

## О ВЛИЯНИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВНУТРЕННИХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ МОЛЕКУЛ НА ПРОЦЕСС СЛАБОГО ИСПАРЕНИЯ ИЛИ КОНДЕНСАЦИИ

А. А. АБРАМОВ, Н. К. МАКАШЕВ

(Москва)

Рассмотрен процесс слабого испарения (конденсации) с учетом возбуждения колебательных и вращательных степеней свободы двухатомных молекул. Решение соответствующей задачи о слое Кнудсена получено на основе модельного кинетического уравнения типа уравнения Морза [1]. Получено соотношение, устанавливающее связь между скоростью испарения (конденсации) и параметрами поверхности и газа над ней. Проведен анализ граничных условий скольжения для уравнений газовой динамики. Результаты сравниваются со случаем испарения (конденсации) в одноатомном газе. Рассмотрен вопрос о введении коэффициентов аккомодации для испаряющейся поверхности.

**1. Режим слабого испарения.** Под термином «слабое испарение или конденсация» обычно понимают такой процесс, когда нормальная к поверхности составляющая среднемаховой скорости, обусловленная испарением или конденсацией, имеет величину порядка нормальной составляющей скорости в пограничном слое, если  $Re \gg 1$ , или основной скорости течения, если  $Re \leq O(1)$ . В этих случаях процессы теплопроводности и диффузии по нормали к поверхности оказывают существенное влияние на скорость испарения, которая имеет одинаковую с ними по порядку величину  $Re^{-1/2}$ , если  $Re \gg 1$ , и  $M Re^{-1} \sim Kn$ , если  $Re \leq O(1)$ . Такой процесс испарения (конденсации) для случая одноатомного газа исследовался, например, в [2-6] с помощью тем или иным способом построенного решения кинетических уравнений в кнудсеновском слое над испаряющейся поверхностью.

Использование в данном случае кинетического описания на уровне функции распределения обусловлено тем, что интересующий процесс происходит непосредственно на границе раздела фаз, т. е. на дне слоя Кнудсена, в котором уравнения газодинамики неприменимы [7].

Поскольку реальные молекулы обладают внутренними степенями свободы (вращательными, колебательными и т. д.), а процесс испарения или конденсации во многих практически интересных случаях происходит при таких температурах, когда эти степени свободы возбуждены, представляет определенный интерес рассмотреть задачу об испарении (конденсации) многоатомного газа и установить характер влияния возбуждения внутренних степеней свободы молекул на этот процесс. Попутно может быть также установлен характер влияния многоатомности молекул и испарения или конденсации на такие величины, как скачок температуры и скорость скольжения.

Содержание термина «слабое испарение» в этом случае должно быть несколько расширено в связи с тем обстоятельством, что в зависимости от конкретной ситуации над поверхностью может образовываться подслоя неравновесного течения с толщиной  $\sim l/A_*^{-1/2}$ , где  $l$  — длина пробега, а  $A_*$  — вероятность того неупругого процесса, происходящего при столкновении молекул, который приводит к установлению единой температуры для всех рассматриваемых степеней свободы молекул. Очевидно, что в этом случае вплоть до скоростей испарения порядка  $A_*^{1/2}$  процессы теплопроводности и диффузии будут оказывать на эту скорость существенное влияние.

Влияние многоатомности молекул на скачок температуры для непроницаемой поверхности рассматривалось в [8]. Ниже проводится сравнение полученных результатов для скачка температуры с данными [8].

Кроме того, задача о слое Кнудсена в многоатомном газе с учетом возбуждения вращательных и колебательных степеней свободы рассматривалась и в [9]. Поста-

новка задачи, принятая в данной работе, отличается от постановки [9] следующим:

- а) рассматривается испаряющаяся поверхность,
- б) учитывается возможная неравновесность вращательных степеней свободы молекул в слое Кнудсена,
- в) строится точное численное решение модельного кинетического уравнения Больцмана в форме Морза [4].

Выбор для решения рассматриваемой здесь задачи модельного кинетического уравнения для функции распределения был обусловлен следующими обстоятельствами. Решение точного уравнения Больцмана, если его проводить достаточно строго, представляет собой очень сложную задачу, особенно для многоатомных молекул. В то же время, как известно, использование для решения задачи о кнудсеновском слое модельных уравнений приводит к достаточно точным значениям «параметров скольжения», т. е. тех численных коэффициентов, которые входят в выражения для скорости скольжения, скачка температуры или скорости испарения.

**2. Постановка задачи.** Примем, что функция распределения молекул удовлетворяет уравнению

$$\frac{df_{v_1 v_2}}{dt} = \frac{\partial f_{v_1 v_2}}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f_{v_1 v_2}}{\partial x_i} = \sum_l A_l n (f_{0l}^{v_1 v_2} - f_{v_1 v_2}), \quad l=1, 2, 3$$

$$(2.1) \quad f_{01}^{v_1 v_2} = n \varphi_{v_1}(T_{11}) \varphi_{v_2}(T_{12}) (h/\pi)^{1/2} \exp(-hc^2)$$

$$f_{02}^{v_1 v_2} = n \varphi_{v_1}(T_{01}) \varphi_{v_2}(T_{02}) (h_{01}/\pi)^{1/2} \exp(-h_{01}c^2)$$

$$f_{03}^{v_1 v_2} = n \varphi_{v_1}(T_{02}) \varphi_{v_2}(T_{02}) (h_{02}/\pi)^{1/2} \exp(-h_{02}c^2)$$

$$\varphi_{v_j}(T) = g_{v_j} \exp\left(-\frac{E_{v_j}}{kT}\right) \left[ \sum_{s_j} g_{s_j} \exp\left(-\frac{E_{s_j}}{kT}\right) \right]^{-1}$$

$$h = m/2kT, \quad c = \xi - u, \quad E_{v_1} = \theta_1 v_1(v_1 + 1), \quad E_{v_2} = \theta_2(v_2 + 1/2)$$

Здесь  $j=1$  соответствует вращательным, а  $j=2$  — колебательным степеням свободы молекулы;  $g_{v_1} = 2v_1 + 1$ ,  $g_{v_2} = 1$  — кратности вырождения вращательных и колебательных уровней энергии с квантовыми номерами  $v_1$  и  $v_2$ ;  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — характеристические вращательный и колебательный кванты;  $\xi$  и  $u$  — скорость молекулы и среднемассовая скорость газа;  $m$  и  $k$  — масса молекулы и постоянная Больцмана;  $n$  — полная числовая плотность газа.

Входящие в (2.1) температуры определяются следующим образом:

$$\frac{3}{2}nkT = \sum_{v_1 v_2} \int f_{v_1 v_2} \frac{mc^2}{2} dc; \quad E_j^{eq}(T_{ij}) = E_j, \quad j=1, 2;$$

$$(2.2) \quad E_j = \frac{1}{n} \sum_{v_1 v_2} \int f_{v_1 v_2} E_{v_j} dc = \frac{1}{n} \sum_{v_1 v_2} n_{v_1 v_2} E_{v_j}, \quad E_j^{eq}(T_*) = \sum_{v_1 v_2} \varphi_{v_j}(T_*) E_{v_j}$$

$$3/2kT + E_1 = 3/2kT_{01} + E_1^{eq}(T_{01}), \quad 3/2kT + E_1 + E_2 = 3/2kT_{02} + E_1^{eq}(T_{02}) + E_2^{eq}(T_{02})$$

Сравнивая (2.1) и (2.2), можно убедиться в том, что соответствующие различным значениям индекса  $l$  слагаемые в правой части уравнения (2.1) описывают: процессы  $T-T$ ,  $R-R$ ,  $V-V$  для  $l=1$ ; процессы  $R-T$  и  $V-V$  для  $l=2$ ; процессы  $V-R-T$  для  $l=3$ . Здесь буквами  $T$ ,  $R$ ,  $V$  обозначены соответственно поступательные, вращательные и колебательные степени свободы. Символом  $R-T$ , например, описываются процессы, протекающие при столкновении молекул, которые приводят к обмену энергией между вращательными и поступательными степенями свободы.

В дальнейшем будем рассматривать такой диапазон температур, в котором имеют место соотношения

$$(2.3) \quad A_{2*} = A_2/A_1 = O(1), \quad A_{3*} = A_3/A_1 \ll 1$$

т. е. будем считать, что вероятность процессов  $R-R$ ,  $V-V$  и  $R-T$  при столкновении молекул порядка единицы, а вероятность процессов  $V-R-T$  много меньше единицы.

Примем следующую модель взаимодействия молекул газа с поверхностью. Пусть  $a$  — вероятность того, что падающая на поверхность молекула «поглотится» поверхностью, и пусть эта вероятность не зависит от скорости падающей молекулы. Тогда, если  $I_c$  — поток падающих на поверхность молекул, то часть  $aI_c$  из них поглотится, а часть  $(1-a)I_c$  — отразится диффузно с максвелловским распределением по скоростям и больцмановскими распределениями по вращательным и колебательным уровням с температурами  $T_r$ ,  $T_{r1}$ ,  $T_{r2}$  соответственно. Величины  $T_r$ ,  $T_{r1}$  и  $T_{r2}$  определяются свойствами течения газа над поверхностью, ее температурой и, например, коэффициентами аккомодации (см. ниже).

Кроме того, будем считать, что поверхность испаряет молекулы, идентичные молекулам, составляющим газ над ней, с интенсивностью, которая определяется одними лишь свойствами поверхности, и максвелловской функцией распределения по скоростям с температурой  $T_w$ . Распределение испаренных молекул по вращательным и колебательным степеням свободы будем предполагать больцмановским, причем вращательным степеням соответствует температура  $T_w$ , а колебательным —  $T_{iw}$ , в общем случае не равная  $T_w$ .

Иными словами, на поверхности будем предполагать следующее граничное условие на функцию распределения покидающих ее молекул

$$(2.4) \quad \begin{aligned} f_{v_1 v_2}(y=0, \xi_v > 0) &= f_r^{v_1 v_2} + f_{ev}^{v_1 v_2} \\ f_r^{v_1 v_2} &= n_r \varphi_{v_1}(T_{r1}) \varphi_{v_2}(T_{r2}) \left( \frac{m}{2\pi k T_r} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{m \xi^2}{2k T_r} \right) \\ f_{ev}^{v_1 v_2} &= a n_{ev}^0 \varphi_{v_1}(T_w) \varphi_{v_2}(T_{iw}) \left( \frac{m}{2\pi k T_w} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{m \xi^2}{2k T_w} \right) \end{aligned}$$

Здесь  $n_r$  — «плотность» отраженных молекул;  $n_{ev}^0$  — плотность насыщенного пара при температуре  $T_w$ ;  $f_r^{v_1 v_2}$  и  $f_{ev}^{v_1 v_2}$  — функции распределения отраженных и испаренных молекул. Кроме того, здесь и далее ось  $y$  направлена по нормали к поверхности в сторону газа, ось  $x$  — по касательной к поверхности. Для простоты рассмотрим случай двумерного течения.

В рамках принятой модели взаимодействия молекул с поверхностью коэффициенты аккомодации естественно вводить лишь для той доли падающих на поверхность молекул, которая впоследствии отражается от нее.

Поскольку выше на величину сечений упругих и различных неупругих процессов были наложены условия (2.3), то коэффициенты аккомодации можно вводить лишь для поступательных и вращательных степеней свободы, не конкретизируя при этом характер возбуждения (или девозбуждения) на поверхности колебательных степеней свободы. О возможности такого произвола говорит то обстоятельство, что при  $A_{3*} \ll 1$  колебательные степени свободы не должны сильно влиять на решение в кнудсовом слое.

Таким образом, на испаряющейся поверхности коэффициенты аккомодации для поступательных ( $\alpha_T$ ) и вращательных ( $\alpha_R$ ) степеней свободы

молекул определим следующим образом:

$$(2.5) \quad \alpha_T = (E_{CT}^* - E_{rT}) / (E_{CT}^* - E_{WT}), \quad \alpha_R = (E_{CR}^* - E_{rR}) / (E_{CR}^* - E_{WR})$$

Здесь  $E_{CT}^*$  и  $E_{CR}^*$  — потоки энергии поступательных и вращательных степеней свободы молекул, падающих на поверхность, а затем отражающихся от нее;  $E_{rT}$  и  $E_{rR}$  — потоки энергии этих степеней свободы для молекул, отраженных поверхностью;  $E_{WT}$  и  $E_{WR}$  — то же, но в предположении равенства поступательной и вращательной температур температуре поверхности  $T_w$ . Величины  $E_{CT}^*$  и  $E_{CR}^*$  определяются по потокам энергии поступательных и вращательных степеней свободы всех молекул, падающих на поверхность, с помощью соотношений

$$(2.6) \quad E_{CT}^* = (1-a)E_{CT}, \quad E_{CR}^* = (1-a)E_{CR}$$

где  $a$  — вероятность «поглощения» упавшей молекулы поверхностью, введенная выше.

Постановка задачи завершается следующими предположениями:

а) течение является стационарным,

б) испарение или конденсация на поверхности являются «слабыми» в указанном ранее смысле,

в) задача сводится к линейной вследствие возможности представить функцию распределения — решение уравнения (2.1) с граничными условиями (2.4) — в виде

$$(2.7) \quad f_{v_1 v_2} = f_{00}^{v_1 v_2} (1 + \Phi_{v_1 v_2}), \quad \Phi_{v_1 v_2} \ll 1$$

$$f_{00}^{v_1 v_2} = n_0 \left( \frac{h_0}{\pi} \right)^{3/2} \exp(-h_0 \xi^2) \varphi_{v_1}(T_0) \varphi_{v_2}(T_{i0})$$

В выражении для  $f_{00}^{v_1 v_2}$  нулем в нижнем индексе отмечены значения гидродинамических величин, полученные в результате продолжения решения в навье-стоксовской области течения вне слоя Кнудсена «на поверхность».

Ограничения, которые эти предположения накладывают на свойства течения над поверхностью и на характер взаимодействия молекул с ней, будут ясны из дальнейшего.

Подстановка (2.7) в уравнение (2.1) с учетом определений (2.2) приводит к уравнению для  $\Phi_{v_1 v_2}$

$$(2.8) \quad f_{00}^{v_1 v_2} \left\{ \xi_x \left[ \frac{\partial \ln n_0}{\partial x} + \left( \frac{m \xi^2}{2kT_0} - \frac{3}{2} + \frac{E_{v_1} - E_1^{eq}(T_0)}{kT_0} \right) \frac{\partial \ln T_0}{\partial x} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{E_{v_2} - E_2^{eq}(T_{i0})}{kT_{i0}} \frac{\partial \ln T_{i0}}{\partial x} \right] + \xi_y \frac{\partial \Phi_{v_1 v_2}}{\partial y} \right\} =$$

$$= A_1 n_0 f_{00}^{v_1 v_2} \left[ (1 + A_{2*}) \eta + (1 + A_{2*}) \frac{m \xi u}{kT_0} + \right.$$

$$\left. + (1 + A_{2*}) \frac{E_{v_2} - E_2^{eq}(T_{i0})}{kT_{i0}} \tau_{i2} + \left( \frac{m \xi^2}{2kT_0} - \frac{3}{2} \right) \tau + \right.$$

$$\left. + A_{2*} \left( \frac{m \xi^2}{2kT_0} - \frac{3}{2} + \frac{E_{v_1} - E_1^{eq}(T_0)}{kT_0} \right) \tau_{01} + \frac{E_{v_1} - E_1^{eq}(T_0)}{kT_0} \tau_{11} - \right.$$

$$\left. - (1 + A_{2*}) \Phi_{v_1 v_2} \right] + A_1 n A_{3*} (f_{003}^{v_1 v_2} - f_{00}^{v_1 v_2}) + O(A_1 n A_{3*} f_{00}^{v_1 v_2} \Phi_{v_1 v_2})$$

Здесь в дополнение к оговоренным ранее введены обозначения

$$(2.9) \quad n = n_0(1 + \eta), \quad \eta = \sum_{v_1 v_2} \int f_{00*}^{v_1 v_2} \Phi_{v_1 v_2} d\xi$$

$$T_{i1} = T_0(1 + \tau_{i1}), \quad \tau_{i1} = \left[ \sum_{v_1 v_2} \int f_{00*}^{v_1 v_2} \Phi_{v_1 v_2} E_{v_1} d\xi - E_1^{eq}(T_0) \eta \right] (c_{i1}^{eq} T_0)^{-1}$$

$$n_0 f_{00*}^{v_1 v_2} = f_{00}^{v_1 v_2}, \quad c_{i1}^{eq} = dE_1^{eq}(T_0)/dT_0$$

$$T_{i2} = T_{i0}(1 + \tau_{i2}), \quad \tau_{i2} = \left[ \sum_{v_1 v_2} \int f_{00*}^{v_1 v_2} \Phi_{v_1 v_2} E_{v_2} d\xi - E_2^{eq}(T_{i0}) \eta \right] (c_{i2}^{eq} T_{i0})^{-1}$$

$$c_{i2}^{eq} = dE_2^{eq}(T_{i0})/dT_{i0}$$

$$T_{01} = T_0(1 + \tau_{01}), \quad \tau_{01} ({}^3/2 k + c_{i1}^{eq}) = {}^3/2 k \tau + c_{i1}^{eq} \tau_{i1}$$

$$T = T_0(1 + \tau), \quad \tau = {}^2/3 \sum_{v_1 v_2} \int f_{00*}^{v_1 v_2} (m \xi^2 / 2k T_0) \Phi_{v_1 v_2} d\xi - \eta$$

$$f_{003}^{v_1 v_2} = n \Phi_{v_1}(T_{002}) \Phi_{v_2}(T_{002}) (h_{002}/\pi)^{1/2} \exp(-h_{002} \xi^2)$$

$${}^3/2 k T_0 + E_1^{eq}(T_0) + E_2^{eq}(T_{i0}) = {}^3/2 k T_{002} + E_1^{eq}(T_{002}) + E_2^{eq}(T_{002})$$

Слагаемые, пропорциональные  $\xi_x$  в левой части (2.8), существенны лишь в том случае, если  $Re \leq O(1)$ . В остальных случаях их влияние на  $\Phi_{v_1 v_2}$  пренебрежимо мало. Поэтому без уменьшения общности можно считать, что  $\partial \ln n_0 / \partial x = -\partial \ln T_0 / \partial x$ .

Если условия на поверхности таковы, что в главном приближении  $T_{i0} = T_0$ , то  $f_{003}^{v_1 v_2} = f_{00}^{v_1 v_2}$ . Тогда вследствие малости  $A_{3*}$ , по сравнению с единицей, влиянием  $V-R-T$  процессов на течение в кнудсеновском слое можно пренебречь и опустить в (2.8) слагаемые, пропорциональные  $A_{3*}$ .

Если, напротив,  $T_{i0} \neq T_0$ , то над поверхностью вне кнудсеновского слоя присутствует подслой неравновесного течения с толщиной  $\sim l/\sqrt{A_{3*}}$ ,  $l$  — длина пробега молекул, в котором за счет  $V-R-T$  процессов происходит выравнивание колебательной температуры и температуры поступательных и вращательных степеней свободы [11]. В этом случае, как нетрудно показать,  $\Phi_{v_1 v_2} \sim \sqrt{A_{3*}}$ . Поэтому с погрешностью в решении порядка  $O(\sqrt{A_{3*}})$  слагаемые в (2.8), пропорциональные  $A_{3*}$ , также можно опустить.

Возможность представить решение в виде (2.7) существует лишь в том случае, если в граничном условии (2.4)

$$(2.10) \quad n_r = n_0(1-a)(1+\eta_r'), \quad n_{ev} = n_0(1+\eta_{ev}')$$

$$T_{r1} = T_0(1+\tau_{r1}'), \quad T_w = T_0(1+\tau_w'), \quad T_r = T_0(1+\tau_r')$$

$$T_{r2} = T_{i0}(1+\tau_{r2}'), \quad T_{iw} = T_{i0}(1+\tau_{iw}')$$

причем все штрихованные величины имеют порядок  $\Phi_{v_1 v_2}$ .

Последние два выражения (а фактически условия) накладывают определенные ограничения на характер влияния поверхности на колебательные степени свободы молекул. В том случае, если  $T_{r2}$  и  $T_{iw}$  сильно отличаются друг от друга, задача перестает быть линейной, так как при этом в слое

Кнудсена за счет быстрых процессов  $V-V$  будет происходить выравнивание колебательных температур.

Остальные равенства (2.10) выполняются при сделанных выше предположениях о «слабом» испарении или конденсации и принятой модели взаимодействия молекул с поверхностью.

С учетом (2.10) граничное условие на  $\Phi_{v_1, v_2}$  у поверхности примет вид

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \Phi_{v_1, v_2}(y=0, \xi_v > 0) &= \eta_r + \left( \frac{m\xi^2}{2kT_0} - \frac{3}{2} \right) \tau_r + \frac{E_{v_1} - E_1^{eq}(T_0)}{kT_0} \tau_{r1} + \\ &+ \frac{E_{v_2} - E_2^{eq}(T_{i0})}{kT_{i0}} \tau_{r2} \\ \eta_r &= a\eta_{ev}' + (1-a)\eta_r', \quad \tau_r = a\tau_w' + (1-a)\tau_r' \\ \tau_{r1} &= a\tau_w' + (1-a)\tau_{r1}', \quad \tau_{r2} = a\tau_{iw}' + (1-a)\tau_{r2}' \end{aligned}$$

Условие на внешней границе кнудсеновского слоя на  $\Phi_{v_1, v_2}$  получается из «сращивания» решения уравнения (2.1) в газодинамической области и решения внутри слоя Кнудсена. С учетом сделанных выше предположений о характере процесса испарения (или конденсации) это условие после отбрасывания членов более высокого порядка малости принимает вид

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \Phi_{v_1, v_2}(y_1 \rightarrow \infty) &= \frac{m\xi u_0}{kT_0} + \left( \frac{m\xi^2}{2kT_0} - \frac{5}{2} \right) y \frac{\partial \ln T}{\partial y} \Big|_0 + \\ &+ \frac{m}{kT_0} \xi_x y \frac{\partial u_x}{\partial y} \Big|_0 + \frac{E_{v_1} - E_1^{eq}(T_0)}{kT_0} y \frac{\partial \ln T}{\partial y} \Big|_0 + \\ &+ \frac{E_{v_2} - E_2^{eq}(T_{i0})}{kT_{i0}} y \frac{\partial \ln T_i}{\partial y} \Big|_0 - \\ &- \frac{1}{A_1 n_0 (1 + A_{2*})} \left[ \left( \frac{m\xi^2}{2kT_0} - \frac{5}{2} \right) \left( \xi_x \frac{\partial \ln T}{\partial x} \Big|_0 + \xi_v \frac{\partial \ln T}{\partial y} \Big|_0 \right) + \right. \\ &+ \frac{E_{v_1} - E_1^{eq}(T_0)}{kT_0} \left( \xi_x \frac{\partial \ln T}{\partial x} \Big|_0 + \xi_v \frac{\partial \ln T}{\partial y} \Big|_0 \right) + \\ &+ \frac{E_{v_2} - E_2^{eq}(T_{i0})}{kT_{i0}} \left( \xi_x \frac{\partial \ln T_i}{\partial x} \Big|_0 + \xi_v \frac{\partial \ln T_i}{\partial y} \Big|_0 \right) + \\ &\left. + \frac{m}{kT_0} \xi_x \xi_v \frac{\partial u_x}{\partial y} \Big|_0 \right] \\ y_1 &= y A_1 n_0 h_0^{1/2} \end{aligned}$$

Для температур, при которых становится необходимым учет возбуждения колебательных степеней свободы молекул, вращательные степени свободы возбуждены полностью. В связи с этим можно считать, что в газе двухатомных молекул  $E_1^{eq}(T_{i1}) = kT_{i1}$ ,  $c_{i1}^{eq} = k$ , и провести упрощения в (2.8), (2.9), (2.11) и (2.12).

Рассматривая эти соотношения, можно заметить, что функцию  $\Phi_{v_1, v_2}$  удобно искать в виде следующей линейной комбинации четырех функций:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \Phi_{v_1, v_2} &= \Phi_{v_1}^{(1)} + [E_{v_2} - E_2^{eq}(T_{i0})] \Phi^{(2)} / kT_{i0} \\ \Phi_{v_1}^{(1)} &= \chi_{v_1} + \sqrt{h_0} \xi_x \omega_{v_1}, \quad \Phi^{(2)} = \chi + \sqrt{h_0} \xi_x \omega \end{aligned}$$

где  $\chi_{v_i}$  и  $\chi_v$ ,  $\omega_{v_i}$  и  $\omega$  зависят лишь от модуля скорости молекулы и ее компоненты  $\xi_{v_i}$ .

Соотношения (2.9), определяющие поправки  $\eta$ ,  $\tau_{i1}$ ,  $\tau_{i2}$  и т. д. через функцию  $\Phi_{v_i v_i}$ , после подстановки в них (2.13) существенно упрощаются

$$(2.14) \quad \eta = \sum_{v_i} \int f_{00*}^{v_i} \chi_{v_i} d\xi, \quad f_{00*}^{v_i} = \varphi_{v_i}(T_0) \left( \frac{h_0}{\pi} \right)^{3/2} \exp(-h_0 \xi^2)$$

$$\tau_{i1} = \frac{1}{kT_0} \sum_{v_i} \int f_{00*}^{v_i} E_{v_i} \chi_{v_i} d\xi - \eta, \quad \tau_{i2} = \int f_{00*} \chi d\xi$$

$$\tau = \frac{2}{3} \sum_{v_i} \int f_{00*}^{v_i} \frac{m \xi^2}{2kT_0} \chi_{v_i} d\xi - \eta$$

Компоненты среднemasсовой скорости определяются следующим образом:

$$(2.15) \quad u_x = \sqrt{h_0} \sum_{v_i} \int f_{00*}^{v_i} \xi_x^2 \omega_{v_i} d\xi$$

$$u_y = \sum_{v_i} \int f_{00*}^{v_i} \xi_y \chi_{v_i} d\xi$$

Из (2.14) и (2.15) видно, что решение задачи о скорости испарения и скачке температуры представляется функцией  $\chi_{v_i}$ . Получение выражения для скорости скольжения связано с построением функции  $\omega_{v_i}$ . Распределение колебательной температуры в слое Кнудсена можно найти с помощью функции  $\chi$ .

Далее последовательно рассматриваются эти три задачи.

**3. Определение скорости испарения или конденсации и скачка температуры.** Для дальнейшего удобно перейти к безразмерной форме записи. Для этого достаточно провести обезразмеривание скоростей

$$(v, U) = h_0^{1/2} (\xi, u)$$

С помощью выписанных ранее уравнений и граничных условий и определения функций  $\chi_{v_i}$  нетрудно получить интегральные уравнения для  $\eta$ ,  $\tau$  и  $\tau_{i1}$ , которые через  $\chi_{v_i}$  выражаются согласно (2.14). Однако для решения задачи удобнее перейти к новым функциям  $G$  в соответствии с соотношениями

$$(3.1) \quad \eta = G_\eta + \eta_r - y_1 (\partial \ln T / \partial y_1)_0$$

$$\tau = G_\tau + \tau_r + y_1 (\partial \ln T / \partial y_1)_0$$

$$\tau_{i1} = G_i + \tau_{r1} + y_1 (\partial \ln T / \partial y_1)_0$$

Для функций  $G$  интегральные уравнения имеют вид

$$(3.2) \quad \sqrt{\pi} G_\eta = (1 + A_{2*}) I_{-1} * G_\eta + \left( I_1 * - \frac{1}{2} I_{-1} * \right) \times$$

$$\times \left[ \left( 1 + \frac{3}{5} A_{2*} \right) G_\tau + \frac{2}{5} A_{2*} G_i \right] -$$

$$- \frac{2A_{2*} (\tau_{r1} - \tau_r)}{5(1 + A_{2*})} \left[ I_2(y_1) - \frac{1}{2} I_0(y_1) \right] - 2U_{y0} I_1(y_1) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{1+A_{2*}} \left[ I_3(y_1) - \frac{3}{2} I_1(y_1) \right] \frac{\partial \ln T}{\partial y_1} \Big|_0 \\
\sqrt{\pi} G_\tau & = (1+A_{2*}) \left( \frac{2}{3} I_1^* - \frac{1}{3} I_{-1}^* \right) G_\eta + \\
& + \left( \frac{2}{3} I_3^* - \frac{2}{3} I_1^* + \frac{5}{6} I_{-1}^* \right) \left[ \left( 1 + \frac{3}{5} A_{2*} \right) G_\tau + \frac{2}{5} A_{2*} G_i \right] + \\
& + \frac{2A_{2*}(\tau_{r1} - \tau_r)}{5(1+A_{2*})} \left[ \sqrt{\pi} - \frac{2}{3} I_1(y_1) + \frac{2}{3} I_2(y_1) - \frac{5}{6} I_0(y_1) \right] - \\
& - 2U_{y0} \left[ \frac{2}{3} I_3(y_1) - \frac{1}{3} I_1(y_1) \right] + \\
& + \frac{1}{1+A_{2*}} \left[ \frac{2}{3} I_5(y_1) - \frac{4}{3} I_3(y_1) + \frac{7}{6} I_1(y_1) \right] \frac{\partial \ln T}{\partial y_1} \Big|_0 \\
\sqrt{\pi} G_i & = I_{-1}^* \left[ \frac{3}{5} A_{2*} G_\tau + \left( 1 + \frac{2}{5} A_{2*} \right) G_{i1} \right] + \\
& + \frac{3A_{2*}(\tau_r - \tau_{r1})}{5(1+A_{2*})} \left[ \sqrt{\pi} - I_0(y_1) \right] + \frac{1}{1+A_{2*}} I_0(y_1) \frac{\partial \ln T}{\partial y} \Big|_0
\end{aligned}$$

$$I_n^* G = \int_0^\infty G(\sigma) I_n(|y_1 - \sigma|) d\sigma$$

$$I_n(y_1) = \int_0^\infty s^n \exp \left( -s^2 - \frac{(1+A_{2*})y_1}{s} \right) ds$$

При получении (3.2) учтено, что нормальная к поверхности компонента скорости изменяется на толщине слоя Кнудсена на величину второго порядка малости, которой пренебрегается.

С помощью граничных условий (2.12) можно показать, что в пределе  $y_1 \rightarrow \infty$  величины  $\eta$ ,  $\tau$  и  $\tau_{r1}$  должны совпадать с соответствующими членами в (3.1), пропорциональными градиенту  $\ln T$  в точке  $(x, 0)$  в координатах внешнего по отношению к слою Кнудсена течения. Поэтому для определения  $\eta_r$ ,  $\tau_{r1}$  и  $\tau_r$  получаем условия

$$(3.3) \quad \eta_r = -G_\eta(\infty), \quad \tau_r = -G_\tau(\infty), \quad \tau_{r1} = -G_i(\infty)$$

Однако система уравнений (3.2) обладает при  $A_{2*} \neq 0$  таким свойством, что второе и третье условия в (3.3) являются следствием друг друга, поскольку  $G_i(\infty) = G_\tau(\infty) + \tau_r - \tau_{r1}$ . В этом можно убедиться, рассмотрев асимптотику второго и третьего уравнений (3.2) при  $y_1 \rightarrow \infty$ .

Система уравнений (3.2) является линейной, что позволяет искать ее решение в виде линейной комбинации вида

$$G_k = A_k (\partial \ln T / \partial y_1)_0 + B_k U_{y0} + g_k (\tau_{r1} - \tau_r), \quad k = \eta, \tau, i$$

В силу отмеченного выше свойства решения системы (3.2) функции  $A$ ,  $B$  и  $g$  обладают свойствами

$$A_i(\infty) = A_i(\infty), \quad B_i(\infty) = B_i(\infty), \quad g_i(\infty) = g_i(\infty) + 1$$



которые подтверждаются результатами численного решения уравнений (3.2), приведенными в таблице.

Таким образом, для решения задачи недостаточно условий (3.3) и необходимо использование модели взаимодействия молекул с поверхностью, которая была описана выше.

Тепловые потоки от поверхности за счет поступательных и вращательных степеней свободы молекул определяются выражениями

$$(3.4) \quad Q_T(0) = E_{rT} + E_{ev,T} - E_{ст}, \quad Q_R(0) = E_{rR} + E_{ev,R} - E_{сR}$$

где  $E_{ev,T}$  и  $E_{ev,R}$  — потоки энергии поступательных и вращательных степеней свободы молекул, испаренных поверхностью.

Суммарный тепловой поток  $Q(0) = Q_T(0) + Q_R(0)$  сохраняет свою величину поперек слоя Кнудсена. Поэтому его нетрудно определить с помощью

$A_{2*}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.10
$A_n(\infty)$	-0.554	-0.508	-0.469	-0.436	-0.407	-0.382	-0.359	-0.339	-0.322	-0.306
$A_T(\infty)$	1.063	0.974	0.898	0.834	0.778	0.730	0.687	0.649	0.614	0.584
$A_i(\infty)$	1.058	0.972	0.898	0.834	0.778	0.730	0.687	0.649	0.614	0.584
$B_n(\infty)$	-1.738	-1.737	-1.735	-1.734	-1.733	-1.732	-1.732	-1.731	-1.731	-1.730
$B_T(\infty)$	-0.320	-0.318	-0.317	-0.317	-0.317	-0.316	-0.316	-0.316	-0.316	-0.316
$B_i(\infty)$	-0.312	-0.316	-0.316	-0.316	-0.316	-0.316	-0.316	-0.316	-0.316	-0.316
$g_n(\infty)$	-0.239	-0.236	-0.232	-0.229	-0.227	-0.225	-0.224	-0.223	-0.222	-0.221
$g_T(\infty)$	0.298	0.303	0.304	0.305	0.306	0.307	0.307	0.307	0.308	0.308
$g_i(\infty)$	-0.685	-0.693	-0.694	-0.693	-0.693	-0.693	-0.693	-0.692	-0.692	-0.692
$F_1$	-0.471	-0.435	-0.403	-0.375	-0.351	-0.329	-0.310	-0.293	-0.278	-0.264
$F_2$	1.041	1.020	1.025	1.028	1.030	1.032	1.034	1.035	1.036	1.037
$F_3$	0.085	0.105	0.117	0.125	0.131	0.135	0.139	0.142	0.146	0.147

навые-стоксовской асимптотики для функции распределения (2.12). С другой стороны, величина  $Q_R(0)$  может быть найдена с помощью построенного решения в слое Кнудсена. В результате имеем

$$(3.5) \quad q = q_T + q_R = -\frac{7}{4(1+A_{2*})} \frac{\partial \ln T}{\partial y_1} \Big|_0 + \frac{7}{2} U_{v0}$$

$$q_R = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ (1+A_{2*}) I_{00} * G_n + \left[ \left( 1 + \frac{A_{2*}}{5} \right) I_{00} * + \frac{2A_{2*}}{5} I_{20} * \right] G_i + \right.$$

$$\left. + \left[ \left( \frac{3}{10} A_{2*} - \frac{1}{2} \right) I_{00} * + \left( 1 + \frac{3}{5} A_{2*} \right) I_{20} * \right] G_T \right\} +$$

$$+ \frac{U_{v0}}{2} - \frac{1}{4(1+A_{2*})} \frac{\partial \ln T}{\partial y_1} \Big|_0 + \frac{A_{2*}(\tau_{r1} - \tau_r)}{5\sqrt{\pi}(1+A_{2*})} =$$

$$= F_1 \frac{\partial \ln T}{\partial y_1} \Big|_0 + F_2 U_{v0} + F_3 (\tau_{r1} - \tau_r)$$

$$Q(0) = n_0 k T_0 h_0^{-1/2} q, \quad I_{n0} * G = \int_0^{\infty} I_n(s) G(s) ds$$

Значения определенных таким образом коэффициентов  $F_i$  приведены в таблице.

Так как  $\pi u_v = I_{ev} - aI_e$ , где  $I_e$  — интенсивность падающих на поверхность молекул, то справедливо равенство

$$(3.6) \quad \eta_r' - \eta_{ev}' = (\tau_r' - \tau_r') / 2 - 2\sqrt{\pi} \bar{U}_{v0} / a$$

С учетом соотношений (3.3)–(3.6), а также определений коэффициентов accommodation (2.5) и величин  $\eta_r'$ ,  $\eta_{ev}'$ ,  $\tau_r'$ ,  $\eta_r$  и т. п. можно получить выражения для скорости испарения  $\pi u_v$  и скачка температуры  $(T_0 - T_w) / T_w$

$$(3.7) \quad \pi u_v = p_1 \sqrt{\frac{2kT_w}{m}} (n_{ev}^0 - n_0) + p_2 \frac{\lambda_{RT}}{kT_0} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0$$

$$\frac{T_0 - T_w}{T_w} = f_1 \frac{\lambda_{RT}}{n_0 k T_0} \sqrt{\frac{m}{2kT_0}} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0 + f_2 \sqrt{\frac{m}{2kT_0}} u_v$$

Здесь  $\lambda_{RT} = 7k^2 T_0 [2m(A_1 + A_2)]^{-1}$  — коэффициент теплопроводности за счет поступательных и вращательных степеней свободы молекул

$$(3.8) \quad p_1^{-1} = \frac{1-a}{a} 2\sqrt{\pi} + \frac{1-a}{2} (b_1 + c_1 b_3 - 2g_\eta(\infty) b_3) - B_\eta(\infty)$$

$$p_2 = \frac{1}{7} (1 + A_{2*}) \left[ A_\eta(\infty) - \frac{1-a}{2} (a_1 + c_1 a_3 - 2g_\eta(\infty) a_3) \right] p_1$$

$$f_1 = \frac{1}{7} (1 + A_{2*}) \left[ (1-a) (a_1 + c_1 a_3 + g_\tau(\infty) a_3) + A_\tau(\infty) \right]$$

$$f_2 = (1-a) (b_1 + c_1 b_3 + g_\tau(\infty) b_3) + B_\tau(\infty)$$

$$a_1 = \sqrt{\pi} (1 - \alpha_T) \left( \frac{7}{4(1 + A_{2*})} + F_1 \right) [a + \alpha_T (1-a)]^{-1}$$

$$a_2 = -2\sqrt{\pi} \frac{(1 - \alpha_R) F_1}{a + \alpha_R (1-a)}$$

$$a_3 = \frac{a_2 - a_1}{1 - (c_2 - c_1)}, \quad c_1 = \sqrt{\pi} \frac{(1 - \alpha_T) (1-a) F_3}{a + \alpha_T (1-a)},$$

$$c_2 = -2\sqrt{\pi} \frac{(1 - \alpha_R) (1-a) F_3}{a + \alpha_R (1-a)}$$

$$b_1 = \sqrt{\pi} \frac{(F_2 - 1,5) (1 - \alpha_T)}{a + \alpha_T (1-a)}, \quad b_2 = 2\sqrt{\pi} \frac{(1 - F_2) (1 - \alpha_R)}{a + \alpha_R (1-a)}$$

$$b_3 = \frac{b_2 - b_1}{1 - (c_2 - c_1)}$$

Анализ выражений (3.7) с учетом (3.8) в общем случае довольно труден, поэтому ниже рассмотрим процесс испарения или конденсации при  $\alpha_T = \alpha_R = 1$ . В этом случае, как можно видеть, коэффициенты  $a_i = b_i = c_i = 0$ , а выражения для  $p_{1,2}$  и  $f_{1,2}$  существенно упрощаются.

Рассматривая, таким образом, упрощенное решение задачи и сравнивая его с известными [2-5], можно сделать вывод, что возбуждение внутренних степеней свободы и их релаксация в кнудсеновском слое существенно влияют на процесс испарения и конденсации. Интересно отметить, что зависимость скорости испарения от разности  $(n_{ev}^0 - n_0)$  при этом не-

значительно меняется по сравнению со случаем одноатомного газа: в одноатомном газе, согласно [5], коэффициент  $p_1$  имеет вид  $a[2\sqrt{\pi}(1-0.535a)]^{-1}$ , в то время как при  $A_{2*}=1$  для  $p_1$  справедливо выражение  $p_1 = a[2\sqrt{\pi}(1-0.512a)]^{-1}$ . Гораздо сильнее изменяется величина коэффициента при  $U_{v0}$  в выражении для скачка температуры: в одноатомном газе  $f_2 = -0.44$ , с учетом возбуждения внутренних степеней свободы молекул при  $A_{2*}=1$  коэффициент  $f_2$  имеет величину, равную  $-0.316$ .

Можно предположить, что такое поведение решения объясняется тем, что возбуждение внутренних степеней свободы слабее сказывается на зависимости функции распределения от скоростей молекул, которая определяет величину  $p_1$ , чем на теплоемкости газа, от которой, очевидно, зависит коэффициент  $f_2$ . Испарение в случае более сложных, чем двухатомные, молекул должно привести к еще меньшей абсолютной величине этого коэффициента.

Величины  $p_1$  и  $f_2$  важны при переходе к режиму сильного испарения. Этот режим для случая одноатомного газа рассмотрен, например, в [12-15]. Из изложенного следует, что и при сильном испарении, когда  $U_{v0} = O(1)$ , весьма важным может оказаться учет возбуждения внутренних степеней свободы молекул.

Как уже упоминалось, в [8] решена задача о скачке температуры в многоатомном газе на поверхности без испарения. При этом для случая равенства коэффициентов аккомодации  $\alpha_T$  и  $\alpha_R$  ( $\alpha_T = \alpha_R = \alpha$ ) приводится приближенная формула для расчета скачка температуры

$$(3.9) \quad T_0 - T_w \simeq \left( 1.17 + 2 \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \left( \frac{2\gamma}{\gamma+1} \right) \frac{l}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0$$

$$\gamma = c_p / c_v, \quad \text{Pr} = c_p \mu \lambda^{-1}, \quad \mu = l m n (\pi h)^{-1}$$

Анализ полученных выше результатов показывает, что они совпадают для случая  $\alpha_R = \alpha_T$  и поверхности без испарения ( $U_{v0} = 0$ ) с выражением (3.9) с точностью не ниже 5% в диапазоне значений  $\alpha$  между нулем и единицей.

**4. Определение скорости скольжения.** Из уравнения для функции  $\omega_{v1}$ , входящей в определение тангенциальной составляющей среднемассовой скорости, и граничных условий для  $\omega_{v1}$  можно получить интегральное уравнение и условие при  $y_2 \rightarrow \infty$  для  $U_x$

$$\sqrt{\pi} U_x = \int_0^{\infty} U_x I_{-1}(|s-y_2|) ds - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} I_0(y_2) - I_3(y_2) \right] \frac{d \ln T_0}{dx_2}$$

$$U_x(y_2 \rightarrow \infty) = U_{x0} + y_2 (\partial U_x / \partial y_2)_{y=0}$$

Здесь и далее

$$I_n(x) = \int_0^{\infty} \lambda^n \exp\left(-\lambda^2 - \frac{x}{\lambda}\right) d\lambda, \quad x_2 = A_1 (1 + A_{2*}) n_0 h_0^{1/2} x$$

$$y_2 = A_1 (1 + A_{2*}) n_0 h_0^{1/2} y$$

Сравнивая полученные уравнение и граничное условие с аналогичными соотношениями для одноатомного газа [7], нетрудно убедиться, что они совпадают. В результате можно воспользоваться известным результатом и записать для  $U_{x0}$  соотношение

$$u_x(x, 0) = \frac{\mu_{RT}(x, 0)}{n(x, 0)} \sqrt{\frac{2}{mkT(x, 0)}} \left[ 1.012 \frac{\partial u_x}{\partial y}(x, 0) + \right. \\ \left. + 0.42 \sqrt{\frac{2kT(x, 0)}{m}} \frac{\partial \ln T(x, 0)}{\partial x} \right]$$

где  $\mu_{RT} = kT/[A_1 + A_2]$ . Таким образом, в случае скорости скольжения влияние внутренних степеней свободы проявилось только через коэффициент вязкости.

**5. Граничное условие для колебательной температуры.** Аналогично п. 4 получим интегральное уравнение и граничное условие при  $y_2 \rightarrow \infty$  для  $\tau_{i2}$

$$\sqrt{\pi} \tau_{i2} = \tau_{r2} I_0(y_2) + \int_0^{\infty} \tau_{i2} I_{-1}(|y_2 - s|) ds$$

$$\tau_{i2}(y_2 \rightarrow \infty) = y_2 (\partial \ln T_i / \partial y_2)_{y=0}$$

При решении этого уравнения удобно перейти к функции  $\zeta$  согласно соотношению

$$\tau_{i2} = \zeta (\partial \ln T_i / \partial y_2)_{y=0} + \tau_{r2} + y_2 (\partial \ln T_i / \partial y_2)_{y=0}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{\pi} \zeta = \int_0^{\infty} \zeta I_{-1}(|y_2 - s|) ds + I_1(y_2)$$

решение которого при  $y_2 \rightarrow \infty$  имеет величину 1.021 [7].

Таким образом, с учетом граничного условия на  $\tau_{i2}$  и определения  $\zeta$  имеем

$$\tau_{r2} = -1.012 (\partial \ln T_i / \partial y_2)_{y=0}$$

откуда получаем граничное условие для  $T_i$  при  $y=0$  в виде

$$T_i(x, 0) = a T_{iw} + (1-a) T_{r2} + 0.5783 \frac{\lambda_{RT} h_0^{3/4}}{kn(x, 0)} \frac{\partial T_i(x, 0)}{\partial y}$$

Здесь  $\lambda_{RT}$  — определенный выше коэффициент теплопроводности за счет поступательных и вращательных степеней свободы.

Так как по предположению  $A_{3*} \ll 1$ , полученное в п. 3 решение задачи о скорости испарения и скачке температуры может быть обобщено на случай отсутствия ограничений на значения  $T_{r2}$  и  $T_{iw}$ , содержащихся в соотношениях (2.10). Однако при произвольных значениях этих температур ход решения должен быть несколько изменен, поскольку в этом случае несправедливо представление функции распределения в слое Кнудсена в виде (2.7).

При произвольных  $T_{r2}$  и  $T_{iw}$  течение вне кнудсеновского слоя представляет собой неравновесный подслон с толщиной  $\sim l/A_{3*}^{1/2}$  (см. выше). По этой причине испарение или конденсация будут «слабыми», если  $U_{y0} \sim A_{3*}^{1/2}$ . В этом случае плотность, поступательная и вращательная температуры изменяются на толщине слоя Кнудсена на величины того же порядка. Поэтому, записав уравнение (2.1) для  $f_{v_1, v_2}$  с учетом граничных условий (2.4) в интегральном виде, в нем можно опустить слагаемые, обусловленные  $f_{v_1, v_2}^{(0)}$ , которые имеют величину  $O(A_{3*})$  по сравнению с остальными.

С помощью такого представления для  $f_{v_1, v_2}$  в кнудсеновском слое нетрудно построить нелинейные интегральные уравнения для  $n$ ,  $T$  и  $T_{i1}$ , которые не содержат  $T_{r2}$ ,  $T_{iw}$ ,  $T_{i2}$  и  $T_{02}$ . Аналогично может быть получено и выражение для  $Q_R(0) = -n_0 k T_0 h_0^{-1/2} q_R$ . Линеаризация этих соотношений с учетом малости отклонения вели-

чин  $n$ ,  $T$ ,  $T_{ii}$  от  $n_0$  и  $T_0$  и постоянства с необходимой точностью скорости  $u_y$  поперек слоя Кнудсена приводит к линейным интегральным уравнениям п. 3. Граничные условия для  $n$ ,  $T$  и  $T_{ii}$  на внешней границе кнудсеновского слоя при этом, очевидно, имеют такой же вид, как и ранее.

Таким образом, полученные выше выражения для скорости испарения и скачка температуры поступательных и вращательных степеней свободы молекул остаются справедливыми и для этого случая. Задача определения граничного условия для колебательной температуры при этом должна решаться в нелинейной постановке.

Поступила 31 VII 1978:

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Morse T. F. Kinetic model for gases with internal degrees of freedom. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 2.
2. Кучеров Р. Я., Рихенглас Л. Э. О гидродинамических граничных условиях при испарении и конденсации. ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 1 (7).
3. Муратова Т. М., Лабунцов Д. А. Кинетический анализ процессов испарения и конденсации. Теплофизика высоких температур, 1969, т. 7, вып. 5.
4. Young-Ping Pao. Temperature and density jumps in the kinetic theory of gases and vapors. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 7.
5. Макашев Н. К. Испарение, конденсация и гетерогенные химические реакции при малых значениях числа Кнудсена. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 3.
6. Макашев Н. К. Кнудсеновский слой на телах с химическими реакциями на поверхности при наличии компонента газовой смеси, не участвующего в реакции. Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 6.
7. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
8. Lin J. T., Willis D. R. Kinetic theory analysis of temperature jump in polyatomic gas. Phys. Fluids, 1972, vol. 15, No. 1.
9. Кузнецов В. М., Кузнецов М. М. О граничных условиях для течений многоатомных газов. ПМТФ, 1975, № 4.
10. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
11. Макашев Н. К. О структуре течения многоатомных газов около тел с поверхностными реакциями. Уч. зап. ЦАГИ, 1977, т. 8, вып. 1.
12. Анисимов С. И., Имас Я. А., Романов Г. С., Ходыко Ю. В. Действие излучения большой мощности на металлы. М., «Наука», 1970.
13. Коган М. Н., Макашев Н. К. О роли слоя Кнудсена в теории гетерогенных реакций и в течениях с реакциями на поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.
14. Анисимов С. И., Размагулина А. Х. Динамика расширения пара при испарении в вакуум. ЖЭТФ, 1973, т. 64, вып. 3.
15. Murakami Masahide, Oshima Koichi. Kinetic approach to the transient evaporation and condensation problem. Rarefied Gas Dynamics, Proc. 9-th Int. Sympos. Göttingen, 1974, vol. 2. Porz-Wahn, 1974.