

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ЭФФЕКТОВ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ

Е. Л. ТАРУНИН

(Пермь)

Эффект пристенного скольжения наблюдается при течении неньютоновских жидкостей [1-4] и разреженных газов [5]. Наиболее полные сведения о явлении скольжения получены в капиллярной вискозиметрии. При малых радиусах капилляров и в пористых средах эффект проскальзывания проявляется даже для ньютоновских жидкостей (вода, керосин и др.) [6]. Эксперименты [2, 4] показывают, что эффектами входного участка можно пренебречь при длине капилляров, превышающей его радиус ~ в 100 раз. При снятии реологических характеристик высоковязких жидкостей использование длинных капилляров затруднено и возникает необходимость в проведении расчетов двумерного течения на входном участке с учетом эффектов проскальзывания. Необходимость в подобных расчетах возникает, например, и при выборе оптимальных параметров шнековых устройств, используемых для переработки полимеров [7].

Расчет двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости часто осуществляется в переменных функции тока и вихря скорости ψ , $\varphi = -\Delta\psi$ [8-14]. Формулы для вихря скорости на границе обычно получаются из условия вязкого прилипания [8, 9]. В работе получены формулы для вихря на твердой границе при наличии пристенного скольжения. Полученные формулы использованы для решения тестовой задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в каверне.

1. Вывод формулы для вихря. Эксперименты [4] показывают, что толщина пристеночного слоя значительно меньше радиуса и лишь в некоторых случаях достигает 0.02 долей радиуса. Пренебрегая гидродинамическими эффектами в тонком пристеночном слое δ , будем считать, что жидкость имеет на границе скорость

$$(1.1) \quad v|_{\Gamma} = V_0 + v_s$$

$$(1.2) \quad v_s = \beta(\tau) \tau = \beta v_s \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = \kappa(\varphi|_{\Gamma}) \varphi|_{\Gamma}$$

Здесь V_0 — заданная скорость вертикальной границы Γ , v_s — скорость скольжения вдоль непроницаемой границы, τ — напряжение сдвига, а β и κ — коэффициенты, в общем случае зависящие от напряжения сдвига и различных параметров. Зависимость вида (1.2) использовалась во многих работах [3, 5]. При течении через капилляры эксперименты обнаруживают зависимость коэффициентов β от радиуса капилляра. Пластичные среды [4] обнаруживают критическое напряжение сдвига, при превышении которого начинает проявляться эффект проскальзывания.

Использование линейной зависимости (1.2) упрощает дальнейшие выводы и позволяет получить простые аппроксимационные формулы. Следует, однако, отметить, что полученные формулы могут быть использованы для зависимости $v_s(\tau)$ более общего вида. При этом удобнее считать, что вновь справедлива зависимость (1.2) с коэффициентом κ , зависящим от $\varphi|_{\Gamma}$.

Будем искать формулу для вихря в общем виде [9]

$$(1.3) \quad \varphi_0 = N^2 \sum_{j=0}^{m_1} k_j^s \psi_j + N k^s V_0 + \sum_{j=1}^{m_2} l_j^s \varphi_j$$

$$(1.4) \quad k^s = \sum_{j=1}^{m_1} j k_j^s, \quad k_0^s = \sum_{j=1}^{m_1} k_j^s$$

Здесь индекс j соответствует номеру узла пространственной сетки, отсчитываемому по нормали к границе; k_j^s , l_j^s — искомые коэффициенты; $h = N^{-1}$ — шаг сетки.

Предполагая гладкость функции тока и вихря скорости за пределами пристеночного слоя ($\delta < h$), воспользуемся разложениями

$$(1.5) \quad \varphi_j = \varphi_0 + jh \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 + \frac{(jh)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 + \dots$$

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \psi_j &= \psi_0 + jh \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0 + \frac{(jh)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_0 + \frac{(jh)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right)_0 + \dots = \\ &= \psi_0 - jh(V_0 + v_s) - \frac{(jh)^2}{2!} \varphi_0 - \frac{(jh)^3}{3!} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 - \dots \end{aligned}$$

Подставляя (1.5), (1.6) в (1.3) и используя (1.2), из требования аппроксимации получим

$$(1.7) \quad k_j^s = ck_j, \quad l_j^s = cl_j, \quad k^s = ck = c \sum_{j=1}^{m_1} j k_j$$

$$(1.8) \quad c = 1 + \kappa ckN = \frac{1}{1 - \kappa kN}, \quad 0 \leq c \leq 1$$

В этих формулах коэффициенты k_j и l_j (без знака s) соответствуют случаю без проскальзывания [9]. Приведем в качестве примеров формулы А. Тома, Вудса и Пирсона [7-9], записанные с учетом эффекта пристеночного скольжения

$$(1.9) \quad \varphi_0 = -\frac{2N}{1+2\kappa N} (N\psi_1 + V_0)$$

$$(1.10) \quad \varphi_0 = -\frac{N}{1+3\kappa N} (3N\psi_1 + 3V_0 + 0.5h\varphi_1)$$

$$(1.11) \quad \varphi_0 = -\frac{N}{1+3\kappa N} (4N\psi_1 - 0.5N\psi_2 + 3V_0)$$

При отсутствии скольжения ($\kappa = 0$) формулы превращаются в известные; при $\kappa \rightarrow \infty$ вихрь на границе стремится к нулю, что соответствует отсутствию тангенциальных напряжений.

2. Постановка задачи и метод решения. Течение вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей полость квадратного сечения, вызвано заданной скоростью V_0 верхней границы. Уравнения движения в безразмерных пе-

ременных в стационарном случае и граничные условия имеют вид

$$(2.1) \quad \Delta\varphi = \text{Re} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)$$

$$(2.2) \quad \Delta\psi + \varphi = 0, \quad \psi|_{\Gamma} = 0$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 1 \quad (y=1); \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad (y=0, x=0, 1)$$

Здесь $\text{Re} = aV_0/\nu$ — число Рейнольдса, \mathbf{n} — нормаль к границе области Γ . В качестве единиц расстояния и скорости выбраны соответственно сторона квадрата a и скорость V_0 верхней границы.

Описанная задача, которая часто решалась двухполюсовым методом [10–12], использована в качестве теста для проверки работоспособности формул для вихря при наличии эффектов проскальзывания. Вычисления выполнены в приближении ползущего течения ($\text{Re} = 0$). Предполагается, что между локальными значениями скорости проскальзывания и вихрем на границе справедлива линейная связь (1.2) с $\kappa = \text{const}$.

При сформулированных допущениях задача имеет единственный параметр κ , характеризующий степень проскальзывания; $\kappa = 0$ соответствует обычному условию вязкого прилипания; $\kappa = \infty$ соответствует случаю свободных границ. Отметим, что задача имеет аналогию с задачей теории упругости [16]; величина ψ при этом характеризует отклонение тонкой пластинки от положения равновесия при отгибании верхней границы. Обычно такого рода задачи рассматриваются для двух предельных случаев — жесткое защемление и свободно опертая пластина. Учет «проскальзывания» для задачи упругости может характеризовать зависимость защемления от напряжения («полужесткое» защемление).

По полученным значениям функций в узлах квадратной сетки вычислялись интегральные характеристики — максимальные значения модулей функции тока ψ_m и вихря скорости φ_m , кинетическая энергия E и сила сопротивления F

$$(2.4) \quad E = \frac{h^2}{2} \sum_{i,k=1}^{N-1} \psi_{i,k} \varphi_{i,k}, \quad F = h \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_{i,N}$$

Опишем кратко метод решения [14]. Значения вихря на границе изменялись только на внешних итерациях. Одна внешняя итерация состояла из трех этапов. На первом этапе решалось уравнение для вихря при граничных условиях, определенных на предыдущей n -й итерации. На втором этапе решалось уравнение Пуассона (2.2) для функций тока. Конечно-разностные уравнения, соответствующие первому и второму этапам, решались итерационным методом (внутренние итерации) последовательной верхней релаксации. Внутренние итерации для вихря прекращались при выполнении соотношения

$$(2.5) \quad \max_{i,k} |\varphi_{i,k}^{(s+1)} - \varphi_{i,k}^{(s)}| < \varepsilon_\varphi \varphi_m$$

где s — номер внутренней итерации. Аналогичное соотношение с $\varepsilon_\varphi = 2\varepsilon_\psi = 10^{-4}$ использовалось на втором этапе. На третьем этапе вычислялись $(n+1)$ -е значения вихря на границе с применением процедуры релаксации [9, 14]. Без релаксации при $\kappa = 0$ процесс оказывается обычно расходящимся. Решение считалось полученным при выполнении соотношения (обычно $\varepsilon \leq 10^{-4}$)

$$(2.6) \quad \max_{\Gamma} |\varphi|_{\Gamma}^{(n+1)} - \varphi|_{\Gamma}^{(n)}| < \varepsilon\omega\varphi_m$$

где ω — параметр релаксации.

Увеличение κ повышает устойчивость вычислительного процесса, при $\kappa \geq 0.5$ возможен счет без релаксации. Собственные значения матрицы перехода двухполюсного метода [8] умножаются при $\kappa \neq 0$ на коэффициент $c < 1$ из (1.8); для одномерного варианта легко вычисляется оптимальное значение параметра релаксации

$$(2.7) \quad \omega^* = \frac{1}{1 - c^{-1/3}ckN}$$

Для определения погрешности решения расчеты выполнялись на различных сетках. Сокращение затрат машинного времени при этом достигалось за счет использования метода последовательности сеток [15]: решение, полученное на грубой сетке, после интерполяции использовалось в качестве начального приближения для более детальной сетки. В отличие от [15] была выбрана последовательность сеток с $h_m = h_0 2^{-m}$ ($m=0, 1, 2$), упрощающая программу интерполяции.

3. Результаты. Рассмотрим вначале результаты, относящиеся к случаю без «проскальзывания». Для этого случая получены оценки погрешности интегральных характеристик для двух аппроксимационных формул вихря на границе — формулы Тома [8] и формулы [13], обладающей повышенной устойчивостью

$$(3.1) \quad \varphi_{i,N-1} = \frac{1}{h^2} (4\psi_{i,N-1}^* - \psi_{i,N-2} - \psi_{i+1,N-1}^* - \psi_{i-1,N-1}^*)$$

$$(3.2) \quad \psi_{i,N-1}^* = \frac{1}{2}\psi_{i,N-2} - \frac{1}{9}\psi_{i,N-3} - \frac{1}{3}h$$

Формула (3.1) написана для верхней границы, аналогичный вид имеют формулы и на других границах, но без последнего члена в (3.2).

Обработка результатов, полученных при использовании формулы Тома, дает следующие зависимости:

$$(3.3) \quad \psi_m \approx 0.0999(1 - 2.5h^2), \quad F \approx 19(1 - 1.84\sqrt{h})$$

$$(3.4) \quad E \approx 33.2(1 - 19.5h^2), \quad \varphi_m \approx 95(1 - 3.1\sqrt{h})$$

Формулы (3.3) справедливы при $h < 1/16$, а (3.4) при $h < 1/20$. Отметим, что при $Re=300$, например, согласно [11, 12], погрешность вычисления ψ_m на порядок больше. Так как при использовании формул (3.1)–(3.2) коэффициент при главном члене погрешности в ψ_m ($h < 1/20$) примерно вдвое больше, дальнейшие расчеты выполнялись с использованием формулы Тома.

Перейдем к обсуждению результатов при проскальзывании. Рассмотрим вначале влияние проскальзывания на некоторые точные решения. В случае течения через капилляр

$$u = u + \frac{2Q_0(1-r^2)}{\pi}, \quad u_s = \frac{4Q_0\kappa}{\pi}, \quad Q = Q_0(1+4\kappa)$$

В этих формулах Q — расход при проскальзывании, а Q_0 — расход при $\kappa=0$. Эксперименты [2] обнаруживают 10-кратное увеличение расхода ($\kappa > 2$).

В случае плоского течения Куэтта ($0 \leq y \leq 1$)

$$u = u_s(1-2y) + 2Q_0y, \quad u_s = \frac{2Q_0\kappa}{1+2\kappa}, \quad Q = Q_0$$

расход при проскальзывании не меняется, но в $(1+2\kappa)$ раз уменьшается касательное напряжение.

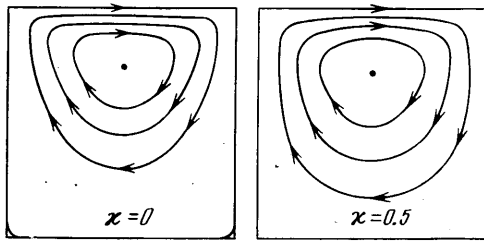
Для конвективного течения между двумя вертикальными пластинами, нагретыми до различной температуры [17], также легко находится реше-

ние ($0 \leq x \leq 1$, G — число Грасгофа)

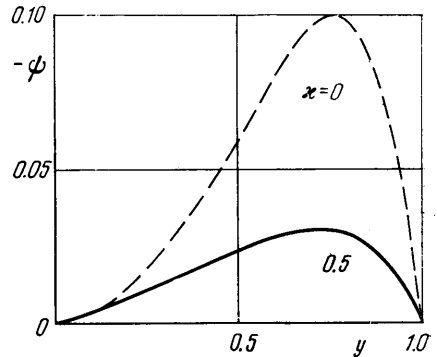
$$v = v_s(1-2x) + \frac{G}{12} x(1-x)(1-2x), \quad v_s = \frac{\kappa G}{12(1+2\kappa)}$$

$$Q = Q_0 \left(1 + \frac{8\kappa}{1+2\kappa} \right), \quad Q_0 = \int_0^{0.5} v_0(x) dx = \frac{G}{384}$$

Как видно, в этом случае предельное значение $v_s = G/24$ при $\kappa = \infty$ соответствует варианту со свободной границей, при котором $Q = 5Q_0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для области единичного круга задача $\Delta \Delta \psi = G$, $\psi(1) = 0$, $\psi_r'(1) = \kappa \psi(1)$, сформулированная для функции тока и вихря скорости, соответствует стоксовому приближению о конвективном течении вязкой жидкости в поле температуры $T = r \cos \theta$. Решение этой задачи таково

$$\psi = \frac{G}{24} \left(\frac{2(1+4\kappa)r^2 - (1+6\kappa)}{(1+2\kappa)} - r^4 \right), \quad v_s = \frac{G\kappa}{8(1+2\kappa)}$$

Обе конвективные задачи имеют аналогию с задачами упругости. Так, последняя задача соответствует задаче о прогибе тонкой круглой мембраны, нагруженной силой, пропорциональной G . Для максимального отклонения пластины от положения равновесия в центре области для «полужесткого» защемления получается значение

$$\psi_m = \psi_m^0 \left(\frac{1+6\kappa}{1+2\kappa} \right), \quad \psi_m^0 = \frac{G}{64}$$

В задаче, сформулированной в п. 2, наличие эффекта проскальзывания приводит к тому, что уменьшается вязкое увлечение подвижной границей, с одной стороны, и уменьшается сопротивление вязкому трению на неподвижных границах, с другой стороны. Значение вихря на границе $y=1$ определялись по формуле (1.9). Аналогичные формулы использовались на других границах, но без свободного члена.

Увеличение κ приводит к уменьшению интенсивности вихревого течения. На фиг. 1 линиями тока $\psi_j = j\psi_m^{1/4}$ ($j=0, 1, 2, 3$) представлены картины течения при $\kappa=0$ (слева) и $\kappa=0.5$. Градиенты скорости уменьшились; центр вихря, отмеченный точкой, немного сместился вниз; исчезли малоинтенсивные вихри в нижних углах полости.

κ	ψ_m	φ_m	E	F
0	0.0994	34.7	0.0321	12.0
0.1	0.0663	7.19	0.0131	4.57
0.25	0.0449	3.40	0.00596	2.58
0.5	0.0295	1.825	0.00257	1.53
1.0	0.0176	0.952	$0.915 \cdot 10^{-3}$	0.846
5.0	0.00417	0.198	$0.518 \cdot 10^{-4}$	0.1865
10	0.00214	0.0994	$0.136 \cdot 10^{-4}$	0.0945
100	$0.218 \cdot 10^{-3}$	0.00999	$0.142 \cdot 10^{-6}$	0.00957

На фиг. 2 представлены значения функции тока на вертикальном разрезе, проходящем через центр полости. Максимальное значение функции тока уменьшилось примерно в 3.4 раза, а сопротивление трению в 7.7 раза. Скорость увлечения жидкости на верхней границе при $\kappa=0.5$ составляет 26% от граничной, а величина скорости проскальзывания на нижней границе в этом же сечении $\approx 3.5\%$. Наибольшая скорость проскальзывания (больше 90%) соответствует верхним углам полости. Значительно уменьшились по модулю значения вихря на границе и перепады в значениях — при $y=1$ отношение $\max_x |\varphi| / \min_x |\varphi| \approx 6$, а при $\kappa=0.5$ это отношение уменьшилось почти в 5 раз.

Расчеты при различных значениях шага сетки показали, что при $\kappa=0.5$ коэффициенты при h^2 для формулы ψ_m типа (3.3) примерно вдвое больше, чем при $\kappa=0$.

Значения интегральных характеристик при различных значениях κ ($N=24$) представлены в таблице.

Обработка этих результатов позволила получить простые формулы

$$\psi_m(\kappa) = \frac{\psi_m(0)}{1+4.6\kappa}, \quad F(\kappa) = \frac{F(0)}{1+13.4\kappa}$$

справедливые при $\kappa > 0.5$ (при $\kappa < 0.5$ скорость убывания этих величин немного выше). Для скорости проскальзывания на верхней границе при $x=0.5$ получена формула

$$u_s \approx \frac{5.7\kappa}{1+5.7\kappa}$$

Выполненные расчеты подтверждают сильное влияние эффекта проскальзывания на характеристики течения и показывают работоспособность выведенных в п. 1 формул для вихря скорости на границе.

При расчете течений неньютоновских жидкостей соответствующим образом меняется первый этап вычисления вихря внутри области, а вычисление вихря на границе $\varphi_0^{(n+1)}$ может быть осуществлено по формуле (1.3) с релаксацией и коэффициентом κ , зависящим от модуля вихря на границе $\kappa = \kappa(\varphi_0^{(n)})$.

Поступила 9 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Толстой Д. М. Об эффекте пристенного скольжения дисперсных систем. 1. Происхождение, размеры и значение эффекта. Коллоидн. ж., 1947, т. 9, № 6.
2. Гориславец В. М., Дунец А. А. Исследование реологических свойств концентрированных суспензий при наличии пристенного эффекта. Инж.-физ. ж., 1975, т. 29, № 2.
3. Олдройд Д. Г. Неньютоновское течение жидкостей и твердых тел. В кн.: Реология. М., Изд-во иностр. лит., 1962.

4. *Трилисский К. К., Фройнштетер Г. Б., Смородинский Э. Л., Грищук В. И.* О пристенном эффекте при течении пластичных дисперсных систем. Коллоид. ж., 1973, т. 35, вып. 6.
5. *Девуен М.* Течение и теплообмен разреженных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. *Дерягин Б. В., Федякин Н. Н.* Скольжение жидкостей в капиллярах. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 6.
7. *Переадчук В. П.* Влияние пристенного скольжения на оптимальные параметры шнека. В сб. Научн. труды Перм. политехн. ин-та, 1975, № 171.
8. *Кускова Т. В., Чудов Л. А.* О приближенных граничных условиях для вихря при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости. В сб. Вычисл. методы и программирование, вып. 11. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968.
9. *Тарунин Е. Л.* Анализ аппроксимационных формул для вихря скорости на твердой границе. Уч. зап. Перм. пед. ин-та, 1975, № 152.
10. *Симуни Л. М.* Численное решение некоторых задач движения вязкой жидкости. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 3.
11. *Кускова Т. В.* Численное исследование двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости. В сб. Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, вып. 3. М., Изд-во Моск. ун-та, 1971.
12. *Сидельников В. Н., Шутько А. В.* К методу простой итерации для численного решения стационарного уравнения переноса с параметром малости при старших производных. Обнинск, 1976 (Физ.-энерг. ин-т, Препринт № 726).
13. *Полежаев В. И., Грязнов В. Л.* Метод расчета граничных условий для уравнений Навье – Стокса в переменных «вихрь, функции тока». Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 2.
14. *Тарунин Е. Л.* Оптимизация неявных схем для уравнений Навье – Стокса в переменных функции тока и вихря скорости. Тр. 5-го семинара по числ. методам мех. вязкой жидкости, ч. 1. Новосибирск, 1975.
15. *Тарунин Е. Л.* Метод последовательности сеток для задач свободной конвекции. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 2.
16. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М., «Наука», 1975.
17. *Гершуни Г. Э., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.