор, является уменьшение скорости ионизации атомов электронным ударом при отсутствии бальмановского распределения атомов по возбужденным состояниям. Этот эффект аналогичен хорошо изученному явлению колебательно-диссоциационного взаимодействия [20], которое также характеризуется уменьшением величины скорости прямой реакции диссоциации при неполной релаксации колебательных степеней свободы.

Поступила 29 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Залогин Г. Н., Лунев В. В., Пластинин Ю. А. Ионизация и неравновесное излучение воздуха за сильными ударными волнами. 3-я Всес. конф. Динамика излучающего газа. Тез. докл. М., 1977.
2. Биберман Л. М., Якубов И. Т. Состояние газа за фронтом сильной ударной волны. Теплофиз. высоких температур, 1965, т. 3, № 3.
3. Лосев С. А., Полянский В. А. Неравновесная ионизация воздуха за фронтом ударной волны при скорости 5–10 км/сек. Изв. АН СССР, МЖТ, 1968, № 1.

4. Биберман Л. М., Воробьев В. С., Лагарьков А. Н., Стулов В. П., Теленин Г. Ф., Шапиро Е. Г., Якубов И. Т. Течение воздуха за фронтом сильной ударной волны с учетом неравновесной ионизации и излучения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
5. Железняк М. Б., Мнацаканян А. Х., Якубов И. Т. Релаксация и неравновесное излучение за ударными волнами в воздухе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 4.
6. Allen R. A., Rose P. H., Samt J. C. Non-equilibrium and equilibrium radiation at super-satellite re-entry velocities. Inst. Aeronaut. Sci. Paper, 1963, No. 63-77.
7. Wilson J. Ionization rate of air behind high-speed shock waves. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 10.
8. Scharfman W. E., Taylor W. C. Use of ion probes in supersonic plasma flow. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 6.
9. Гладышев М. К., Горелов В. А. Экспериментальное определение времени ионизации за сильной ударной волной в воздухе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1.
10. Малкин О. А. Релаксационные процессы в газе. М., Атомиздат, 1971.
11. Смирнов Б. М. Физика слабоионизованного газа в задачах с решениями. М., «Наука», 1972.
12. Залогин Г. Н. О влиянии неравновесного излучения на обтекание затупленных тел разреженным газом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
13. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
14. Lin S.-C., Teare J. D. Rate of ionization behind shock waves in air 2. Theoretical interpretations. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3.
15. Хастед Дж. Физика атомных столкновений. М., «Мир», 1965.
16. Войков В. А., Карасев А. Б., Ткаченко Б. К., Журич В. В. Экспериментальные исследования равновесного излучения воздуха и смеси $\text{CO}_2 + \text{N}_2$ за ударными волнами при скоростях 8-12 км/сек. Ракетная техника и космонавтика, 1976, т. 14, № 3.
17. Касабов Г. А., Елисеев В. В. Спектроскопические таблицы для низкотемпературной плазмы. М., Атомиздат, 1973.
18. Каменщиков В. А., Пластинин Ю. А., Николаев В. М., Новицкий Л. А. Радиационные свойства газов при высоких температурах. М., «Машиностроение», 1971.
19. Железняк М. Б., Мнацаканян А. Х. Ионизационная релаксация за ударными волнами в воздухе. Теплофиз. высоких температур, 1968, № 3.
20. Яловик М. С., Лосев С. А. Кинетика колебательного возбуждения и диссоциации молекулярного азота при высоких температурах. Науч. тр. Ин-та мех. МГУ, 1972, № 18.